

## Accretion disk 의 시간에 따른 변화

나혜원 · 김경미 · 최규홍

연세대학교 천문기상학과

(1987년 4월 10일 받음; 1987년 6월 1일 수리)

### Time-dependent variations of accretion disk\*

Hye-Weon Na, Kyung-Mee Kim and Kyu-Hong Choi

Department of Astronomy and Meteorology, Yonsei University

(Received April 10, 1987; Accepted June 1, 1987)

#### Abstract

In dwarf nova we assume the primary star as a white dwarf and the secondary as the late type star which filled Roche lobe. Mass flow from the secondary star leads to the formation of thin accretion disk around the white dwarf. We use the  $\alpha$  parameter as viscosity to maintain the disk form and propose that the outburst in dwarf nova cause the steep increase of source term. With these assumptions we solve the basic equations of stellar structure using Newton-Raphson method. We show the physical parameters like temperature, density, pressure, opacity, surface density, height and flux to the radius of disk. Changing the value of  $\alpha$ , we compare several parameters when mass flow rate is constant with those of when luminosity of disk is brightest. At the same time, we obtain time-dependent variations of luminosity and mass of disk. We propose the suitable range of  $\alpha$  is 0.15-0.18 to the difference of luminosity. We compare several parameters of disk with those of the normal late type stars which have the same molecular weight of disk. These show the temperature and pressure of disk are similar to those of normal stars but the density of disk is lower. Maybe the outburst in dwarf nova is due to the variation of the  $\alpha$  value instead of increment of mass flow from the secondary star.

#### 요 약

왜신성의 폭발 원인을 반성으로부터 accretion disk에 흘러들어온 물질유입량의 갑작스런

---

\*Yonsei University Observatory Contribution, No. 50.

증가로 가정하였다. 따라서  $\alpha$ -disk 모델에서 source term을 100배로 증가시켜 Newton-Raphson 방법으로 풀었다. 구해진 disk의 물리적 변수들을 disk의 반경에 대해 나타냈으며, 시간에 따른 disk의 광도와 질량 변화를 구하였다.  $\alpha$ 의 값을 각각 0.1, 0.12, 0.15, 0.18로 바꿔가며 유입되는 물질의 양이 일정할 때와 disk의 밝기가 가장 밝을 때의 변수들을 비교하였다. 이들 결과를  $1M_{\odot}$ 의 항성의 표면과 대기와 비교하였다.

## I. 서 론

Accretion disk는 왜신성의 폭발 원인에서 중요한 에너지원으로 생각되고 있다. Shakura와 Sunyaev(1973)의  $\alpha$ -disk 모델이 보편적으로 받아들여지고 있는데, 이 모델은 가장 문제점인 disk의 점성을  $\alpha$ 라는 각운동량의 효율을 나타내는 변수를 도입하여 해결하였다.

이 연구는 왜신성의 폭발 원인을 반성으로부터 disk에 들어오는 물질 유입량의 갑작스런 증가로 가정하여 시간에 따른 질량과 광도 변화를 구하고자 한다. 또한, 물질 유입량이 일정할 때와 증가했을 때의 두 가지 경우에 대해 물리적 변수들의 값을 구하였으며, 점성은  $\alpha$ -disk 모델을 따랐다. 그리고  $\alpha$ 값이 폭발에 미치는 영향을 알기 위해  $\alpha$ 값을 달리하여 계산하였다.

## II. 기본 방정식들과 source term

그림 1과 같이 질량이  $M_1$ 이고 반경이  $R_1$ 인 백색 왜성 주위에 반경  $R$ 의 accretion disk를 가정한다. 이 때 disk의 두께  $2H$ 는 반경에 비해 작은 값을 가지며 disk의 중심 평면에서 원통 좌표계( $R, \phi, Z$ )를 가정한다.

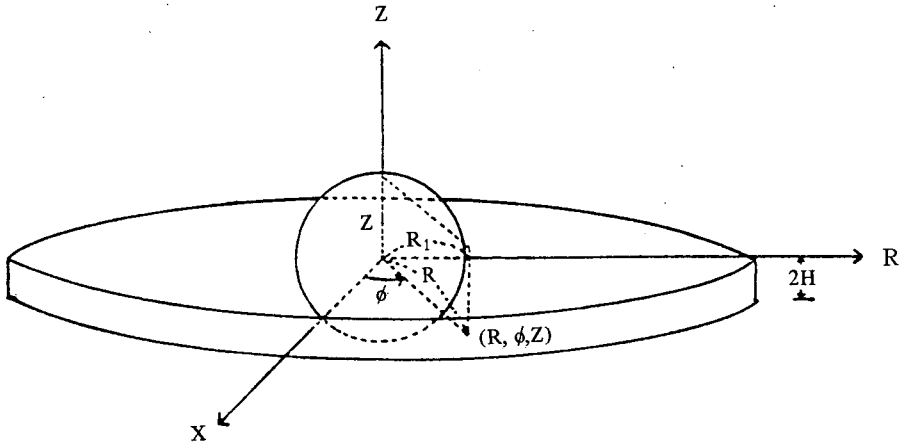


Fig. 1. Dwarf nova and accretion disk

이 평면상의 물질이 주성 위주를  $Q$ 라는 각 운동량을 갖고 원운동하고 있다면

$$Q = Q_k(R) = \left(\frac{GM_1}{R^3}\right)^{1/2} \dots\dots\dots (1)$$

이다. 물질의 회전속도  $V_\phi$ 와 disk의 표면 밀도  $\Sigma$ 는 다음과 같다.

$$V_\phi = R Q_k(R) = \left(\frac{GM_1}{R}\right)^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma = \rho H \dots\dots\dots (3)$$

$G$ 는 중력 상수이고  $\rho$ 는 기체밀도이다.

이 물질이 평형을 이루기 위해 만족해야 하는 방정식은 정역학적 방정식, 열역학적 방정식, 에너지 전달방식 그리고 질량보존의 방식이다. 수직 방향으로서의 정역학적 평형식은

$$P = \frac{1}{2} \Sigma H \left(\frac{GM_1}{R^3}\right) \dots\dots\dots (4)$$

이고,  $P$ 는 압력이다. 열역학적 평형식은

$$F = \frac{2}{3} \frac{acT^4}{\Sigma K} \dots\dots\dots (5)$$

인데,  $F$ 는 flux,  $a$ 는 복사밀도 상수,  $c$ 는 광속,  $T$ 는 온도이며  $K$ 는 불투명계수이다. 에너지 전달식은 아래와 같다.

$$F = \frac{8}{9} \nu \Sigma \left(\frac{GM_1}{R^3}\right) \dots\dots\dots (6)$$

위에서  $\nu$ 는 Shakura와 Sunyaev (1973)의  $\alpha$ -disk 모델에서 나온 점성으로

$$\nu = \alpha C_s H \dots\dots\dots (7)$$

이며,  $C_s$ 는 음속,  $\alpha$ 는 단위없는 임의의 상수이다.

위 방정식들에 부속적으로 상태 방정식과 불투명 계수의 표현식은 아래와 같다.

$$P = \frac{R \Sigma T}{\mu 2H} + \frac{1}{3} a T^4 \dots\dots\dots (8)$$

$$K = 0.4 + 3.2 \times 10^{22} \left( \frac{\Sigma}{HT^{3.5}} \right) \dots\dots\dots (9)$$

P는 압력, R과  $\mu$ 는 기체 상수와 평균 분자량이고 불투명 계수는 Kramer 법칙을 사용하였다.

질량보존은 질량 유입률이 달라짐에 따라 시간변화에 의존하여 다음 식과 같이 표현된다.

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma V_R) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

그리고 각운동량 보존은(Bath와 Pringle 1981)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2})) \dots\dots\dots (11)$$

이며, disk의 질량과 광도는

$$M_D = \int_{R_1}^{R_N} 2\pi R \Sigma \, dR \dots\dots\dots (12)$$

$$L_D = \int_{R_1}^{R_N} 2\pi R F \, dR \dots\dots\dots (13)$$

인데,  $R_1$ 은 disk의 안쪽 반경이고  $R_N$ 은 바깥쪽 반경이다.

위 식들에 대한 경계 조건은  $R = R_1$ 에서는  $\Sigma = 0$ 을 만족하고  $R = R_N$ 에서는  $\frac{\partial \Sigma}{\partial R} = 0$ 을 만족해야 한다. 물질이 유입되는 source term  $S(R, t)$ 는 아래와 같은 식에 의해 물질을 공급한다(Bath와 Pringle 1982).

$$S(R, t) = \frac{\dot{M}(t)}{2\pi R_k \delta(R - R_k)} \dots\dots\dots (14)$$

이는  $R_1 < R_k < R_N$ 일때,  $R = R_N$ 에서  $\dot{M}$ 의 비율로 질량이 들어온다는 것을 의미한다.

### III. 모델 선정과 계산 방법

시간에 따른 물리적 변수들의 변화를 보기 위해 아래와 같은 변수를 도입하였다.

$$X = 2R^{1/2} \dots\dots\dots (15)$$

$$S = X\Sigma \dots\dots\dots (16)$$

따라서 각운동량 보존식 (II)은 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{12}{X^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (S\nu) \dots\dots\dots (17)$$

위 식을 풀기 위해서는 우선 정상 상태일 때의 수직 구조를 알아야 한다. 앞의 평형식들은 온도, disk의 두께, 점성, 표면밀도, 불투명 계수로서 정의되는 함수,  $f(T, H, \nu, \Sigma, K)$  이다. 이를 행렬식으로 풀기 쉽도록 고치면, 상태 방정식은

$$-H^2 \Omega^2 + \frac{RT}{\mu} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

이고, 정역학적 평형식은

$$-\frac{2}{3} \alpha H^2 \Omega + \nu = 0 \dots\dots\dots (19)$$

이다. 에너지 전달식은 아래와 같이

$$-\frac{9}{8} \nu \Sigma \Omega^2 + F = 0 \dots\dots\dots (20)$$

이며, 열역학적 평형은

$$-\frac{2}{3} \frac{acT^4}{\Sigma K} + F = 0 \dots\dots\dots (21)$$

이고, 불투명 계수는

$$-(3.2 \times 10^{22} \frac{\Sigma}{HT^{3.5}} + 0.4) + K = 0 \dots\dots\dots (22)$$

이다. 위 식들을 Newton-Raphson 방법(Scarborough 1966)으로 오차범위에 들 때까지 반복하여 풀었는데, 이러한 정상 상태의 flux는 아래와 같다(Bath와 Pringle 1981).

$$F = \frac{3}{8} GM_1 \dot{M} \pi R^3 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{1/2}\right) \dots\dots\dots (23)$$

위의 (23)식은 불투명 계수와 점성에 무관하므로 미지의 변수를 줄일 수 있다.

시간에 따른 표면밀도의 변화를 위해 (17)식은 standard 1st order explicit 적분법을 사용하여 적분한다. 여기에서 구해지는 새로운 표면밀도로써 Newton-Raphson 방법을 반복함으로써 시간에 따른 물리적 변수들의 값을 구할 수 있다. 여기 사용된 time step은 Richtmyer와 Marton(1967)의 아래식을 만족시키는 값을 택하였다.

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{X_n^2 \Delta X^2}{12 \nu_n} \dots\dots\dots (24)$$

#### IV. 계산 결과와 결론

그림 2는 가정된 모델의 시간에 따른 물질의 유입량의 증가를 나타낸다. 이때 증가된 시간은  $10^6 \text{ sec} < t < 2 \times 10^6 \text{ sec}$ 이다. 그림 3은  $\alpha$ 값에 따른 광도의 시간 변화인데  $\alpha$ 값에 따른 차이를 보인다.  $\alpha = 0.1$ 일 때는  $1^m7$ ,  $\alpha = 0.12$ 일 때는  $1^m9$ ,  $\alpha = 0.15$ 일 때는  $2^m0$ ,  $\alpha = 0.18$ 일 때는  $2^m3$ 의 광도 변화를 나타낸다. 따라서 이러한 모델에서 왜신성의 폭발과 연

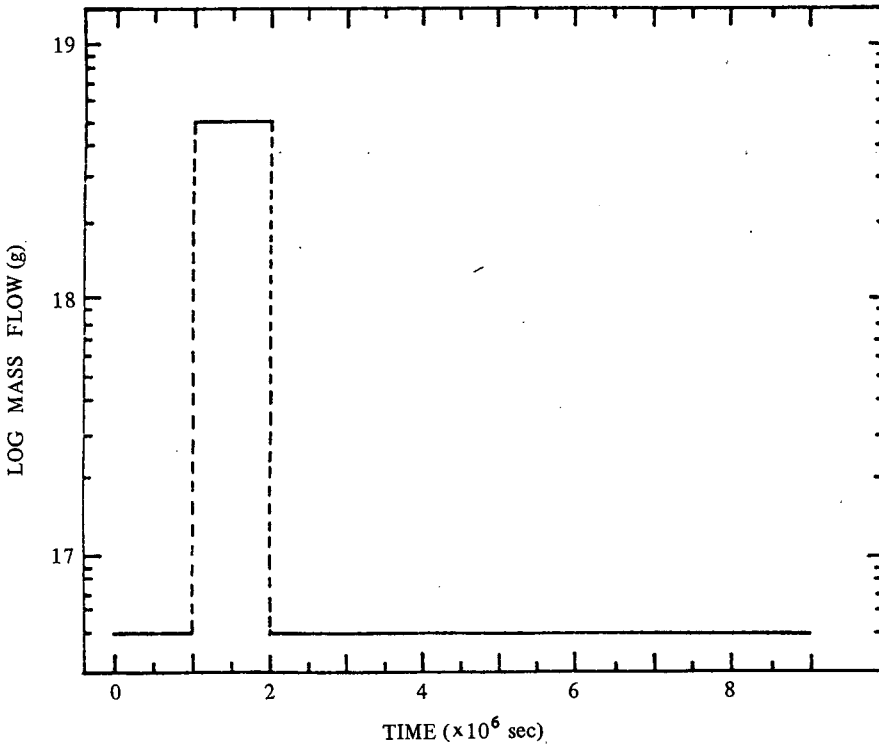


Fig. 2. Time-dependent variation of mass transfer rate.

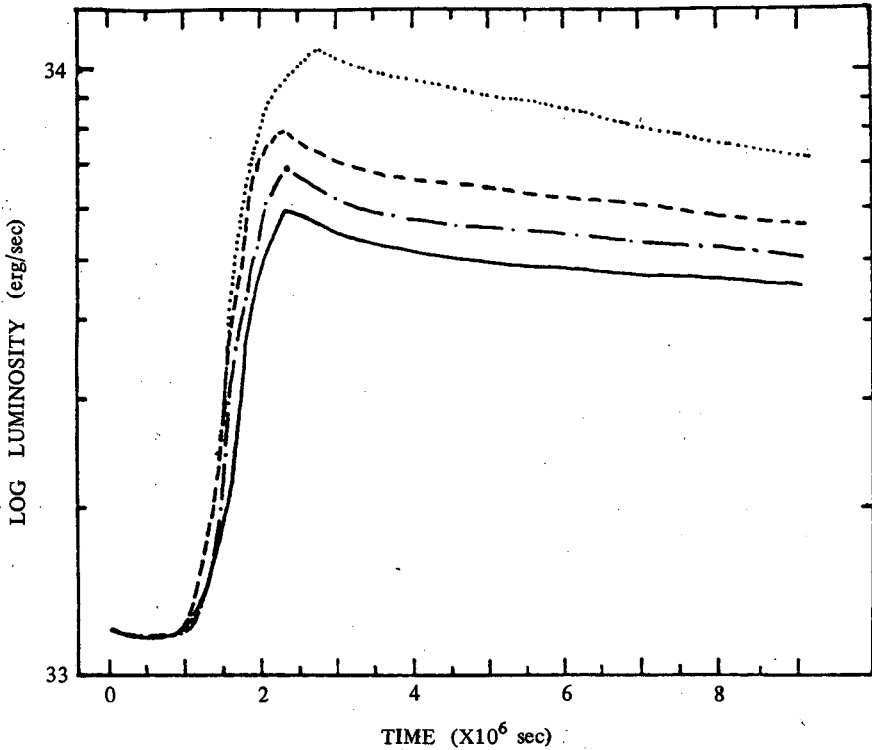


Fig. 3. Time-dependent variations of luminosity

- :  $\alpha = 0.1$
- - -:  $\alpha = 0.12$
- · - ·:  $\alpha = 0.15$
- :  $\alpha = 0.18$

관지을 수 있는 광도 변화를 가지려면  $\alpha = 0.18$ 이고, 본래의 밝기로 되돌아오는데 걸리는 시간은 약 280일 - 300일이 소모된다. 이는 Osaki(1983)의 왜신성 폭발 주기보다 약간 길다. 그림 4는 시간에 따른 질량변화인데  $\alpha$ 값에 따라 구했다.

물질유입이  $\delta$ 함수로 갑작스런 증가를 가정했음에도 불구하고 광도와 질량변화는 급격한 증가 후 서서히 오랜 시간에 걸쳐 감소하는 것으로 나타났다. 이는 물질이 disk 가장자리에서 전체로 확산하는 데에 충분한 시간을 가짐을 의미한다. 왜신성 폭발의 관측적인 증거인 광도 증가는 물질 유입량의 증가에도 그 원인이 있으나 값에 따른 차이도 무시할 수 없다.

그림 5부터 그림 12까지는  $\alpha$ 값이 0.18일 때의 물리적 변수들을 반경에 따라 나타낸 그림이다. 이때 유입량이 일정할 때와 증가했을 때를 비교하였는데 값의 차이를 빼고는 그 양상이 크게 다르지 않다. 온도, 표면밀도, 압력, 밀도, flux는 물질 유입이 일정할 때보다 폭발했을 때가 더 높은 값을 갖고 주성 가까이의 disk에서는 더 높은 값을 보인다. 불투명 계수,

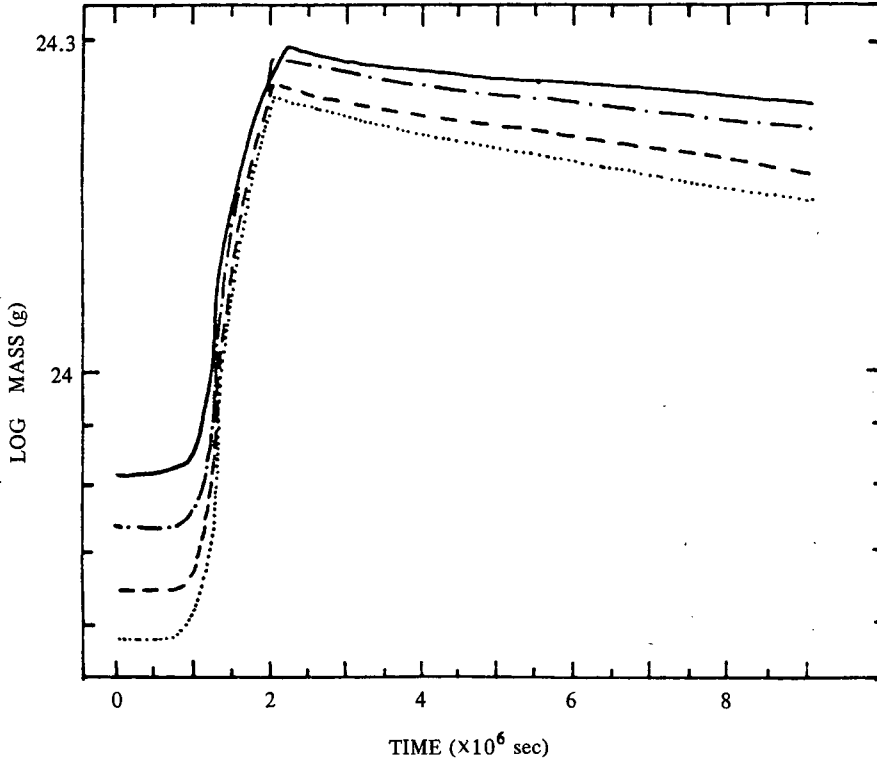


Fig. 4. Time-dependent variations of mass.

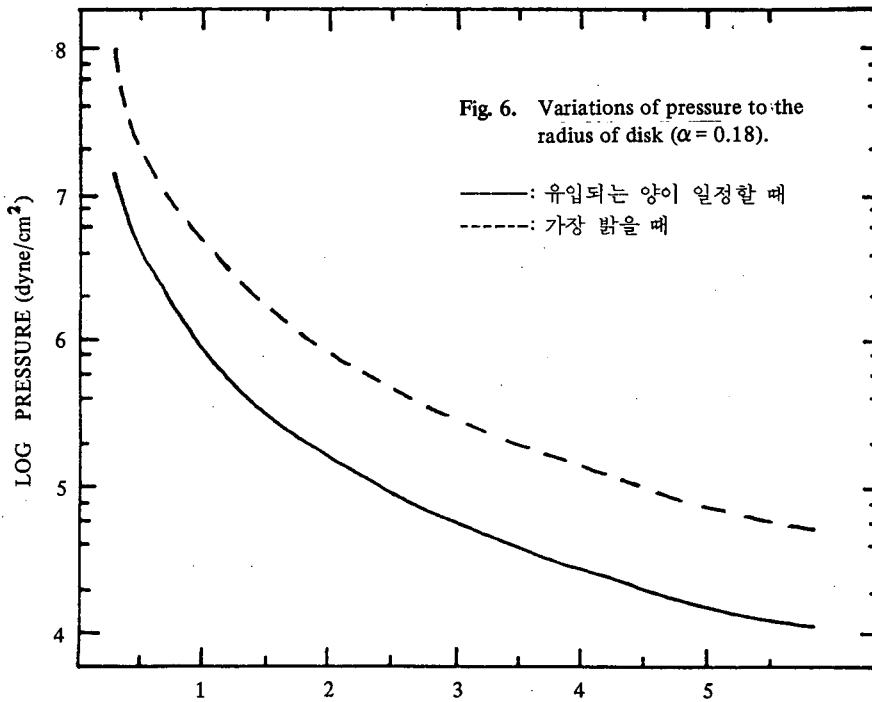
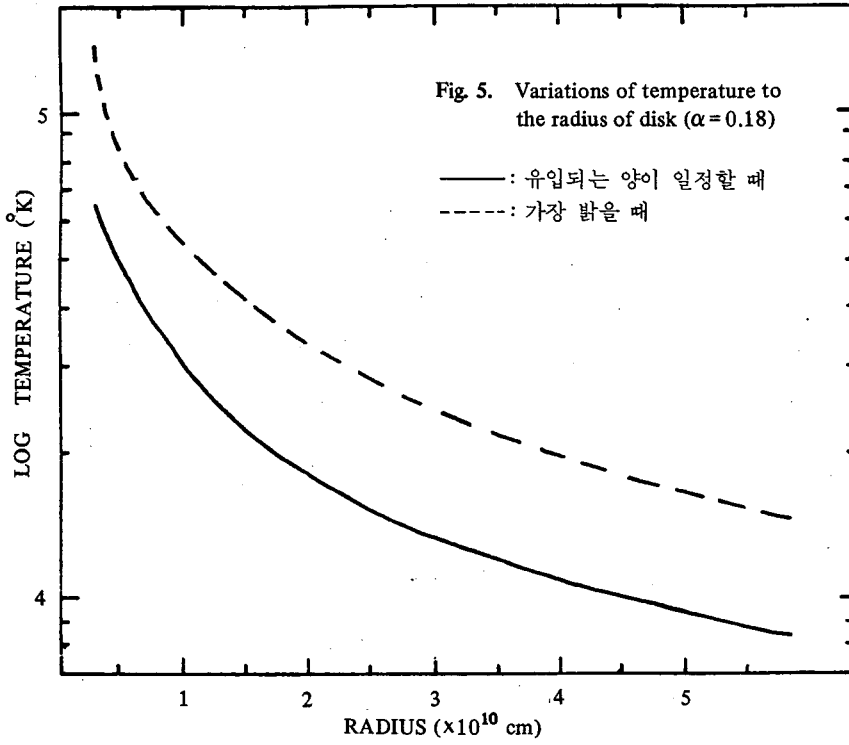
- :  $\alpha = 0.1$
- - -:  $\alpha = 0.12$
- · - ·:  $\alpha = 0.15$
- :  $\alpha = 0.18$

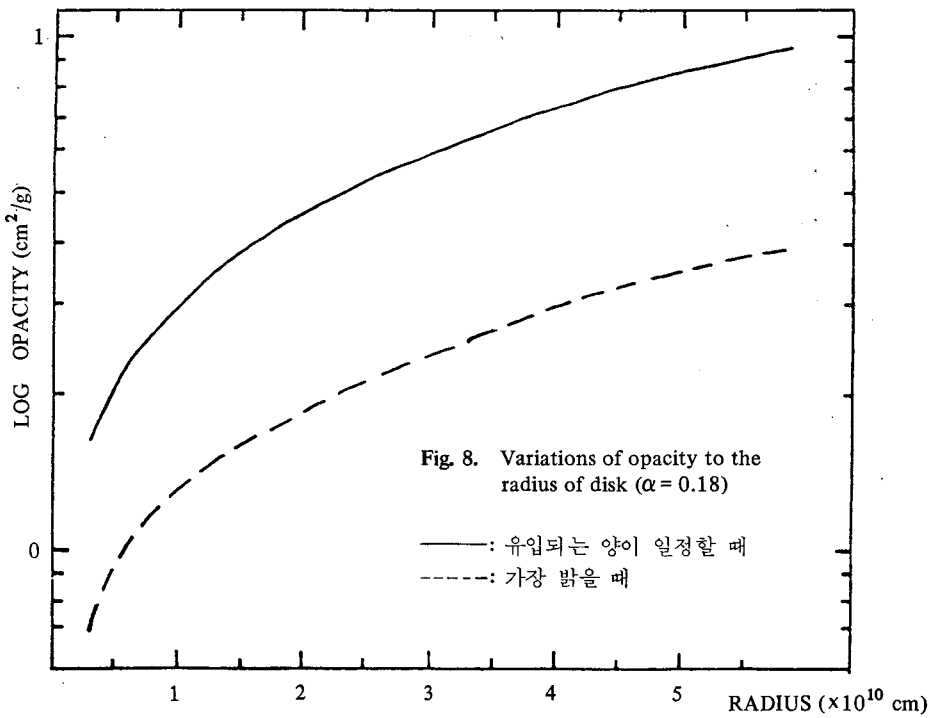
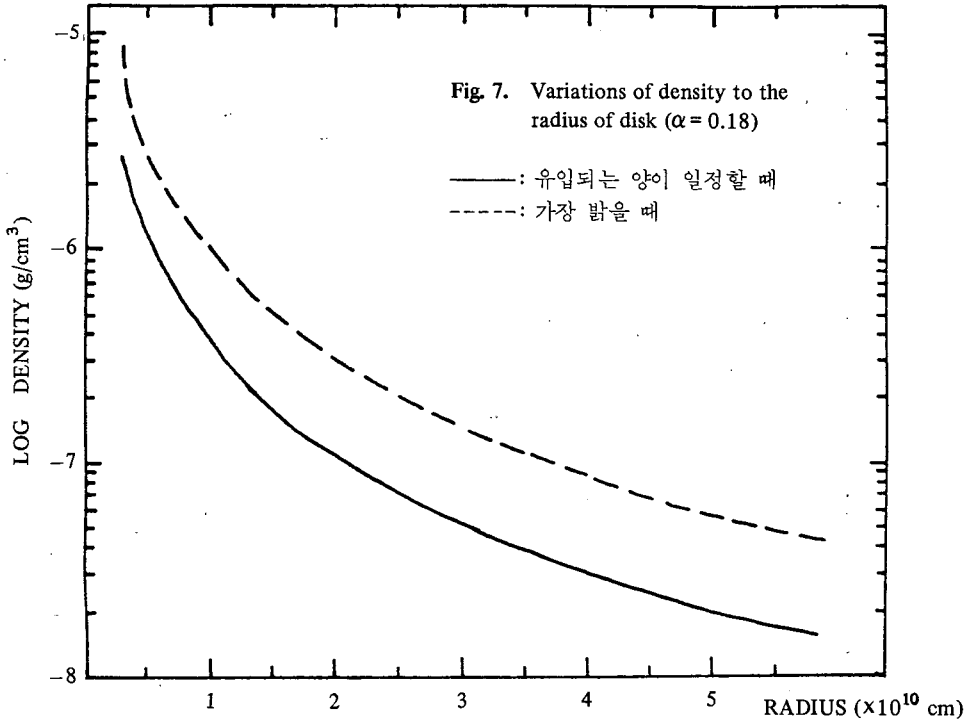
disk의 두께, 점성은 주성 가까이보다 disk의 가장자리로 갈수록 높은 값을 갖는다. 이들 변수들의 값을  $1M_{\odot}$ 의 항성의 표면과 대기(Bowers와 Deeming 1984)와 비교하여 표 1에 제시되었다. 표 1과 같이 온도와 압력은  $1M_{\odot}$  항성의 표면, 대기와 비슷한 값을 가지나 밀도는 훨씬 낮은 값을 나타낸다.

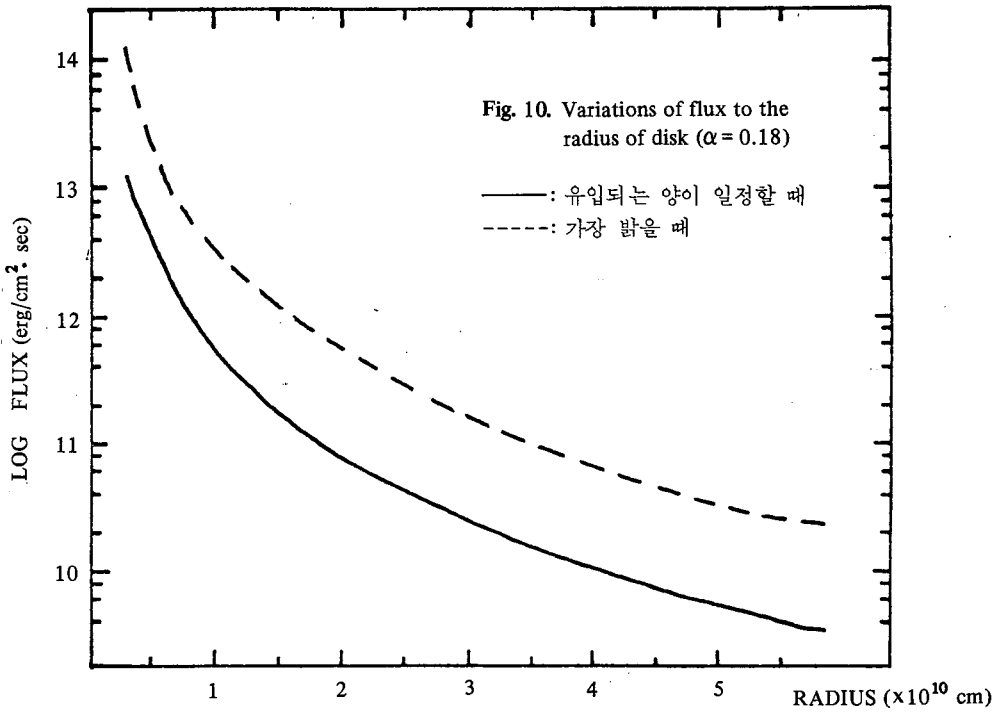
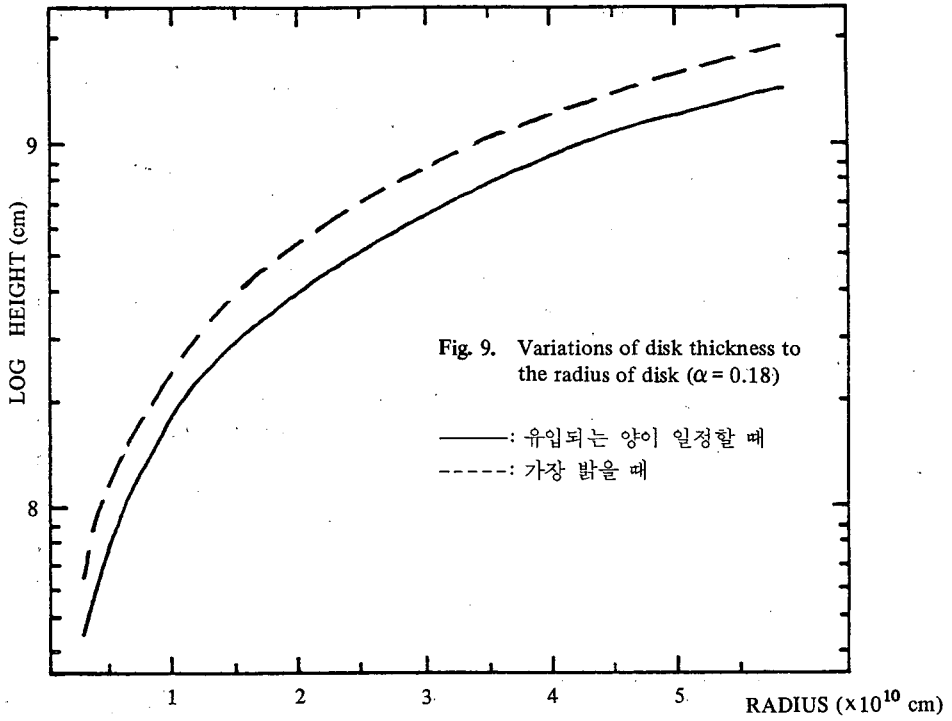
Table 1. Comparison of disk model with  $1M_{\odot}$  late-type star

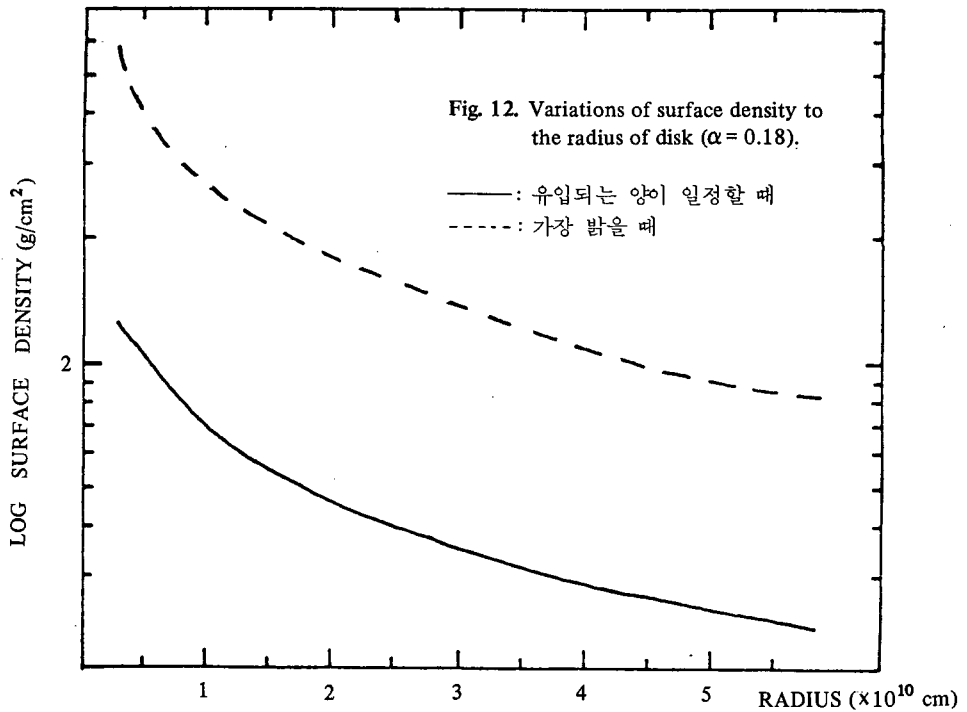
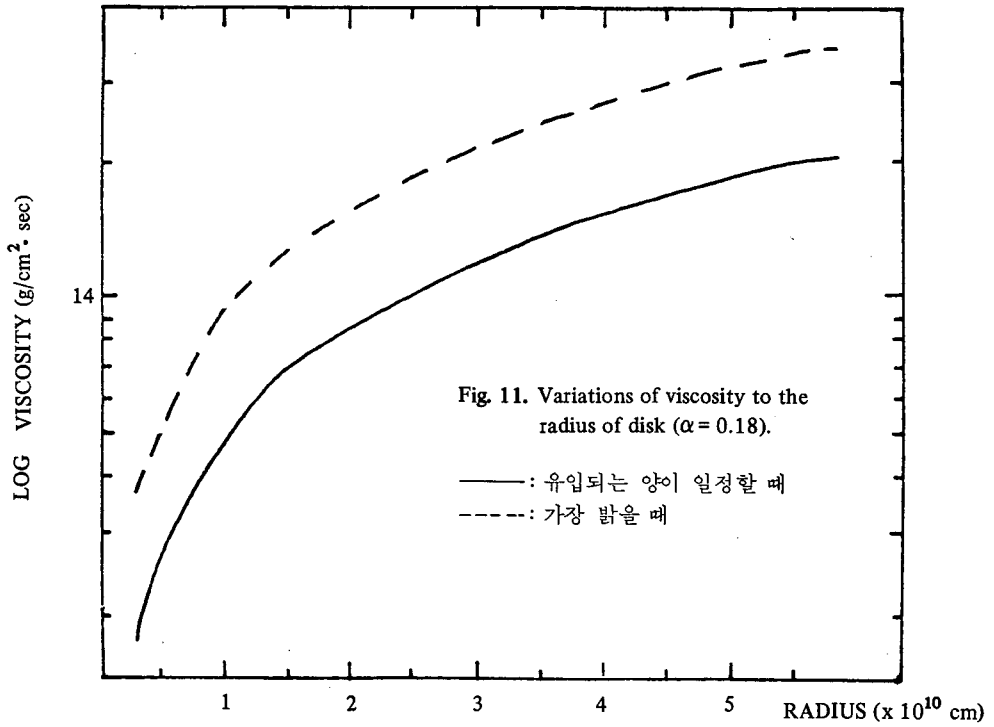
	disk 모델	$1M_{\odot}$ 항성표면	$1M_{\odot}$ 항성대기
	$R=10^9$ cm	$\mu=0.5$	GO형
	$r=8 \times 10^{10}$ cm	$r/R=0.98$	$r/R=10$
			$T=6000^{\circ}\text{K}$
온도 (Log T)	5.1~3.9	5.1	4.0
압력 (Log P)	8.0~4.1	10.1	5.0
밀도 (Log $\rho$ )	-5.1~-8.0	-3.1	-6.8











### References

- Bath, G. T. 1975, *M.N.R.A.S.*, **171**, 311.
- Bath, G. T. and Pringle, J. E. 1981, *M.N.R.A.S.*, **194**, 967.
- Bath, G. T. and Pringle, J. E. 1982, *M.N.R.A.S.*, **199**, 267.
- Bowers, R. L. and Deeming, T. 1984, *Astrophysic I. Stars*(Jones and Bartlett Pub., Inc.: Boston), pp. 88-90.
- Osaki, Y. 1983, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **35**, 377.
- Richtmyer, R. D. and Morton, K. W. 1967, *Difference Methods for Initial Value Problems*(Wiley - Interscience Publishers: New York), p. 217.
- Scarborough, J. B. 1966, *Numerical Mathematical Analysis*(Jones Hopkins Press: Boltimore), pp. 215-217.
- Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. 1973, *Astron. Astrophys.*, **24**, 337.