

# 兩端固定 Prime과 Quadratic 拋物線아치의 面內挫屈에 관한 研究

## In-Plane Buckling of Prime and Quadratic Parabolic Arches with Fixed Ends

李 炳 求\* · 金 鍾 萬\*\*

Lee, Byoung Koo · Kim, Jong Man

### Summary

A numerical procedure for the analysis of slender arch buckling problems for uniform dead weight is presented in this paper. Such loading changes in the arch profile. The problem is nonlinear. The numerical procedure is limited to an inextensible analysis and to elastic behavior.

Based upon a numerical integration technique developed by Newmark for straight beams, a large deflection bending analysis is combined with small deflection buckling routines to formulate the numerical procedure. The numerical procedure is composed of a combination of the numerical integration and successive approximations procedure.

The results obtained in this study are as follows :

1. The critical loads obtained in this study coincide with the results by Austin so that the algorithm developed in this study is verified.
2. The numerical results are converged with good precision when the half arch is divided into 10 segments in both Prime and Quadratic section.
3. The critical loads are decreased as the ratios of rise versus span are increased.
4. The critical loads are increased as the moments of inertia at the ends are increased.
5. The critical loads of Prime section are larger than that of Quadratic section under the same profile conditions.

### I. 序 論

20世紀初부터 發展하기 始作한 鋼材의 壓延技術로 支間이 긴 아치構造를 施工할 수 있게 됨에 따라 아치構造를 架設할 때 荷重과 變形사이

의 非線形性을 考慮한 아치構造의 挫屈에 대한 安定性 檢討가 要請된다 8).

따라서 材料를 節約할 수 있는 長點을 考慮하여 研究對象의 아치構造를 1次元과 2次元 變化斷面을 갖는 兩端固定 拋物線아치로 擇하고, 다음과 같은 基本假定 아래 研究를 進行하였다.

\* 圓光大學校 工科大學

\*\* 圓光大學校 工業技術開發研究所

(1) 아치의 兩端은 同一한 標高를 갖는다.

(2) 滿載等分荷重만이 作用한다.

(3) 모든 變形은 Hooke의 法則에 따른다.

또한 對稱荷重을 받는 경우 挫屈모드는 對稱挫屈모드와 逆對稱挫屈모드가 있으나 많은 研究論文에서 볼 수 있듯이 逆對稱挫屈모드의 臨界荷重이 對稱挫屈모드의 臨界荷重보다 작은 값이기 (1, 2, 3, 4, 10) 때문에 本論文의 挫屈모드는 逆對稱挫屈모드로 假定하고 理論을 展開하였다.

그리고 arch構造를 작은 等價弧길이로 分割하고 半아치系에 대해 逐差近似法을 兼한 數值積分法<sup>7)</sup>을 混用하여 解析하였다.

## II. 非線形 힘모멘트 解析

### 1. 基礎理論

初期아치의 任意的 節點에 대한 曲率은 다음과 같다<sup>9)</sup>.

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_0} \dots\dots\dots (1)$$

여기서 S는 弧길이, R<sub>0</sub>는 荷重을 받기 전의 初期曲率半徑이다. 그런데 荷重을 받게 되면 힘모멘트 影響에 의해 dθ/ds에 變化가 發生하여 (1) 式은 다음과 같이 바뀐다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_0} - \frac{M}{EI} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)에서 曲率變化 (M/EI)는 斷面變化和 直接의 인 關係를 갖기 때문에 다음 節에서 說明할 斷面2次모멘트 (I)를 考慮해야 한다.

이 曲率變化는 arch變形에 큰 영향을 주며, Fig. 1과 Fig. 2에서 처럼 初期 弦의 길이와 各 節點에서 接線과 弦이 이루는 角 및 弦과 弦이 이루는 角을 變化시킨다.

任意的 弦 i-j의 兩節點에서 彈性軸에 대한 接線과 弦 사이의 角度變化를 考慮하면, Fig. 1과 같이 節點 i에서 初期角度 γ<sub>i</sub>는 γ<sub>i</sub> - α<sub>i</sub>로, 節點 j에서 初期角度 γ<sub>j</sub>는 γ<sub>j</sub> - α<sub>j</sub>로 變하며, 이때 α는 Newmark가 直線보에 대해서 開發한 다음 式들을 利用한다.<sup>6)</sup>

$$\bar{\alpha}_i = \frac{h}{24} (7\alpha_i + 6\alpha_j - \alpha_k) \dots\dots\dots (3a)$$

$$\bar{\alpha}_j = \frac{h}{24} (3\alpha_i + 10\alpha_j - \alpha_k) \dots\dots\dots (3b)$$

$$\bar{\alpha}_{jk} = \frac{h}{24} (-\alpha_i + 10\alpha_j + 3\alpha_k) \dots\dots\dots (3c)$$

$$\bar{\alpha}_k = \frac{h}{24} (-\alpha_i + 6\alpha_j + 7\alpha_k) \dots\dots\dots (3d)$$

여기서 α<sub>i</sub>는 節點 i의 曲率變化 (M/EI) 이며 h는 弧의 길이이다.

Fig. 2에서 連續된 두개의 弦 사이의 角을 考察하면, 휨변형이 γ<sub>i</sub>를 α<sub>i</sub>만큼 變化시키고, 節點 i에서 k까지 완만하게 變化하기 때문에 中間節點 j에서 α<sub>j</sub>는 (3b) 式과 (3c) 式을 더한다.

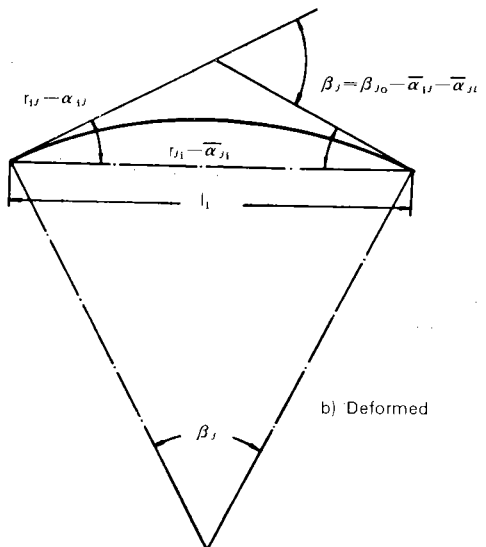
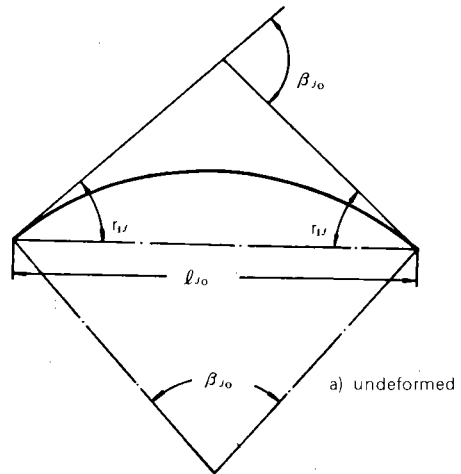


Fig. 1. Deformation of a Typical Chord

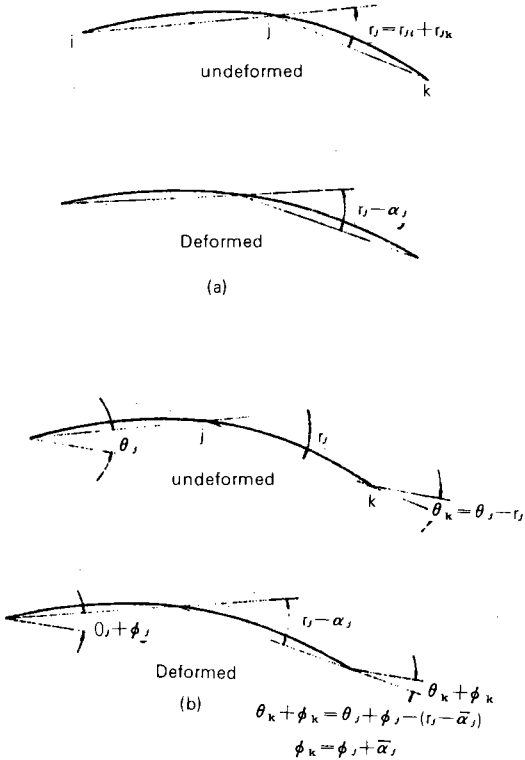


Fig. 2. Deformation of two Successive Chords

$$\bar{\alpha}_j = \alpha_{j1} + \bar{\alpha}_{jk} = \frac{h}{12} (\alpha_i + 10\alpha_j + \alpha_k) \dots\dots (4)$$

따라서 連續된 두 弦 사이의 角을 알게되면 弦의 回轉角은 쉽게 구할 수 있고, Fig. 2(b)에서와 같이  $\phi_j$ 와 隣接한 弦의 回轉角  $\phi_k$ 는 다음과 같다.

$$\phi_k = \phi_j + \alpha_j \dots\dots (5)$$

또한 固定端에서 端部 回轉角  $\phi_0$ 는 다음과 같이 구한다.

$$\phi_0 = \phi_1 - \alpha_{01} \dots\dots (6)$$

여기서  $\alpha_{01}$ 는 (3a)式으로 計算된 것이다. 그리고 Fig. 1(b)에서 弧 i-j에 대해 弧開  $\beta_j$ 는 다음 式과 같이 구할 수 있다.

$$\beta_j = \beta_{0j} - \int_i^j \left( \frac{M}{EI} \right) ds \dots\dots (7a)$$

이 式에서 積分은 사다리꼴 法則 (trapezoidal rule)을 이용한다.

$$\beta_j = \beta_{0j} - \frac{h}{2} \left[ \left( -\frac{M}{EI} \right)_i + \left( -\frac{M}{EI} \right)_j \right] \dots\dots (7b)$$

## 2. 1次元과 2次元 變化斷面<sup>5)</sup>

### 가. 1次元 變化斷面 (Prime Section)

Fig. 3(a)와 같이 1次元 變化斷面 아치의 斷面은 다음의 線形式과 같다.

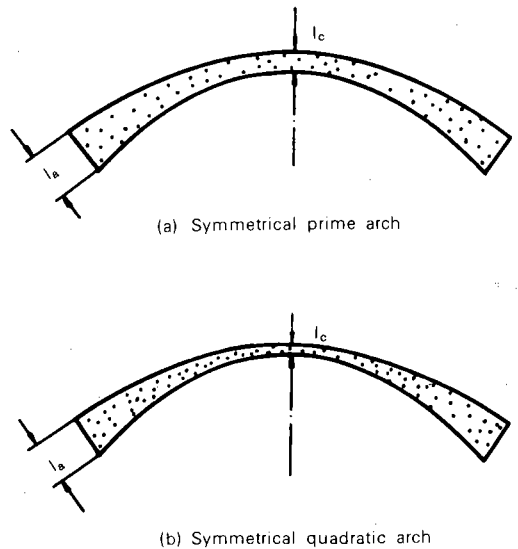


Fig. 3. Prime and Quadratic Sections

$$K = \frac{I_c}{I_a \cos \varphi_a} \dots\dots (8a)$$

$$\bar{T} = \frac{I_c}{\cos \varphi \left[ 1 - (1-K) \frac{2z}{L} \right]} \dots\dots (8b)$$

(8b)式의 K는 (8a)式과 같고,  $I_c$ 는 아치頂點의 斷面2次모멘트,  $I_a$ 는 端部の 斷面2次모멘트,  $z$ 는 아치頂點에서 任意的 節點까지의 거리,  $\varphi_a$ 는 端部에서 아치軸에 대한 接線과 水平線이 이루는 角이며,  $\varphi$ 는 任意的 거리  $z$ 로 決定되는 節點에서 아치軸에 대한 接線과 水平線이 이루는 角이다.

### 나. 2次元 變化斷面 (Quadratic Section)

Fig. 3(b)와 같이 2次元 變化斷面 아치의 斷面은 다음 式과 같이 2次式으로 變한다.

$$I = \frac{I_c}{\cos \varphi [1 - (1-k) \frac{4z^2}{L^2}]} \dots\dots\dots (9)$$

윗 式에서 기호는 1次元 變化斷面에서와 같다.

3. 解析過程

本 研究의 逐差近似過程은 다음 3段階, 즉 (I<sub>s</sub>), (II<sub>s</sub>), (III<sub>s</sub>) 段階로 나누어 진다.

逐差近似過程을 實行하기 전에 먼저 初期아치 形狀에 대한 各 弦의 길이 ℓ<sub>0</sub>와 各 各의 弧開角 β<sub>0</sub> 및 各 弦의 投影線 X<sub>0</sub>와 Y<sub>0</sub>를 구하고, 線形 解析法을 利用하여 假定荷重에 대한 初期固定端 모멘트와 水平反力을 구해야 한다. 그리고 그 다음부터 만족할 만한 수렴치에 도달할 때까지 逐差近似過程을 實行한다. 또한, 任意의 等分布荷重은 各 節點에 作用하는 等價集中荷重으로 바꾸며, 이 때 等分布荷重에 대해서 各 節點에서 받는 等價集中荷重은 qh로 나타난다. 여기는 q는 等分布荷重의 크기, h는 弧要素의 길이이다. 따라서 各 各의 弧要素에 대한 垂直剪斷力 Q를 計算할 수 있다.

$$Q_m = \bar{P}_m / 2 \dots\dots\dots (10a)$$

$$Q_i = Q_{i+1} + \bar{P}_i, \quad i = (m-1), \dots, 1 \dots\dots\dots (10b)$$

이 式에서  $\bar{P}_i$ 는 任意의 節點 i에 作用하는 等價集中荷重이며, 計算은 各 各의 頂點에서 左端으로 進行한다.

(I<sub>s</sub>) 段階: 水平剪斷力 H<sub>s</sub>와 垂直剪斷力 Q는 任意의 弧에서 다음 弧에 대해 모멘트 變化를 일으키는데 이를 増分모멘트라 하며 다음 式으로 나타난다.

$$MI(I_s)_i = Q_i X_i^* - H_s Y_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (11)$$

이 式에서 "\*"는 假定值, X와 Y는 水平投影線과 垂直投影線의 길이를 나타낸다.

各 節點에 대한 樞모멘트는 假定한 모멘트값이 M<sub>0</sub>인 固定支點에서 始作하여 各 節點의 増分모멘트를 더하여 구할 수 있다.

$$M(I_s)_0 = M_0^* \dots\dots\dots (12a)$$

$$M(I_s)_i = M(I_s)_{i-1} + MI(I_s)_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (12b)$$

이 式으로부터 必要로하는 α와  $\bar{\alpha}$ 는 (3a)~(3d) 式으로 구할 수 있고, 固定支點에서는 (3a) 式을 利用한다.

各 各의 弦에 대한 回轉角은 各 各의 頂點으로부터 左側 方向으로 等價角을 減少시킴으로써 구할 수 있고 다음과 같다.

$$\phi(I_s)'_m = -\bar{\alpha}_m / 2 \dots\dots\dots (13a)$$

$$\phi(I_s)'_i = \phi(I)'_{i+1} - \alpha_i, \quad i = (m-1), \dots, 1 \dots\dots\dots (13b)$$

여기서 "′"는 假定值으로부터 새로 計算된 값을 나타낸다. 단  $\phi(I_s)'_0$ 는 (6) 式으로 구한다.

다음에 孤開角 β는 (7b) 式으로 구하고, 새로운 弦길이 ℓ은 (14) 式을 利用하여 計算한다.

$$\ell = h(1 - \beta^2 / 24) \dots\dots\dots (14)$$

마지막으로 (I<sub>s</sub>) 段階의 解를 만족시킬 수 있는 水平投影線 X(I<sub>s</sub>)'와 垂直投影線 Y(I<sub>s</sub>)'를 (15) 式과 (16) 式으로 計算한다.

$$Y(I_s)'_i = \frac{\ell}{\ell_0} [Y_0 \cos \phi + X_0 \sin \phi] \dots\dots\dots (15)$$

$$X(I_s)'_i = \frac{\ell}{\ell_0} [X_0 \cos \phi - Y_0 \sin \phi] \dots\dots\dots (16)$$

그리고 다음 관계는 構造의 固有值이기 때문에 다음의 適合條件式을 滿足하여야 한다.

$$\sum_{i=1}^m \times (I_s)'_i = L / 2 \dots\dots\dots (17)$$

$$\phi(I_s)_0 = 0 \dots\dots\dots (18)$$

그러나 위의 條件들은 쉽게 滿足되지 않기 때문에 다음 (II<sub>s</sub>), (III<sub>s</sub>) 段階의 修正 計算過程이 必要하다.

(II<sub>s</sub>) 段階: 水平反力修正量 (ΔH)는 節點 樞모멘트에 影響을 주며 그 節點 樞모멘트는 다음과 같이 計算한다.

$$M(II_s)_i = -\Delta H \cdot Y_i \dots\dots\dots (19)$$

여기서 Y<sub>i</sub>는 節點 i의 Y座標이다.

따라서 曲率變化 α(II<sub>s</sub>)<sub>i</sub>와 各 節點의 等價角  $\bar{\alpha}(II_s)_i$ 는 윗 式으로 구한 樞모멘트를 利用하여 計算할 수 있고, 弦의 回轉角은 (I<sub>s</sub>) 段階와 같이 구할 수 있다.

$$\phi(II_s)'_m = -\bar{\alpha}(II_s)_m / 2 \dots\dots\dots (20a)$$

$$\phi(II_s)'_i = \phi(II_s)'_{i+1} - \alpha(II_s)_i, \quad i = (m-1), \dots, 1 \dots\dots\dots (20b)$$

$$\phi(II_s)'_0 = \phi(II_s)'_1 - \bar{\alpha}(II_s)_{01} \dots\dots\dots (20c)$$

윗 式의  $\phi(II_s)'_i$ 가 ℓ<sub>i</sub>에 影響을 미치지 않는다

고 가정하면 (I<sub>s</sub>) 段階에서 구한 l<sub>1</sub>를 利用하여 다음과 같은 修正한 弦의 水平, 垂直投影線 式을 얻을 수 있다.

$$X(II_s)'_i = -Y(I_s)'_i \cdot \phi(II_s)'_i \dots\dots\dots (21)$$

$$Y(II_s)'_i = X(I_s)'_i \cdot \phi(II_s)'_i \dots\dots\dots (22)$$

(III<sub>s</sub>) 段階: 固定端모멘트修正量 ΔM<sub>0</sub>을 考慮하여 計算하는 過程이며, 各 節點에서 일정하고 다음과 같다.

$$M(III_s)'_i = \Delta M_0 \dots\dots\dots (23)$$

α(III)'<sub>0</sub>와 ᾱ(III)'<sub>0</sub>, 그리고 α(III)'<sub>1</sub>와 α(III)'<sub>i</sub>는 (23)式을 (II<sub>s</sub>) 段階에서와 같이 計算한다.

$$\phi(III_s)'_m = -\bar{\alpha}(III_s)'_m / 2 \dots\dots\dots (24a)$$

$$\phi(III_s)'_i = \phi(III_s)'_{i+1} - \bar{\alpha}(III_s)'_i; \quad i = (m-1), \dots, 1 \dots\dots\dots (24b)$$

$$\phi(III_s)'_0 = \phi(III_s)'_1 - \bar{\alpha}(III_s)'_{01} \dots\dots\dots (24c)$$

(III<sub>s</sub>) 段階에서도 φ(III<sub>s</sub>)'<sub>i</sub>가 l<sub>1</sub>에 미치는 영향은 無視한다.

$$X(III_s)'_i = -Y(I_s)'_i \cdot \phi(III_s)'_i \dots\dots\dots (25)$$

$$Y(III_s)'_i = X(I_s)'_i \cdot \phi(III_s)'_i \dots\dots\dots (26)$$

以上の (I<sub>s</sub>), (II<sub>s</sub>), (III<sub>s</sub>) 段階의 結果들을 綜合하여 適合條件式을 만들면 다음과 같다.

$$\Sigma X(I_s)'_i + \Sigma X(II_s)'_i + \Sigma X(III_s)'_i = L/2 \dots\dots (27)$$

$$\phi(I_s)'_0 + \phi(II_s)'_0 + \phi(III_s)'_0 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

위의 條件式들로부터 ΔH와 ΔM<sub>0</sub>를 구한 후에 이 때 實際처짐의 計算過程에서 各 節點의 휨모멘트는 다음과 같이 計算할 수 있다.

$$M_i = M(I_s)_i + \Delta H \cdot M(II_s)_i + \Delta M_0 \cdot M(III_s)_i \dots (29)$$

위의 過程까지 數值解가 收斂되었는지는 拱頂點에서 (30)式과 같이 (I<sub>s</sub>) 段階에서의 휨모멘트와 (29)式으로 구한 휨모멘트로 判斷한다.

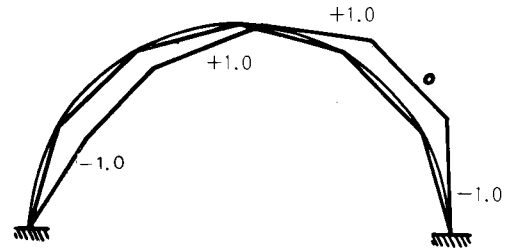
$$CMR = \left| \frac{M_m - M(I_s)_m}{M_m} \right| \dots\dots\dots (30)$$

만약 CMR값이 0.10보다 크면 (11)式으로 되돌아가서 다음 Cycle을 遂行한다. 이 때 그 Cycle에서 H와 ΔM<sub>0</sub>는 前 Cycle의 H와 M<sub>0</sub>에 各各 ΔH와 ΔM<sub>0</sub>를 合한 값이 되며, CMR값이 0.1보다

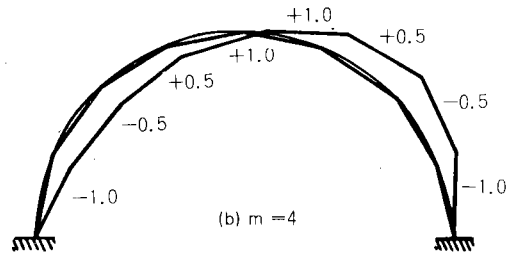
작은 값에 收斂될 때까지 前述한 過程을 反復施行한다. 따라서 收斂된 Cycle에서 最終인 弦의 回轉角과 水平投影線, 垂直投影線은 다음 式들로 計算되며, 拱의 새로운 처짐形象이 이 式으로 定해진다.

### III. 逆對稱모드의 挫屈解析

처음에 施行錯誤의 으로 弦 回轉角 (Δφ)<sub>i</sub><sup>\*</sup>를 逆對稱挫屈모드로 假定한다. 이 때 半아치에서 弦要素인 m가 Fig. 4(a)와 같이 홀수이면 各弦에



(a) m = 3



(b) m = 4

Fig. 4. Antisymmetric Trial Chord Rotations

대한 相對的인 回轉角은 (31a)式과 같이 나타낼 수 있고, 이 때 최초의 弦 回轉角은 -1.0 으로 假定한다.

$$(\Delta\phi)_{i,1}^* = 1.0 + 2(i-1)/(m-1), \quad i=1, 2, \dots, m \dots (31a)$$

만약 弦要素의 m가 Fig. 4. (b)와 같이 짝수이면 다음 式들로 나타낼 수 있다.

$$(\Delta\phi)_{i,1}^* = -1.0 + 2(i-1)/m, \quad i=1, 2, \dots, m/2 \dots (31b)$$

$$(\Delta\phi)_{i,1}^* = -1.0 + 2i/m, \quad i = \frac{m}{2} + 1, \dots, m \dots (31c)$$

以上에서 假定한 逆對稱 모드에서, 아치頂點의 垂直처짐은 없어야 하기 때문에 이 條件을 滿足시키기 위해서 아치頂點의 施行錯誤의 垂直變位를 假定한 回轉角으로부터 다음과 같이 計算한다.

$$(\Delta V)_i^* = \sum_{i=1}^m X_i (\Delta \phi)_{i,i}^* \dots\dots\dots (32)$$

만약 垂直變位가 0이 아니면 剛體回轉 시킨다. 따라서 調整한 回轉角은 다음과 같다.

$$(\Delta \phi)_i^* = (\Delta \phi)_{i,i}^* - (\Delta V)_{i,m}^* / X_m \dots\dots\dots (33)$$

(33)式에서 挫屈 때문에 發生하는 아치頂點의 水平座標  $X_m$ 과 各 弦의 水平投影線  $X_i$ 의 變化量은 無視한다.

위의 弦 回轉角은 各 弦의 垂直投影線 길이와 水平投影線 길이를 變化시키고, 支點에서는 垂直反力, 各 節點에서는 힘모멘트 變化를 일으키나, 微小의 逆對稱移動은 支點거리를 變化시키지 않기 때문에 水平反力の 變化는 없다.

따라서 微小 回轉角  $(\Delta \phi)_i^*$ 에 대한 各 弦의 水平 및 垂直投影線의 變化量은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\Delta X)_i^* = -Y_i (\Delta \phi)_i^* \dots\dots\dots (34)$$

$$(\Delta Y)_i^* = X_i (\Delta \phi)_i^* \dots\dots\dots (35)$$

또한 아치가 右側으로 挫屈함에 따라 左側支點의 垂直反력이 減少하며, 이 減少量을 구하기 위해 먼저 各 節點에서 發生하는 다음의 微小 水平變位量을 利用한다.

$$(\Delta U)_0^* = 0 \dots\dots\dots (36a)$$

$$(\Delta U)_i^* = (\Delta U)_{i-1}^* + (\Delta X)_{i,i-1,\dots,m}^* \dots\dots\dots (36b)$$

이 때  $(I_s)$  段階의 解析過程에서 左側垂直反力 減少量은 (37)式과 같이 구할 수 있다.

$$(\Delta V - I_s) = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \bar{P}_i (\Delta U)_i^* - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{P}_m} (\Delta U)_m^*}{X_m} \dots\dots\dots (37)$$

前章에서 提示한 것 처럼 各 弦에 대한 増分 모멘트는 다음과 같다.

$$(MI)_i = Q_i X_i - H \cdot Y_i \dots\dots\dots (38)$$

逆對稱挫屈 移動 때문에 各 弦의 投影線은  $(X + \Delta X_i)$ 와  $(Y + \Delta Y_i)$ 이 되며, 弦의 剪斷力은  $(Q_i + (\Delta V - I_s))$ 이다. 따라서 總 모멘트 増分量은

다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(MI + (MI - I_s))_i = (Q_i + (\Delta V - I_s))_i (X + \Delta X)_i - H (Y + \Delta Y)_i \dots\dots\dots (39)$$

윗 式으로부터 挫屈移動 때문에 發生하는 増分 모멘트 變化量은 (40)式과 같음을 알 수 있다.

$$(\Delta MI - I_s)_i = Q_i (\Delta X)_i^* + (\Delta V - I_s)_i X_i - H (\Delta Y)_i^* \dots\dots\dots (40)$$

따라서 各 節點에서 힘모멘트 變化量은 다음式과 같다.

$$(\Delta M - I_s)_0 = 0 \dots\dots\dots (41a)$$

$$(\Delta M - I_s)_i = (\Delta M - I_s)_{i-1} + (\Delta M - I_s)_{i,i-1,\dots,m} \dots\dots\dots (41b)$$

曲率變化量  $\alpha(I_s)_i$ 와 等價角  $\bar{\alpha}(I_s)$ 는 II.章에서와 같이 구한다.

또한 施行錯誤의 假定된 回轉角을  $(\Delta \phi - I_s)_{i,i}'$ 라 할 때, (32)·(33)式과 같이 아치頂點의 微小量의 垂直처짐과 修正弦回轉角을 計算할 수 있다.

$$(\Delta V - I_s)_{i,m}' = \sum_{i=1}^m X_i (\Delta \phi - I_s)_{i,i}' \dots\dots\dots (42)$$

$$(\Delta \phi - I_s)_i' = (\Delta \phi - I_s)_{i,i-1}' - (\Delta V - I_s)_{i,m}' / X_m \dots\dots\dots (43)$$

이때 (II s) 段階에서 逆對稱側方向 移動에 따른 固定端모멘트 變化量  $(\Delta M_0)$ 은 다음과 같이 一定한 垂直剪斷力을 일으킨다.

$$(\Delta V - II s) = -\Delta M_0 / X_m \dots\dots\dots (44)$$

따라서 各 節點에서의 힘모멘트는 (45)式과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$(\Delta M - II s)_i = (\Delta M_0 + (\Delta V - II s) \cdot X_i) \dots\dots\dots (45)$$

그리고 II.章에서와 같이 (45)式을 利用하여  $\alpha(II s)_0$ 와  $\bar{\alpha}(II s)_0$ ,  $\alpha(II s)_i$ 와  $\bar{\alpha}(II s)_i$ 를 求한다.

또한 (II s) 段階에서 假定한 弦 回轉角을  $(\Delta \phi - II s)_{i,i}'$ 라 하면, (32)·(33)式과 같이 아치의 頂點에서 微小量의 垂直처짐과 修正弦回轉角을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\Delta V - II s)_{i,m}' = \sum X_i (\Delta \phi - II s)_{i,i}' \dots\dots\dots (46)$$

$$(\Delta\phi - \Pi s)'_i = (\Delta\phi - \Pi s)'_{i,1} - (\Delta V - \Pi s)'_{i,m} / X_m \dots\dots\dots (47)$$

兩端固定 아치이기 때문에 다음 適合條件式으로부터  $\Delta M_0$ 를 구할 수 있다.

$$(\Delta\phi - Is)'_0 + (\Delta\phi - \Pi s)'_0 = 0 \dots\dots\dots (48)$$

따라서 참回轉角은 (49)式과 같이 구할 수 있다.

$$(\Delta\phi)'_i = (\Delta\phi - Is)'_i + \Delta M_0 \cdot (\Delta\phi - \Pi s)'_i \dots\dots (49)$$

그런데 假定한 弦回轉角과 參回轉角은 何重函數이기 때문에 아치가 挫屈할 때 各弦에 대한 無次元挫屈變數( $\lambda_i$ )는 (50)式과 같이 구할 수 있고, 이때 모든 弦에 대한  $\lambda_i$ 는 一定한 값에 거의 일치하며, 臨界荷重( $q_{cr}$ )에 대한 挫屈變數는 平均法을 利用하여 (51)式과 같이 구할 수 있고 이 때 臨界荷重( $H_{cr}$ )을 구한다.

$$\lambda_i = \frac{(\Delta\phi)'_i}{(\Delta\phi)'_i} \dots\dots\dots (50)$$

$$\mu = \frac{\sum_i |(\Delta\phi)'_i|}{\sum_i |(\Delta\phi)'_i|} \dots\dots\dots (51)$$

만약 各各의  $\lambda_i$ 가 一定한 값에 收斂하지 않으면, 假定한 弦回轉角을 修正하기위해 (34) 式으로 되돌아가 만족할 만한 收斂值에 도달할때까지 반복한다.

以上の 數值解析過程의 FLOW CHART는 Fig. 5. 와 같고 FORTRAN 77로 Programming 하여 圓光大學校 電子計算所 Prime 750 시스템을 利用하였다.

#### IV. 數值解析例 및 結果分析

##### 1. 數值解의 檢證 및 收斂

알고리즘의 妥當性을 檢證하기 위하여 既發表된 參考文獻(11)의 數值解析 結果와 本論文의 수치해석 結果를 比較하였다. 참고문헌(11)의 수치해석은 아치의 變化斷面을  $I_c \sec \varphi$  와  $I_c \sec^3 \varphi$ 로 하였다. 따라서 本檢證은 Table-1에서와 같이 1次元 變化斷面 아치의 端部 斷面 2次元 모멘트  $I_a$ 를  $I_c \sec \varphi a$ 로, 2次元 變化斷面 아치의 端部 斷面 2次元 모멘트  $I_a$ 를  $I_c \sec^3 \varphi a$ 로取하고, 各節點의 斷面 2次元 모멘트 變化와 臨界荷重을 比較하였다. Table-1에서 볼 수 있듯이 1次元 變化斷面 아치와  $I_c \sec \varphi$  아치는 各節點의

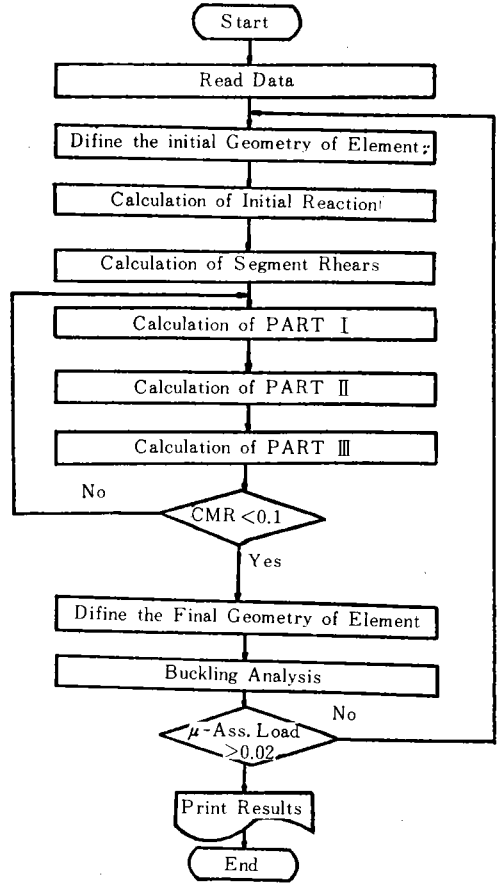


Fig. 5. Flow Chart

斷面 2次元 모멘트와 臨界荷重이 서로 完全하게 一致하여 本研究의 妥當性을 보이고 있다. 또한 2次元 變化斷面 아치와  $I_c \sec^3 \varphi$  아치는 各節點의 斷面 2次元 모멘트가 서로 약간의 差異가 있으나 臨界荷重의 比較의 잘 一致하여 역시 本研究에서 開發한 알고리즘을 利用한 數值解析의 妥當性을 立證할 수 있다.

아치의 分割數를 增加시키면 더 큰 精度의 數值解를 얻을 수 있지만 너무 많이 分割하면 컴퓨터의 計算時間이 더 많이 所要된다. 따라서 所要의 精度를 얻을 수 있는 分割要素數를 먼저 決定한 後에 實際의 數值適用例를 實行하는 것이 合理的이다.

Table-2는  $I_a = 5I_c$ 일때 여러종류의  $f/L$ 에 대해서 半아치의 分割數를 4, 8, 10, 12 等分하여 數值解析한 結果이며, Table-2에서 보는 바와 같이 1次元 變化斷面 아치와 2次元 變化斷面 아치는  $f$

Table-1. Verification of This Study

f/L Cross section Nodal point	0.1		0.2		0.1		0.2	
	Prime* (I/I <sub>c</sub> )	I <sub>c</sub> sec <sup>3</sup> φ** (I <sub>c</sub> =1)	Prime* (I/I <sub>c</sub> )	I <sub>c</sub> sec <sup>3</sup> φ** (I <sub>c</sub> =1)	Quadratic* (I/I <sub>c</sub> )	I <sub>c</sub> sec <sup>3</sup> φ** (I <sub>c</sub> =1)	Quadratic* (I/I <sub>c</sub> )	I <sub>c</sub> sec <sup>3</sup> φ** (I <sub>c</sub> =1)
0	1.07703	1.07703	1.28062	1.28062	1.24936	1.24936	2.10022	2.10022
1	1.06559	1.06559	1.24523	1.24523	1.20650	1.20995	1.87458	1.93085
2	1.05488	1.05488	1.21064	1.21064	1.16847	1.17385	1.69 69	1.77438
3	1.04496	1.04496	1.17176	1.17716	1.13493	1.14105	1.53015	1.63120
4	1.03600	1.03600	1.14514	1.14514	1.10557	1.11162	1.41349	1.50169
5	1.03775	1.03775	1.11501	1.11500	1.08014	1.08558	1.30917	1.38621
6	1.02056	1.02056	1.08722	1.08722	1.05846	1.06292	1.22299	1.28516
7	1.01435	1.01435	1.06233	1.06233	1.04036	1.04376	1.15268	1.19889
8	1.00926	1.00926	1.04089	1.04089	1.02571	1.02803	1.09670	1.12777
9	1.00523	1.00523	1.02947	1.02947	1.01441	1.01578	1.05400	1.07205
10	1.00233	1.00233	1.01059	1.01059	1.00639	1.00175	1.02388	1.00211
11	1.00058	1.00058	1.00267	1.00267	1.00159	1.00175	1.00595	1.00804
12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
H <sub>cr</sub> ( $\frac{L^2}{EI_c}$ )	78.1	78.2	70.8	70.8	81.9	82.0	82.9	83.6

\* : Study results

\*\* : Reference 11

f/L에 관계없이 반아치를 10等分할때 所要의 수치解로 收斂하는 것을 알 수 있다.

部の 断面2次모멘트를 5.0 I<sub>c</sub>와 10.0I<sub>c</sub>로 固定하고 f/L을 변화시키며 수치해석한 결과는 Fig. 6

2. 臨界荷重 (H<sub>cr</sub>)과 rise/span比 (f/L)와의 관계

H<sub>cr</sub>과 f/L의 관계를 考察하기 위하여 arch端

Table-2. Convergence of H<sub>cr</sub> as the Number of Segments (I<sub>a</sub>=5I<sub>c</sub>)

rise span	No. of segments	Prime H <sub>cr</sub> (L <sup>2</sup> /EI <sub>c</sub> )	Quadratic H <sub>cr</sub> (L <sup>2</sup> /EI <sub>c</sub> )
0.1	4	134.4	110.3
	8	136.1	112.0
	10	136.2	112.2
	12	136.2	112.2
0.2	4	119.0	99.3
	8	121.1	101.1
	10	121.2	101.2
	12	121.2	101.2
0.3	4	100.2	84.6
	8	101.0	85.1
	10	101.0	85.9
	12	101.0	85.9
0.4	4	80.5	69.3
	8	80.5	69.8
	10	80.4	69.8
	12	80.0	69.8

Table-3. Comparison of H<sub>cr</sub> between Prime and Quadratic Arches

I <sub>a</sub> /I <sub>c</sub>	α/L	Prime (L <sup>2</sup> /EI <sub>c</sub> )	Quadratic (L <sup>2</sup> /EI <sub>c</sub> )
10	0.1	156.1	121.8
	0.2	142.1	111.7
	0.3	122.5	97.3
	0.4	101.1	81.3
	0.5	81.4	66.4
15	0.1	169.8	125.6
	0.2	161.7	116.1
	0.3	132.8	102.2
	0.4	111.6	86.5
	0.5	91.4	71.5
20	0.1	169.7	127.7
	0.2	157.2	118.4
	0.3	138.9	104.9
	0.4	118.1	89.4
	0.5	97.8	74.5
25	0.1	172.9	128.9
	0.2	160.8	119.9
	0.3	143.0	106.6
	0.4	122.4	91.3
	0.5	102.2	76.5



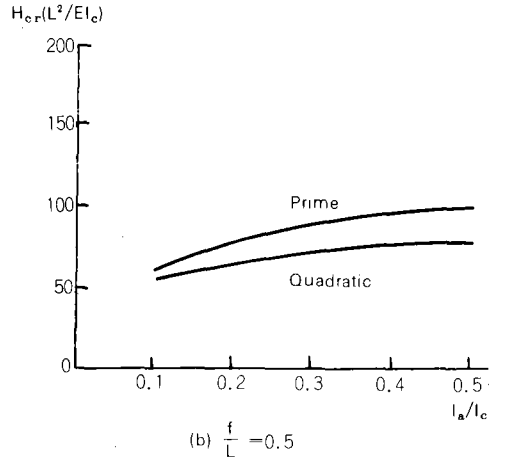
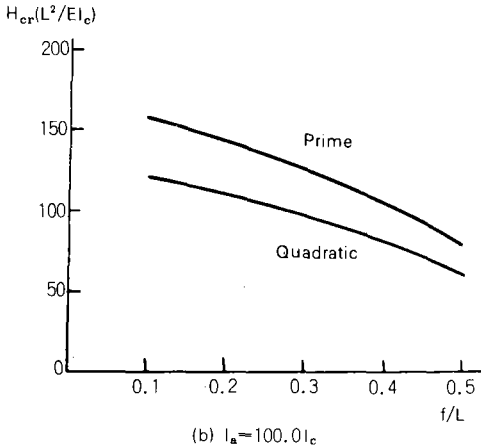
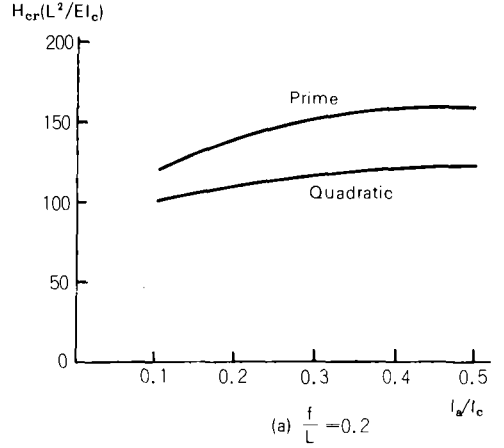
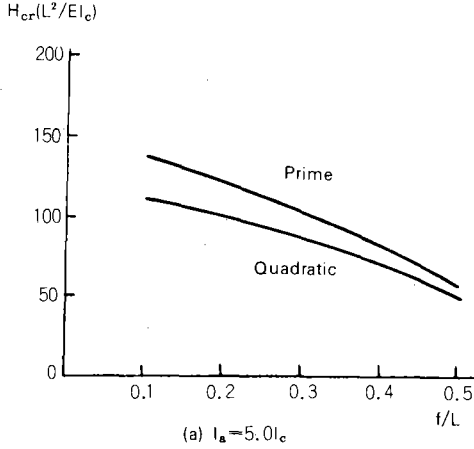


Fig. 6.  $H_{cr}$ - $f/L$  Curves

Fig. 7.  $H_{cr}$ - $I_a/I_c$  Curves

과 같으며, Fig. 6에서 볼 수 있듯이  $f/L$ 가 커질수록  $H_{cr}$ 은 작아지고 있다.

### 3. 臨界荷重 ( $H_{cr}$ ) 과 端部斷面 2次 모멘트 ( $I_a$ ) 와의 關係

$H_{cr}$ 과  $I_a$ 의 관계를 考察하기 위해서  $f/L$ 를 0.2와 0.5로 固定하고  $I_a$ 를 變化시키면서 수치 해석한 結果는 Fig. 7과 같으며, 1次元變化斷面 아치와 2次元變化斷面 아치에서  $H_{cr}$ 값은  $I_a$ 가 커질수록 커지는 사실을 알 수 있다.

#### 4.1 次元變化斷面 아치와 2次元變化斷面 아치의 $H_{cr}$ 比較

1次元變化斷面 아치와 2次元變化斷面 아치의  $H_{cr}$ 을 比較하기 위해서  $I_a$ 를  $10I_c$ ,  $15I_c$ ,  $20I_c$ ,

$25I_c$ 로 增加시키며  $H_{cr}$ 을 計算하여 Table-3으로 나타내었다.

## V. 結 論

本 研究는 1次元變化斷面과 2次元變化 斷面을 갖는 兩端固定 拋物線 아치의 面內挫屈에 관한 研究로서 臨界荷重을 구할 수 있는 알고리즘을 開發한 結果, 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 本 研究에서 구한 臨界荷重 ( $H_{cr}$ )은 Austin이 發表한 結果와 잘 一致하여 本 論文에서 開發한 알고리즘의 妥當性을 보였다.

(2) 1次元變化斷面 아치와 2次元變化斷面 아치의 半을 10等分하여 數值解析한 臨界荷重은 充分한 精度의 收斂值에 도달했다.

(3) 臨界荷重은 rise/span比( $f/L$ )가 크면 클수록 작아졌다.

(4) 臨界荷重은 아치 端部의 斷面2次 모멘트가 크면 클수록 커졌다.

(5) 아치 端部의 斷面2次 모멘트가 같고  $f/L$ 가 같을 때 1次元變化斷面아치의 臨界荷重은 2次元變化斷面아치의 臨界荷重보다 컸다.

### 參 考 文 獻

1. Dadeppo, D. A. and Schmidit, R., "Nonlinear Analysis of Buckling and Postbuckling Behavior of Circular Arches", Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 20, 1969, pp. 847-857.
2. Georg Wastlund, "Stability Problems of Compressed Steel Members and Arch Bridges", Journal of the Structural Division, ST6, June, 1960, pp. 47-71.
3. Howard B. Harrison, "In-Plane Stability of Parabolic arches", ASCE, ST1, January, 1982, pp. 195-205.
4. Huddleston, J. V., "Nonlinear Analysis of Steep Compressible Arches of Any Shape", Journal of Applied Mechanics, ASME, December, 1971, pp. 942-946.
5. LEONTOVICH, FRAMES AND ARCHES, McGraw-Hill, 1969, pp. 325-328.
6. Newmark, N. M., "Numerical Procedure for Computing Deflection, Moments and Buckling Load", Transaction of ASCE, Vol. 108, 1943, pp. 1161-1234.
7. Ross, T. J., "Numerical Karge Deflection Bending and Buckling Analysis of Arches", Thesis of Master of Science, Rice University, U.S.A., 1973.
8. S. F. Borg and J. J. Gennaro, Advanced Structural Analysis, D. VAN NOSTRAND CO. INC., 1965, pp. 172-201.
9. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1976, pp. 278-318.
10. Walter J. Austin and Timothy J. Ross, "Elastic Buckling of Arches under Symmetric Loading", J. Ross, "Elastic Buckling of Arches under Symmetric Loading", ASCE, ST5, May, 1976, pp. 278-318.
11. Walter J. Austin, "In-Plane Bending and Buckling and Buckling of Arches", ASCE, ST5, May, 1971, pp. 1575-1592.