

〈論 文〉

## 河川流量的 模擬發生을 위한 長期 및 短期 推計學的 模型의 比較研究

—A Comparative Study of the Long-Term and Short-Term  
Stochastic Models for Streamflow Generation—

李 東 律\* 尹 龍 男\*\*  
Lee, Dong Ryul Yoon, Yong Nam

### ABSTRACT

The existing stochastic models for the data with hydrologic persistence can be classified into two categories; the short-term and long-term models.

For the present study, the Hurst coefficients which are the dominant parameter in the Fast Fractional Gaussian Noise (FFGN) model, one of the long-term models, are estimated with historical annual and monthly streamflows. In order to verify the applicability of these estimators the statistical properties of the generated annual streamflows by FFGN model are compared with those of the historical annual streamflows. Then the generated annual streamflows by FFGN model are disaggregated into the monthly streamflows by disaggregation model at two sites, i. e. Waekwan and Jindong, in the Nakdong River Basin. On the other hand, the monthly streamflows at the two sites were also generated by the two-site Matalas model which is one of the short-term models. To evaluate the applicability of the above models and to select the better model the statistical properties of the generated monthly streamflows by two models were compared with those of the historical, respectively.

### 要 旨

推計學的 模型들은 水文資料의 持續性에 따라 長期模型과 短期模型으로 나눌 수 있다.

本 研究에서는 長期模型의 하나인 FFGN 模型에 필요한 媒介變數인 Hurst 係數를 月 年 實測資料에서 推定하고 年流量을 模擬發生하여 實測資料와 統計發的 特性值를 比較하므로써 각 推定值들의 적용 可能性을 評價하였다. 그리고 模擬發生한 年流量을 短期間으로 分解할 수 있는 分解模型과 이 模型의 媒介變數推定 方法으로 이용 가능한 短期模型인 Matalas 模型을 洛東江流域의 二地點(倭館, 津洞)에 적용하여 月流量을 模擬發生하였으며, 實測 月流量과 각 模型에 의해 發生한 月流量의 統計學的 特性值를 比較·分析하므로써 이들 模型들의 河川流量 模擬發生에 적용가능성과 模型의 선택에 기초를 마련코져 하였다.

\* 高麗大學校 大學院

\*\* 韓國建設技術研究院 院長 工博

## 1. 序 論

水文學的 模擬技法은 水文事象을 時間에 따라 나열한 주어진 水文時系列로부터 水文學的 情報를 抽出하고 特性을 파악하여 이 系列에 맞는 模擬技法을 선정한 후에 주어진 資料의 統計學的 特性值를 재현하는 水文時系列을 數學的으로 원하는 만큼 擴張할 수 있는 方法이다. 이와 같은 模擬發生技法은 1960年 이후 고속컴퓨터의 등장으로 많은 模擬發生模型이 開發됐으며 資料系列의 持續性(persistence)이 長期인지 혹은 短期인지에 따라 長期模型(long-term model)과 短期模型(short-term model)으로 나눌 수 있다.<sup>5)15)</sup>

短期模型은 模擬發生 計算이 비교적 용이한 AR系模型(autoregressive model)들로서 短期間의 統計學的 特性值는 잘 보존되나 長期間의 特性值는 보존되지 않아 실제 水文時系列에 나타나는 極值事象(Noah effect)<sup>5)13)</sup>과 長期間 동안의 洪水나 가뭄(Joseph effect)<sup>5)13)</sup>들이 잘 나타나지 않는다. 이런 缺點을 보완하기 위한 研究가 1960년부터 Hurst<sup>5)7)15)29)</sup>의 경험적인 研究를 바탕으로 하여 長期間의 統計學的 特性值를 보존하도록 하는 FFGN(fast fractional gaussian noise) 模型, BL(broken line) 模型 등이 제안되었다.

長期模型들은 短期模型보다 복잡하여 計算費用이 많이 드는 模型들로서 年流量과 같은 定常系列(stationary series)에서만 적용되므로 水資源시스템分析에 많이 이용되는 年보다 작은 短期間으로 分解할 수 있는 方法이 要求되었다. 1972年 Valencia와 Schaake<sup>6)18)</sup>는 年流量 模擬發生模型과 결합하여 年流量을 季節, 月, 週, 時間과 같은 短期間 流量으로 分解할 수 있는 分解模型(disaggregation model)을 제안했으며 이 模型은 長·短期間 統計學的 特性值가 모두 잘 보존되는 模型으로서 앞으로 적용성이 많은 模型으로 알려져 있다.

本 研究에서는 年流量을 長期間 持續性을 보존하면서 模擬發生할 수 있는 長期模型인 FFGN 模型에 필요한 媒介變數를 過去實測된 年 및 月 流量으로부터 推定하고 이들 값을 이용하여 年 流量을 發生시켜 實測流量과 比較함으로써 각

推定值들의 적용가능성을 評價하였다. 또한 模擬發生된 年流量을 資料로 하여 分解模型에 의해 두 地點(two sites)에서의 月流量을 模擬發生하였고 分解模型의 媒介變數 推定에 이용이 가능한 短期模型인 二地點 Matalas 模型으로 月 流量을 發生하여 實測 月流量系列과 각 模型에 의한 發生流量系列의 統計學的 特性值, Correlogram, Hurst 係數를 상호 比較分析함으로써 이들 模型들의 河川流量 模擬發生에의 적용가능성과 適正模型의 選定基準을 마련코져 하였다.

## 2. 理論的 背景

### 2.1 Hurst 現象

Hurst 現象은 다음과 같이 定義된다. 離散型 無作偽變數가  $X_i, i=1, 2, \dots, n$  일 때

$$S(k) = \sum_{i=1}^k X_i, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$R(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \{S(k)\} - \min_{1 \leq k \leq n} \{S(k)\} \quad (2.2)$$

$$S^*(k) = S(k) - \frac{k}{n} S(n), \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

$$R^*(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \{S^*(k)\} - \min_{1 \leq k \leq n} \{S^*(k)\} \quad (2.4)$$

여기서  $S(k)$ 는 累加量이며  $R(n)$ 는 限界容量(range),  $S^*(k)$ 는 調整累加量이고  $R^*(n)$ 는 調整限界容量(adjusted range)이다. 變數의 累加量과 식(2.4)의 調整限界容量은 그림 2.1에서 처럼 표시된다.

예를 들어 變數  $X_i$ 가 어떤 貯水池에 흘러들어 오는  $i$ 年의 流入量이라면  $n$ 年동안 總流入量은  $S(n)$ 이고  $k$ 번째 年까지의 累加流入量은  $S(k)$ 가 된다. 만약 매년  $S(n)/n$ 量을 貯水池에서 放

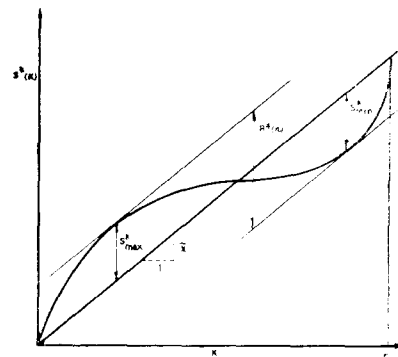


그림 2.1 限界容量의 정의

流하면  $k$  年까지의 放流量은  $k \cdot S(n)/n$  이므로  $S^*(k)$  는  $S(k)$  와  $k \cdot S(n)/n$  의 差를 나타낸다. 最大  $S^*(k) = S_{max}^*$  와 最小  $S^*(k) = S_{min}^*$  의 差는  $n$  年동안 貯水池의 越流(overflow)나 不足(deficit) 없이  $S(n)/n$  만큼 一定한 放流를 할 수 있는 貯水容量을 결정할 수 있다. 그러나 다음  $n$  年後의 流量을 알아야 하기 때문에 실제적 貯水容量으로 적용은 어려운 점이 많지만  $R(n)$  또는  $R^*(n)$  의 統計值들은 貯水容量에 대한 情報를 제공할 수 있다.

Hurst의 研究에서 시작된 Hurst 現象은 Hurst (1951)<sup>29)</sup>와 Hurst, Black, Simaika(1964)<sup>30)</sup>의 研究에서 나무의 나이테, 강우량, 유량, 기압, 연층(varves) 등 많은 自然時系列을 분석한 결과 다음과 같은 統計學的 舉動을 알아냈다.

$$V_n^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n X_i/n \right)^2 \quad (2.5)$$

$$R^{**}(n) = R^*(n)/V_n \quad (2.6)$$

여기서  $V_n^2$ 는 分散이고  $R^{**}(n)$ 는 相對的 크기에 의한 調整限界容量(rescaled adjusted range)이다. 800개의 40~2000年 범위의 年時系列을 이용하여 각각의  $n$ 에 대한  $R^{**}(n)$ 를 계산하여  $\ln(n)$ 과  $\ln R^{**}(n)$ 을 그림 2.2와 같이 圖示했을 때 다음과 같은 關係가 성립함을 알 수 있었다.

$$\frac{R^*(n)}{V_n} \sim n^h \quad (2.7)$$

여기서  $h$ 는 母集團의 Hurst 係數이고 식(2.7)의  $h$ 를 계산하기 위해 年時系列의 경험적 연구에서 Hurst(1951)<sup>29)</sup>는 다음과 같은 절차를 사용하였다.

$$\frac{R^*(n)}{V_n} = \left( \frac{n}{2} \right)^H \quad (2.8)$$

$$H = \ln \frac{R^*(n)}{V_n} / \ln \left( \frac{n}{2} \right)$$

여기서  $H$ 는 母集團의  $h$  推定值이다. 650개의

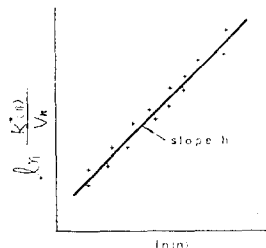


그림 2.2 Hurst 現象의 圖示

계산된  $H$ 의 平均은 0.729, 標準偏差는 0.092의 값을 얻었으며  $H$ 의 값은 0.5보다 큰 값을 나타내는 성향을 얻었는데 이를 Hurst 現象이라 한다. 그리고  $R^*(n)$ 의 平均은  $n \rightarrow \infty$ 일 때

$$E[R^*(n)] = 1.25n^{0.5}$$

正規獨立時系列에서는

$$E[R^*(n)] = \left( \frac{n\pi}{2} \right)^{0.5} \cdot \sigma$$

여기서  $\sigma$ 는 母集團의 標準偏差이며  $n \rightarrow \infty$ 일 때  $H$ 는 0.5에 접근함을 증명할 수 있다. Mandelbrot와 Van Ness(1968)<sup>15)31)</sup>는 有限相關過程(finite memory process)에서  $H$ 는 점진적으로 0.5가 된다고 하였으나 遷移舉動(transient behavior)때문에  $H=0.5$ 에서 다소 벗어날 수도 있음을 밝혔다. 따라서 水文時系列에서의 Hurst 現象은 長期間 年時系列을 이용한 Hurst의 研究에서 볼 때 遷移舉動때문에  $H=0.5$ 가 된다고는 단정할 수 없다.

統計學的으로 Hurst 現象에 대한 精確한 이유는 알 수 없으나 다음 3가지 이유를 들 수 있다. 첫째는 母集團의  $R(n)$  값을 檢證할 수 있는 時系列의 不充分으로 인하여 Hurst 現象은 遷移舉動이라는 것이고, 둘째는 時間에 따라 平均이 변하는 非定常時系列이기 때문이며, 셋째는 定常系列의 相關函數는 AR 過程보다 完단하게 감소하므로 長期間 相關을 갖는 定常過程때문이라는 것이다.

### 2.2 FFGN 模型

FFGN 模型은 高周波數項(high frequency term)과 低周波數項(low frequency term)의 두 Markov 과정으로 이루어졌다. 高周波數項  $X_H(t, H)$ 는 平均 0, 分散  $\sigma_h^2$ 인 1次 Markov 과정이고 低周波數項  $X_L(t, H)$ 는 平均 0, 分散 1인 1次 Markov 과정으로 다음과 같이 나타낸다.

$$X(t, H) = X_H(t, H) + X_L(t, H) \quad (2.9)$$

$$= \rho_h X_h(t-1) + \sigma_h (1 - \rho_h^2)^{\frac{1}{2}} \epsilon_t + \sum_{j=1}^{N(T)} W_j [\rho_j X_j(t-1) + (1 - \rho_j^2)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{tj}] \quad (2.10)$$

여기서

$$W_j^2 = \frac{H(2H-1)(B^{1-H} - B^{-1+H})}{\Gamma(3-2H)} B^{-2(1-H) \cdot j}$$

$$\rho_j = \text{EXP}(-B^{-j})$$

$$\rho_h = 2^{2H-1} - 1 + \sum_{j=1}^{N(T)} W_j(1 - \rho_j)$$

$$\frac{B^{-(1-H)} H(2H-1)}{\Gamma(3-2H)}$$

$H$ =Hurst 係數,  $0.5 < H \leq 1$

$N(T) = \lceil \log(Q \cdot T) / \log(B) \rceil$

$T$ =發生하고자 하는 標本의 크기

$B$ =Base

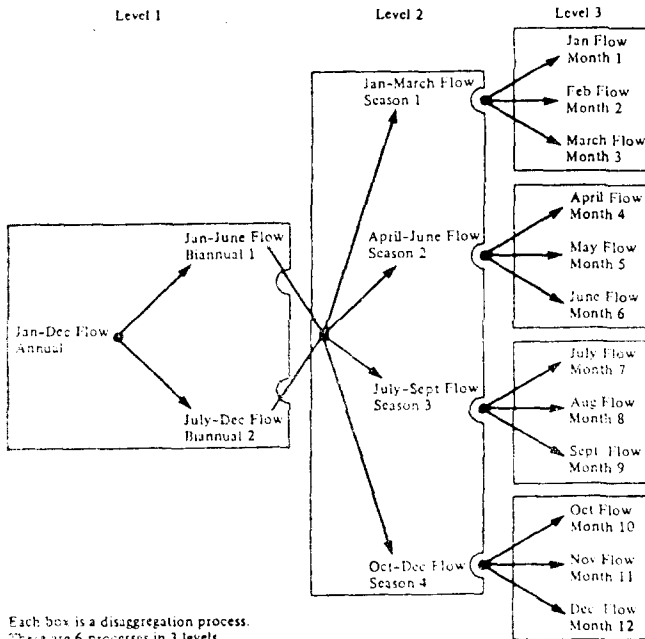
$Q$ =Quality 要素

$\Gamma$ =Gamma 函數

$B, Q$ 의 값들은 Mandelbrot(1971)<sup>17)</sup>의 研究에서  $B=2, 3, 4$  그리고  $Q=4, 5, 6$ 이 좋은 결과를 나타내는 것으로 밝혀졌으며 일반적으로  $B=3, Q=6$ 의 값이 많이 이용된다. 한편 Hurst 係數  $H$ 는  $0.729 \pm 0.28$ 에서 경험적으로 결정된다. 變量  $X(t, H)$ 는 平均 0, 分散 1을 가지며  $\epsilon_t$ 는 平均 0, 分散 1인 亂數(Random number)이다.<sup>10)</sup>

### 2.3 分解模型

分解模型은 年과 같은 長期間을 年보다 작은 短期間으로 分解할 수 있는 模型으로 제안됐으며 그 分解過程은 그림 2.3과 같고 1단계 또는 2, 3 단계의 分解過程을 통하여 月流量을 얻을 수 있다. Valencia와 Schaake(1973)<sup>18)</sup>의 分解



Each box is a disaggregation process. There are 6 processes in 3 levels.

그림 2.3 分解 模型의 分解圖<sup>7)</sup>

模型은 分解된 短期間資料系列의 마지막 短期間과 다음해의 첫 短期間과의 相關性이 좋지 않은 단점이 나타나 Mejia와 Rousselle(1976)<sup>19)</sup>, Lane(1979)<sup>22)</sup>, Hoshi와 Burges(1979)<sup>28)</sup>, Stedinger와 Vogel(1984)<sup>23)</sup> 등이 개선된 模型들을 제안하였다.

分解模型은 長期間을 短期間으로 分解하는 時間性模型(temporal model)과 本流의 流量을 支流의 流量으로 分解하는 空間性模型(spatial model)으로 구분되며 本 研究에서는 運營上 큰 제약이 없는 Valencia와 Schaake<sup>18)</sup>가 제안한 模型(basic model)인 2地點, 즉 多變量分解模型을 적용하였다.

#### 2.3.1 基本模型

$n$ 地點의 年流量을  $m$ 季節(月)流量으로 分解할 때 각 季節間의 相關性이 잘 재현되어야 하며 季節流量의 和이 年流量과 같아야 한다. 이때 年流量은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

그리고  $n$ 地點에서의  $m$ 季節(月)流量은 다음과 같다.

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

여기서  $y_{ij}$ 의  $i$ 는 季節,  $j$ 는 地點을 표시한다.  $m$ 季節의 和이 年流量과 같아야 하므로

$$x_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} \quad (2.13)$$

또는  $X=CY$ 이다.

여기서

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$m$

分解模型은 다음과 같은 線型方程式으로 표시 된다.

$$Y=AX+B\varepsilon_t \quad (2.14)$$

여기서  $Y$ 는 平均 0인 ( $nm \times 1$ ) 月流量벡터  
 $X$ 는 平均 0인 ( $n \times 1$ ) 年流量벡터  
 $A$ 는 ( $nm \times 1$ ) 媒介變數벡터  
 $B$ 는 ( $nm \times nm$ ) 媒介變數벡터  
 $\varepsilon_t$ 는 平均 0, 分散 1인 ( $nm \times 1$ ) 亂數 벡터

本 研究에서 적용한 二地點分解模型(two sites disaggregation model)은 식(2.14)를 벡터항으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{121} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{131} & a_{132} \\ a_{141} & a_{142} \\ \vdots & \vdots \\ a_{241} & a_{242} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{124} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{224} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{121} & b_{122} & \dots & b_{1224} \\ b_{131} & b_{132} & \dots & b_{1324} \\ b_{141} & b_{142} & \dots & b_{1424} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{241} & b_{242} & \dots & b_{2424} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{141} \\ \vdots \\ \varepsilon_{241} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

여기서  $y$ 는 分解되는 月流量이 되며  $x$ 는 年流量이고  $a$ 와  $b$ 는 實測 流量資料에서 推定해야 하는 媒介變數이며  $\varepsilon$ 는  $N(0, 1)$ 인 亂數이다.

### 2.3.2 媒介變數의 推定

식(2.14)에서 媒介變數  $A$ 와  $B$ 는 다음과 같다.

$$A=S_{yx} \cdot S_{xx}^{-1} \quad (2.16)$$

$$BB^T=S_{yy}-S_{yx} \cdot S_{xx}^{-1} \cdot S_{xy} =S_{yy}-A \cdot S_{xy} \quad (2.17)$$

식(2.15)에 적용하기 위해 식(2.16), (2.17)의 각 항을 共分散行列로 표시하면

$$S_{xx}=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^i & x_2^i \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$S_{yx}=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} y_{11}^i \\ \vdots \\ y_{121}^i \\ y_{12}^i \\ \vdots \\ y_{122}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^i & x_2^i \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$S_{yy}=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} y_{11}^i \\ \vdots \\ y_{121}^i \\ y_{12}^i \\ \vdots \\ y_{122}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11}^i \dots y_{121}^i y_{12}^i \dots y_{122}^i \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$S_{xy}=\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} y_{11}^i \\ \vdots \\ y_{121}^i \\ y_{12}^i \\ \vdots \\ y_{122}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^i & x_2^i \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

여기서  $N$ 는 資料의 記錄年數이며  $x$ 와  $y$ 는 각각의 資料에서 平均을 빼서 변환시킨 資料系列이다.

媒介變數  $A$ 는 식(2.18), (2.19)의 계산으로 직접적으로 얻을 수 있으나  $B$ 의 要素는 媒介變數  $B$ 와  $B^T$ 를 給한 값으로 推定하게 된다. Young과 Pisano(1968)<sup>24)</sup>은  $B$ 를 Lower triangular 行列로 假定하여  $B$ 의 要素를 推定하였으며 Graybill(1969)<sup>6)33)</sup>, Lane(1979)<sup>7)32)</sup> 등이 제안한 방법들이 있다.

식(2.17)를 다음과 같이 變형하면

$$BB^T=D=S_{yy}-S_{yx} \cdot S_{xx}^{-1} \cdot S_{xy} \quad (2.22)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{m1} \\ 0 & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix} =S_{yy}-S_{yx} \cdot S_{xx}^{-1} \cdot S_{xy} \quad (2.24)$$

여기서  $m$ 은 季節數에 地點數를 곱한 값이다. 식(2.22), (2.23), (2.24)를 이용하여 Graybill (1969)<sup>6)7)33)</sup>는  $B$ 가 Lower triangular 行列이고  $D$ 의 行列式  $|D| > 0$  일 경우 다음과 같이  $B$ 의 要素를 구했다.

$$b_{ij} = d_{ji} / b_{jj}, \quad j=1, i=1, \dots, m \quad (2.25)$$

$$b_{ij} = \left[ d_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} (b_{jk})^2 \right]^{1/2}, \quad j=2, \dots, m, i=j$$

$$b_{ij} = \left[ d_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} b_{ik} \right] / b_{jj}, \quad j=2, \dots, m-1, i=j+1, \dots, m \quad (2.26)$$

$$m-1, i=j+1, \dots, m \quad (2.27)$$

反面에 Lane(1979)<sup>6)7)32)</sup>은  $|D| > 0$  또는  $|D| \geq 0$ 인 경우 다음과 같은 식을 제안했다.

$$b_{ki} = 0, \quad k < i \quad (2.28)$$

$$b_{ki} = 0, \quad k \geq i, \quad d_{ii} - \sum_{j < i} (b_{ij})^2 \leq 0 \quad (2.29)$$

$$b_{ki} = \frac{d_{ki} - \sum_{j < i} b_{ij} b_{kj}}{\left[ d_{ii} - \sum_{j < i} (b_{ij})^2 \right]^{1/2}}, \quad k > i, \quad d_{ii} - \sum_{j < i} (b_{ij})^2 > 0 \quad (2.30)$$

$B$ 의 要素를 推定하기 위해서는 항상  $|D| \geq 0$  이어야하나 컴퓨터의 實行誤差로 인하여 逆行列을 가지지 않는 行列(singular matrix) 즉  $|D| < 0$ 인 결과를 얻을 수 있는 데 식(2.29)는 이를 解決해 주며 媒介變數推定에는 Double Precision를 사용하는 것이 좋다. 위 方法으로 推定한 媒介變數  $A$ 와  $B$ 를 이용하여 年流量을 分解한 後에 식(2.13)를 만족해야 하므로 다음과 같은  $A$ 와  $B$ 의 特性이 있다.

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} = 1, \quad i=1, 2 \quad (2.31)$$

$$\sum_{j=1}^m b_{ji} = 0, \quad i=1, \dots, m$$

### 2.4 Matalas 模型

$n$  地點의 月流量模擬發生을 위해 적용할 AR系 Matalas 模型<sup>11)</sup>의 基本式은 다음과 같다.

$$Y_t = AY_{t-1} + B\varepsilon_t \quad (2.32)$$

여기서  $Y_t$ 와  $Y_{t-1}$ 은 月流量資料를 변환한 平均 0인 ( $n \times 1$ ) 벡터이고  $\varepsilon_t$ 는  $Y_t$ 와 獨立인 無作偽變量으로서 平均 0, 分散 1인 ( $n \times 1$ ) 벡터이고  $A$ 와  $B$ 는 媒介變數로서 ( $n \times n$ ) 벡터이다.

二地點 Matalas 模型은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^{(1)} \\ y_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \varepsilon_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$(2.33)$$

여기서 ( )는 地點을 나타낸다.

$$A = M_1 M_0^{-1} \quad (2.34)$$

$$BB^T = M_0 - M_1 M_0^{-1} M_1^T = M_0 - AM_1^T \quad (2.35)$$

식(2.33)를 적용하기 위해 식(2.34), (2.35)의  $M_0, M_1, M_1^T$ 를 共分散行列로 표시하면

$$M_0 = E[Y_t Y_t^T] = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$M_1 = E[Y_t Y_{t-1}^T] = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^{(1)} & y_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$M_1^T = E[Y_{t-1} Y_t^T] = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} y_{t-1}^{(1)} \\ y_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

여기서  $N$ 는 記錄年數이고  $y$ 는 平均 0인 변환된 資料系列이다.

## 3. 分析 및 結果

本 研究에서는 洛東江流域의 倭館과 津洞 二地點을 선정하여 20年間(1963~1980)의 月流量資料를 이용해 100年間의 年, 月流量을 正規分布로 模擬發生하여 (一)流量은 0로 하고 研究한 過程은 다음과 같다.

### 3.1 FFGN 模型에 의한 年流量發生

FFGN 模型의 식(2.9), (2.10)의 媒介變數인 Hurst 係數  $H$ 를 식(2.8)를 이용하여 年, 月流量資料로부터 推定한 結果 推定値가  $0.5 < H < 1$ 인 값을 얻었으며  $B$ 와  $Q$ 를 일반적으로 사용되는 3, 6을 적용하여 얻은 結果는 表 3.1, 3.2와 같다.

<表 3.1> 月流量에서 推定한  $H$  값 적용 (單位: CMS)

| 特性值        | 倭 館( $H=0.63$ ) |           | 津 洞( $H=0.56$ ) |           |
|------------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
|            | Historical      | FFGN      | Historical      | FFGN      |
| 平均         | 52,782.25       | 50,743.10 | 127584.37       | 127900.31 |
| 標準偏差       | 19,017.21       | 19,388.88 | 45,634.43       | 45,739.94 |
| 歪曲係數       | 0.31            | 0.15      | 0.12            | -0.12     |
| $\gamma_1$ | 0.191           | 0.395     | 0.159           | 0.027     |

〈표 3.2〉 年流量에서 推定한 H값 적용 (單位: CMS)

| 地點<br>模型       | 倭 館(H=0.76) |           | 津 洞(H=0.57) |           |
|----------------|-------------|-----------|-------------|-----------|
|                | Historical  | FFGN      | Historical  | FFGN      |
| 特性值            |             |           |             |           |
| 平均             | 52,782.25   | 48,669.46 | 127584.37   | 128669.31 |
| 標準偏差           | 19,017.21   | 19,600.79 | 45,634.43   | 45,648.55 |
| 歪曲係數           | 0.13        | 0.18      | 0.12        | -0.12     |
| r <sub>1</sub> | 0.191       | 0.559     | 0.159       | 0.045     |

3.2 分解模型과 Matalas 模型으로 發生된 月流量의 統計學的 特性值 比較分析

식(2.10)으로 倭館과 津洞의 年流量을 各々 模擬發生하고 二地點 分解模型인 식(2.15)를 적용하여 分解한 月流量과 二地點 Matalas 模型의 식(2.33)으로 發生한 月流量과의 統計學的 特性值를 實測值와 比較하여 表 3.3, 3.4에 나타냈다.

表 3.3에서 倭館地點의 경우 Matalas 模型의 平均値는 0~17.3%, 標準偏差는 0~23.1%의 相對誤差를 나타내고 있고, 分解模型의 경우 平均値는 0~18.33%, 標準偏差는 0~26.24%의 相對誤差를 나타내고 있다. 表 3.4의 津洞地點에서는 Matalas 模型의 平均値는 0~15.7%, 標準偏差는 0~19.3%의 相對誤差를 보이며 分解模型의 경우는 平均値 0~16.44%, 標準偏差 0~21.12%의 誤差를 보여준다. 二模型 모두 倭館과 津洞의 月別 平均値는 95% 信賴區間에서의 값을 나타내고 있으며 歪曲度係數는 實測資料의 歪曲度를 고려하지 않고 標準正規分布를 가지는 亂數(random number)를 이용하였기 때문에 實測資料와 차이를 보이고 있다.

3.3 Correlogram의 分析<sup>12)</sup>

模擬發生한 月流量과 實測資料의 系列相關係數를 求解 圖示하여 그림 3.1, 3.2에 나타냈다. 그림에서 보는 바와 같이 二지점 모두 12個月을 周期로 동일한 波形을 이루고 있어 季節成分이 나타나 있고 流量系列이 非正常系列임을 알 수 있다. 따라서 二模型 모두 季節成分을 만족스럽게 模擬發生할 수 있음을 알 수 있다. 資料의 持續性을 알아보기 위해 資料를 標準化하여

〈表 3.3〉 倭館의 實測資料와 模擬發生된 月流量의 統計學的 特性 (單位: CMS)

| 月  | 模型         | 特性值              | 平均               | 標準偏差   | 歪曲係數 |
|----|------------|------------------|------------------|--------|------|
| 1  | Historical | 1159.97          | 1143.485         | 3.384  |      |
|    | Matalas    | 1226.68 (5.75)   | 908.981 (20.51)  | 0.408  |      |
|    | 分解模型       | 1321.35 (13.91)  | 1362.363 (7.1)   | 0.223  |      |
| 2  | Historical | 1347.71          | 1020.579         | 1.777  |      |
|    | Matalas    | 1404.21 (4.19)   | 937.623 (8.13)   | 0.432  |      |
|    | 分解模型       | 1530.39 (13.55)  | 1031.881 (1.11)  | 0.345  |      |
| 3  | Historical | 2534.99          | 2780.078         | 2.921  |      |
|    | Matalas    | 2847.29 (13.31)  | 2375.395 (14.56) | 0.457  |      |
|    | 分解模型       | 2999.57 (18.33)  | 2295.634 (17.42) | 0.663  |      |
| 4  | Historical | 4617.66          | 4671.367         | 1.104  |      |
|    | Matalas    | 4609.16 (0.00)   | 3592.272 (23.10) | 0.412  |      |
|    | 分解模型       | 4987.09 (8.00)   | 4893.460 (4.75)  | 0.958  |      |
| 5  | Historical | 3761.79          | 3205.151         | 1.104  |      |
|    | Matalas    | 4125.63 (9.66)   | 2819.774 (12.04) | 0.412  |      |
|    | 分解模型       | 4285.04 (13.91)  | 4446.375 (25.24) | 0.893  |      |
| 6  | Historical | 2585.79          | 2570.581         | 2.096  |      |
|    | Matalas    | 2832.42 (9.56)   | 2285.514 (11.26) | 0.636  |      |
|    | 分解模型       | 2592.15 (0.00)   | 2255.651 (12.45) | 0.902  |      |
| 7  | Historical | 13515.98         | 9403.132         | 0.675  |      |
|    | Matalas    | 15659.80 (17.34) | 8999.535 (6.13)  | 0.052  |      |
|    | 分解模型       | 12804.95 (5.26)  | 8114.594 (18.96) | 0.050  |      |
| 8  | Historical | 10178.19         | 6375.086         | 0.923  |      |
|    | Matalas    | 10682.84 (5.90)  | 6812.102 (3.60)  | 0.549  |      |
|    | 分解模型       | 10766.31 (0.82)  | 6377.633 (0.00)  | 0.291  |      |
| 9  | Historical | 8064.05          | 6206.755         | 1.100  |      |
|    | Matalas    | 8939.11 (10.85)  | 5881.254 (3.38)  | 0.443  |      |
|    | 分解模型       | 7331.44 (9.06)   | 4906.243 (19.14) | 0.489  |      |
| 10 | Historical | 2203.37          | 1681.128         | 0.694  |      |
|    | Matalas    | 2292.18 (4.94)   | 1026.125 (5.60)  | -0.084 |      |
|    | 分解模型       | 2276.73 (3.31)   | 1073.967 (3.99)  | 0.105  |      |
| 11 | Historical | 1655.66          | 1142.911         | 1.749  |      |
|    | Matalas    | 1678.01 (0.01)   | 777.293 (11.14)  | -0.405 |      |
|    | 分解模型       | 1765.16 (6.00)   | 1077.371 (1.81)  | 0.096  |      |
| 12 | Historical | 1277.36          | 527.636          | -0.046 |      |
|    | Matalas    | 1215.16 (2.57)   | 724.992 (1.99)   | -0.315 |      |
|    | 分解模型       | 1259.04 (0.91)   | 590.966 (1.15)   | -0.016 |      |

\* ( ) : 相對誤差(%)

〈表 3.4〉 津洞의 實測資料와 模擬發生된 月流量의 統計學的 特性 (單位: CMS)

| 月  | 模型         | 特性值              | 平均                | 標準偏差   | 歪曲係數 |
|----|------------|------------------|-------------------|--------|------|
| 1  | Historical | 2475.78          | 1629.399          | 2.732  |      |
|    | Matalas    | 2641.03 (6.71)   | 1424.464 (12.48)  | 0.033  |      |
|    | 分解模型       | 2521.12 (3.65)   | 1547.048 (1.92)   | 0.351  |      |
| 2  | Historical | 3989.02          | 2077.231          | 1.387  |      |
|    | Matalas    | 3034.30 (1.78)   | 1924.216 (7.10)   | 0.431  |      |
|    | 分解模型       | 3287.78 (6.41)   | 1892.996 (8.64)   | 0.771  |      |
| 3  | Historical | 5605.30          | 6334.15           | 3.719  |      |
|    | Matalas    | 5885.11 (6.99)   | 5749.909 (11.33)  | 0.843  |      |
|    | 分解模型       | 6410.27 (16.44)  | 5232.366 (21.12)  | 0.771  |      |
| 4  | Historical | 9946.53          | 7944.176          | 1.230  |      |
|    | Matalas    | 9320.00 (6.29)   | 6402.932 (19.31)  | 0.321  |      |
|    | 分解模型       | 10019.08 (0.01)  | 8275.241 (1.91)   | 0.579  |      |
| 5  | Historical | 8740.55          | 6505.534          | 0.695  |      |
|    | Matalas    | 9309.82 (6.41)   | 5772.227 (11.27)  | 0.381  |      |
|    | 分解模型       | 9317.89 (6.95)   | 7741.799 (19.95)  | 0.571  |      |
| 6  | Historical | 6812.79          | 7694.626          | 2.385  |      |
|    | Matalas    | 7642.80 (12.18)  | 6374.731 (13.16)  | 0.546  |      |
|    | 分解模型       | 6526.42 (2.73)   | 5903.118 (10.81)  | 0.930  |      |
| 7  | Historical | 32011.83         | 25831.00          | 1.042  |      |
|    | Matalas    | 37074.50 (15.73) | 23754.281 (1.55)  | 0.124  |      |
|    | 分解模型       | 32239.42 (0.07)  | 23100.507 (2.84)  | 0.373  |      |
| 8  | Historical | 25533.41         | 15605.673         | 0.476  |      |
|    | Matalas    | 28509.29 (3.36)  | 17169.296 (6.25)  | 0.088  |      |
|    | 分解模型       | 28420.63 (10.87) | 16847.213 (6.51)  | 0.172  |      |
| 9  | Historical | 20390.55         | 16345.698         | 1.275  |      |
|    | Matalas    | 22389.79 (9.80)  | 14163.365 (11.51) | 0.216  |      |
|    | 分解模型       | 20310.77 (0.91)  | 15327.130 (6.98)  | 0.417  |      |
| 10 | Historical | 5934.11          | 2631.721          | 0.237  |      |
|    | Matalas    | 6070.45 (1.45)   | 3127.297 (11.96)  | 0.388  |      |
|    | 分解模型       | 6025.25 (0.09)   | 2978.121 (1.82)   | 0.161  |      |
| 11 | Historical | 4127.53          | 2321.140          | 1.637  |      |
|    | Matalas    | 4174.25 (1.20)   | 2396.902 (11.20)  | 0.169  |      |
|    | 分解模型       | 4170.25 (1.87)   | 2610.541 (13.82)  | 0.438  |      |
| 12 | Historical | 2910.19          | 1124.82           | 0.166  |      |
|    | Matalas    | 2703.18 (2.89)   | 1032.523 (8.01)   | -0.166 |      |
|    | 分解模型       | 2788.25 (1.03)   | 1167.27 (2.38)    | 0.303  |      |

\* ( ) : 相對誤差(%)

季節成分를 除去하고 구한 倭館과 津洞의 Correlogram은 그림 3.3, 3.4에 나타났다. 實測流量에서 95%의 信賴限界值를 구하여 比較했을 때 두 지점 모두 實測資料와 分解模型은  $\gamma_1$  값이 信

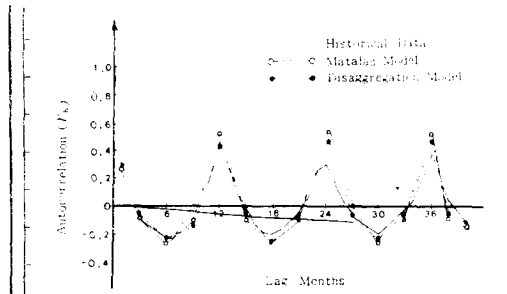


圖 3.1. Correlograms for Monthly Streamflow at Wackwan

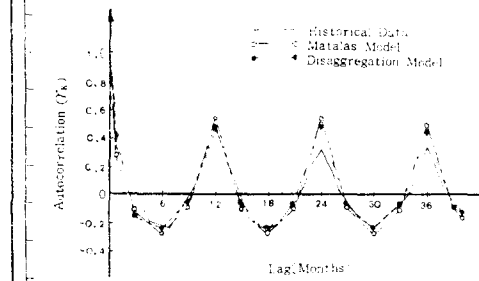


圖 3.2. Correlograms for Monthly Streamflow at Jubbong

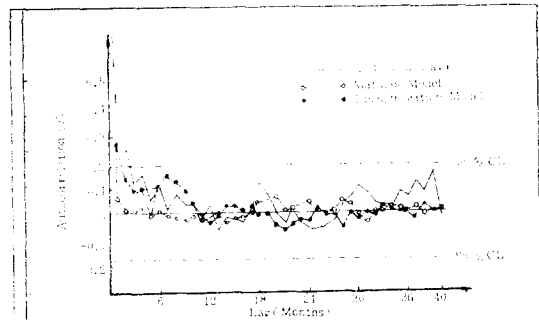


圖 3.3. Correlograms for Standardized Monthly Streamflow at Wackwan

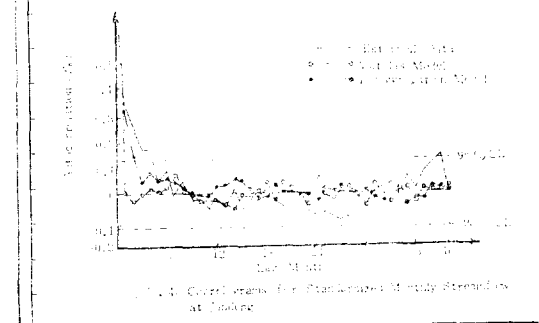


圖 3.4. Correlograms for Standardized Monthly Streamflow at Jubbong

〈表 3.5〉 Hurst 係數  $H$

| 標本 크기 | 倭 館        |         |       | 津 洞        |         |       |
|-------|------------|---------|-------|------------|---------|-------|
|       | Historical | Matalas | 분해 모델 | Historical | Matalas | 분해 모델 |
| 4     | 0.08       | 0.82    | 0.76  | 0.80       | 0.77    | 0.78  |
| 5     | 0.80       | 0.82    | 0.69  | 0.86       | 0.80    | 0.76  |
| 7     | 0.68       | 0.76    | 0.70  | 0.77       | 0.77    | 0.76  |
| 10    | 0.72       | 0.79    | 0.76  | 0.78       | 0.80    | 0.82  |
| 20    | 0.69       | 0.67    | 0.68  | 0.70       | 0.68    | 0.73  |
| 40    | 0.66       | 0.63    | 0.63  | 0.67       | 0.61    | 0.66  |
| 70    | 0.63       | 0.59    | 0.59  | 0.64       | 0.59    | 0.62  |
| 100   | 0.62       | 0.57    | 0.62  | 0.63       | 0.57    | 0.62  |
| 200   | 0.59       | 0.54    | 0.60  | 0.59       | 0.54    | 0.62  |
| 400   | —          | 0.53    | 0.60  | —          | 0.51    | 0.62  |
| 700   | —          | 0.52    | 0.59  | —          | 0.52    | 0.63  |
| 1000  | —          | 0.52    | 0.61  | —          | 0.53    | 0.64  |

賴限界值를 크게 벗어나 강한 持續性을 보이고 있는 반면 Matalas 模型은 限界值內에 있어 弱한 持續性을 나타내고 있다.

### 3.4 Hurst 係數의 分析

實測 月流量과 模擬發生한 月流量을 식(2.1) ~ (2.8)을 이용하여 Range 分析을 한 후 推定된 Hurst 係數는 表 3.5와 같다. 이들 결과는 月流量으로 부터 標本을 추출하여 구한 Hurst 係數의 平均值로서 標本數가 증가함에 따라 0.5에 접근하는 Hurst 現象을 재현해 주고 있으며 標本數가 적을 때는 Matalas 模型이 증가할수록 分解模型이 實測值와 더 가까운 결과를 얻었으며 分解模型의 경우가 Matalas 模型의 경우보다 완만하게 Hurst 係數가 감소함을 보여준다.

## 4. 結 論

本 研究에서는 長期間 統計學的 特性值를 재현해 주는 FFGN 模型의 媒介變數인  $H$ 를 實測資料로부터 推定한 값의 적용여부를 檢討하였으며  $H$ 의 推定值를 이용하여 年流量을 模擬發生하고 月流量으로 분해할 수 있는 分解模型과 短期模型인 Matalas 模型을 倭館과 津洞의 二地點에 적용하여 얻은 결과의 分析으로 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 月流量은 Range 分析에서 Hurst 現象을 재현해 주고 있어서 FFGN 模型에 필요한 媒介變



數  $H$  값은 年流量資料가 짧을 때는 月流量資料로 부터 구한 推定值를 적용해도 무리가 없다고 사료된다.

(2) 模擬發生된 月流量의 統計學的 特性值를 잘 재현해주고 있어 적용된 두 模型은 河川流量 模擬發生에 有用하다고 본다.

(3) 模擬發生한 月流量의 Correlogram 은 實測資料와 같이 뚜렷한 季節成分을 두 模型 모두 잘 나타내고 있으나 標準化된 資料의 Correlogram 에서는 Matalas 模型보다 分解模型에 의한 結果가 實測資料와 같이 강한 持續性을 보여 長期間 相關(long-term correlation)을 가짐을 알 수 있는 반면 Matalas 模型은 弱한 持續性을 나타내 短期間 相關(short-term correlation)을 보여 준다.

(4) Range 分析結果 FFGN 模型과 결합하여 月流量으로 分解한 分解模型이 Matalas 模型보다 Hurst 係數가 完滿하게 감소하는 것으로 보아 長期間 持續性이 있음을 보여 준다.

(5) (1)~(4)의 結果로 보아 長期模型과 短期模型의 선택은 模擬發生 目的이 資料의 模擬發生 또는 豫報, 模擬發生하고자 하는 資料사이의 時間間隔, 長期 또는 短期持續性 등 각각의 필요성과 용도에 따라서 할 수 있다고 본다.

參 考 文 獻

- 1) 崔榮博, 尹龍男, 確率의 基礎概念, 형설출판사, 1982.
- 2) 尹龍男, 工業水文學, 청문각, 1986.
- 3) 徐炳夏, 尹龍男, 姜瑄沅(1979). Bivariate Analysis 에 의한 月流量의 模擬發生에 關한 研究, 韓國水文學會誌, 제12권 제 2 호.
- 4) Haan, C.T. (1977), *Statistical Method in Hydrology*, Iowa State University Press, Ames.
- 5) Kottegoda, N.T. (1980), *Stochastic Water Resource Technology*, The Mcmillan Press Ltd.
- 6) Salas, J.D., Dulleur, J.W., Yevjevich, V. and Lane, W. I. (1980), *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*, Water Resource Publication.
- 7) Bras, R.L. Rodriguez-Itube, I. (1985), *Random Functions and Hydrology*, Addison-Wesley Pub-

- lishing Company.
- 8) Clarke, R. T. (1973), *Mathematical Models in Hydrology*, Rome, Italy: Food and Agriculture Organization of the United Nations.
- 9) Haan, C.T. Johnson, H. P. Brakensiek, D. L. (1982), *Hydrological Modeling of Small Watersheds*, An ASAE Monograph Number 5 in a series published by ASAE: 19~73.
- 10) Ciriani, T. A, Maione, V., Wallis, J.R. (1977), *Mathematical Models for Surface water Hydrology*, John Wiley & Sons.
- 11) Matalas, N.C. (1967), "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology", *Water Resources Res.* 3(4):937~46.
- 12) Salas, J.D., Boes, D.C., Yevjevich, V., Pergam, G.G.S. (1979), "Hurst Phenomenon as a Pre-asymptotic Behavior", *J. Hydrology*, 44:1~15.
- 13) Mandelbrot, B. B., and Wallis, J.R. (1968), "Noah, Joseph, and Operational Hydrology", *Water Resources Res.* 4(5):909-18.
- 14) Idem(1969a), "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises, Part 1: Averages and Variances". *Water Resources Res.* 5(1):228~41.
- 15) Idem(1969b), "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises, Part 2: Rescaled Ranges and Spectra", *Water Resources Res.* 5(1):260~7.
- 16) Idem(1969c), "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises, Part 3: Mathematical Appendix", *Water Resources Res.* 5(1):260~7.
- 17) Mandelbrot, B. B. (1971), "A Fast Fractional Gaussian Noise Generator", *Water Resources Res.* 7(3):543~53.
- 18) Valencia, D., and J.C. Schaake, Jr., (1973), "Disaggregation Processes in Stochastic Hydrology", *Water Resources Res.* 9(3):580~5.
- 19) Mejia, J. M., Rouselle, J. (1976), "Disaggregation Models in Hydrology Revisited", *Water Resources Res.* 12(2):185-6.
- 20) Matalas, N.C. (1967), "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology," *Water Resources Res.* 3(4):937~46.
- 21) R. Srikanthan, T. A., McMahon, (1978), "Comparison of fast fractional gaussian noise and

- broken line models for generating annual flows*", J. of hydrology, 38, 81~92.
- 22) Stedinger, J.R., Lettenmaier, D.P., Vogel, R. M. (1985), "*Multisite ARMA (1, 1) and disaggregation models for annual streamflow generation*", Water Resources. Res., 21(4), 497~509.
- 23) Stedinger, J. R., Vogel, R. M. (1984), "*Disaggregation produces for generating serially correlated flow vectors*", Water Resources. Res., 20 (1), 47~56.
- 24) Young, G.K., and Pisano, W.C. (1968), "*Operational Hydrology Using Residuals*". A. S. C. E. J. Hydraulics, 94 (HY4):909~24.
- 25) Chi, M., Neal, E. and Young, G. K. (1973), "*Practical application of fractional Brownian motion and noise to synthetic hydrology*", Water Resources. Res., 9(6), 1523~1533.
- 26) Ezio Todini(1980), "*The preservation of skewness in linear disaggregation Schemes*", J. of hydrology. 47, 199~214.
- 27) Ballerini, R., Boes, D. C., (1985), "*Hurst behavior of shifting level processes*", Water Resources. Res., 21(11), 1642~1648.
- 28) Hoshi, K. and Burges, S. J., (1979), "*Disaggregation of streamflow volumes*", Jour. of the Hydr. Div., ASCE, 105, HY1, pp.27~41.
- 29) Hurst, H.E., (1951), "*Long-term storage capacity of reservoirs (with discussion)*", Trans. Am. Soc. Civ. Eng., 116, paper 2447, 770~808.
- 30) Hurst, H. E., Black, R. P., Simaika, Y. M., (1964), *Long-term Storage, An Experimental Study*, Constable, London.
- 31) Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W. (1968), "*Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*", Soc. Ind. Appl. Math. Rev., 10, 422~37.
- 32) Lane, W.L. (1979), *Applied stochastic techniques. (LAST computer package)*, user manual. Division of Planning Technical Services, Bureau of Reclamation, Denver, Colorado, December.
- 33) Graybill, F.A. (1969), *Introduction to Matrices with Applications in Statistics*, Wadsworth Publishing Co., California.