韓國經營科學會誌
第12券 第1號
1987年 4月

차량경로문제에 대한 최적해법

An Exact Algorithm for the Asymmetrical Vehicle Routing Problem

송 성 헌*
박 순 달*

Abstract

The general vehicle routing problem has been studied by many researchers such as Christofides, et al. and Laporte, et al., but only limited effort has been devoted to developing the optimal algorithms. The purpose of this paper is to develop a branch and bound algorithm which determines the optimal vehicle routes and the optimal number of vehicles concurrently for the asymmetrical vehicle routing problem.

In order to enhance the efficiency, this algorithm emphasizes the followings ; First, an efficient primal-dual approach is developed to solve subproblems which are called the specialized transportation problem, formed by relaxing the illegal subtour constraints from the vehicle routing problem. Second, an improved branching scheme is developed to reduce the number of candidate subproblems by adequate utilization of vehicle capacity restrictions.

1. 서론

차량경로문제(vehicle routing problem;VRP)란 차량을 이용하여 고객에 대해 서어비스를 수행하기 위한 차량경로를 결정하는 제반 문제를 다룬다. 이와 관련된 응용사례를 살펴보면, 대리점에의 제품배달, 신문배달, 철도운행, 대중교통 차량운행, 비행기 운행, 순찰차 운행, 통학버스 운행, 쓰레기 수거차 운행 등 매우 다양하다. Bodin et al.(1983), Schrage (1981) 등이 분류한 VRP문제들의 특성요인에는 차량기지수, 차량수, 차종, 수요형태, 수요지 위치, 네트워크의 방향성, 차량적재용량, 차량최대운행시간, 특정지점에의 도착시간, 비용, 목적함수 등이 있다. 기본적인 차량경로문제는 적재용량이 같은 여러대의 차량들이 본점을 출발하여 수요량이 미리 알려진 각 지점에 제품을 배달하고 다시 본점으로 돌아올 때 까지의 총 운행거리를 최소화하기 위한 차량경로를 찾는 문제이다. 그리고 이 문제에 전술한 특성요인 들을 조합함에 따라 외판원문제(traveling salesman problem; TSP), 복수외판원문제(multiple traveling salesman problem), 복수차고 차량경로문제(multi-depot vehicle routing problem), 차량수 및 차량조달방법 결정문제(fleet size and mix problem), 확률적 차량경로문제(stochastic vehicle routing problem), 우체부문제(chinese postman problem) 등이 파생된다.

TSP문제를 포함한 거의 모든 VRP문제는 그 본질적인 조합적 특성에 의거 Magnanti(1981)에서와 같이 정수계획법 수리모형으로 정식화가

*홍익대학교 산업공학과
**서울대학교 산업공학과

가능하고, 또한 원칙상으로는 그 해법으로서 해결 가능하다. 그런데 TSP와 VRP는 계산의 복잡도에 있어서 Lenstra와 Rinnooy Kan(1981)이 지적했듯이 NP-hard 부류에 속하므로, 문제 크기가 커짐에 따라 정확한 해를 얻으려면 상당한 계산시간과 기억용량을 필요로하고 있다. 따라서 1959년 Dantzig와 Ramser가 차량경로 문제를 최초로 소개하고, 그 해법으로서 선형계획법을 이용한 발견적 기법을 제시한 이래, 지금까지의 대부분의 연구는 실용적인 측면에서, 최적해 기법보다는 발견적 기법의 개발에 치중되어 왔었다. 최근들어 컴퓨터의 발달과 더불어 최적해법을 개발하려는 노력이 일고 있긴 하지만 극히 미미한 실정이다. 간단히 소개하면 다음과 같다.

Christofides et al. (1981)는 기본적인 VRP 문제에 차량최대운행시간에 대한 제약조건을 추가시킨 문제를 다루었다. 그들은 Lagrangian 완화를 이용한 분지한계법을 개발하였고, 분지한계법의 하한을 k-trees와 q-paths로부터 계산하였다. 그런데 그들은 이 문제를 차량경로수 m이 미리 고정된 값으로 주어진 경우로 국한시켰다.

Laporte et al. (1984) 은 차량적재용량에 대한 제약대신에 차량최대운행거리에 대한 제약이 있고, 거리행렬이 대칭인 대칭(symmetric)VRP 문제에 대해서, 그리고 Laporte et al.(1985)는 차량적재용량과 차량최대운행거리에 대한 제약이 함께 있는 대칭 VRP문제에 대해서 최적해법을 제시하였다. 그들은 불법경로의 형성을 방지하는 제약식을 완화시킨 나머지 정수계획법 문제에 단체법을 적용하여 정수해를 얻는다. 분지한계법의 하한은 선형계획법 문제에 분지한계법을 적용하여 구하고, 정수해가 불법경로를 형성하게될 경우에 한하여, 그러한 불법경로가 생기지 않도록 제약식을 만들어서 선형계획법 모형에 추가시키는 방법을 제시하였다. 여기서 그들은 차량경로수 m을 결정변수로 하여, m의 값도 산출해 내었다.

Laporte et al. (1986) 은 비용행열이 비대칭인 비대칭 VRP문제에 대한 정확한 해법을 제시하였다. 그들은 Rinnooy Kan이 복수외판원 문제를 TSP문제로 변형시킬때 사용했던 규칙을 이 VRP문제에 적용하여 네트워크를 확정한 후, 확정된 네트워크에 대해 수리모형을 세웠다. 그들은 그 수리모형에서 불법경로방지식을 완화시킨 나머지 문제가 배정문제가 된다는 사실에 착안하여, 배정문제의 목적함수 값이 하한이 되는 분지한계법을 개발하였다. 여기서 그들은 차량경로수 m을 결정변수로 두려고 시도하였으나, m에 따라 네트워크를 확장하는데 곤란함이 있음을 지적하였다.

본 연구의 목적은 Laporte et al. (1986) 이 다루었던 비대칭 VRP문제에 대해서 차량경로수 m도 함께 구할 수 있는, 수리모형에 입각한 최적해법을 개발하는 것이다. 본 연구에서 다루려하는 문제를 정의하면 다음과 같다.

본점은 네트워크상에서 지점 n에 위치해 있는데, m대의 차량들을 이용하여 $n-1$개의 지점에 위치해 있는 대리점들에 제품을 배달하고 있다. 대리점 i의 수요량은 d_i로서, 이 수요량은 미리 정하여져 있다. 그리고 각 차량의 적재용량은 K로서, 모두 동일하다. 여기서 다루려하는 VRP 문제는 아래 사항을 만족시키도록 m대의 차량에 대한 경로를 결정하는 것이다. 즉

1) 각 차량은 본점에서 출발하여, 본점으로 돌아와야 한다.
2) 본점을 제외한 모든 대리점은 차량 1대에 의해 한번씩만 방문된다.
3) 어떤 주어진 경로상에 있는 대리점들의 수요량의 합계는 차량적재용량 K를 초과할 수 없다.

   단, 대리점 i의 수요량이 차량적재용량 K를 초과하게 되는 경우에는 차량적재용량에 해당되는 수요량에 대해서 별도로 차량을 배정하기로 하고, 본 모형에서는 잔여물량만을 대리점 i의 수요량으로 간주한다.
4) 전체 차량운행비용을 최소화 하도록 한다.

본 연구에서는 상기 문제에서 차량경로수 m도 함께 결정할 수 있는 최적해법으로서 분지한계법을 개발한다.

2. 모형

본 모형에 사용되는 상수와 변수를 정의하면 아래와 같다.

〈상수〉

n : 본점 및 대리점을 포함한 모든 지점의 수 $1, \cdots, n-1$은 대리점을 뜻하고 n은 본점을 뜻한다.

d_i : 대리점 i의 수요량($i=1, \cdots, n-1$)

K : 차량의 적재용량

c_{ij} : 지점 i와 j간의 운행비용

$\underline{m}$: 최소 필요 차량수

$\bar{m}$: 최대 이용가능 차량수

R : 차량경로에 포함된 대리점의 집합

$|R|$: 차량경로에 포함된 대리점의 수

$\lceil t \rceil$: t이상의 최소정수

〈변수〉

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{만일 차량이 지점 } i\text{에서 } j\text{로 운행하면} \\ 0, & \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

m : 차량수 또는 차량경로수

본 연구에서 다루려하는 VRP문제는 다음과 같은 수리모형으로 정식화할 수 있다.

(VRP)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij} \tag{1}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i=1, \cdots, n-1 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = m, \quad i=n \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=1, \cdots, n-1 \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = m, \quad j=n \tag{5}$$

$$X \in S^* \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall_{i,j} \tag{7}$$

단, $\qquad c_{ii} = \infty \quad \forall_i$

식(1)의 목적함수로서 차량에 의한 총 운행비용을 최소화하고자 하는 것이다. 식(2)와 (4)는 각 대리점이 한번씩만 방문됨을 뜻하며, 식(3)와 (5)는 본점에서 출발하고 돌아오는 차량은 m대임을 뜻하는데 m은 결정변수로서 m의 범위는 $\underline{m} \leqq m \leqq \bar{m}$가 된다. 여기서 $\bar{m}$는 배달업무를 수행하기에 충분한 최대 이용가능차량수를 말하며, 최소 필요차량수 $\underline{m}$는 아래와 같이 계산된다.

$$\underline{m} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i / K$$

식(6)은 불법경로(illegal subtour)의 형성을 방지하는 제약식이다. 그런데 불법경로란 다음과 같은 두가지 사항을 모두 만족시키지 못하는 경로를 말한다.

1) 경로에 포함된 대리점들의 수요량의 합계가 차량적재용량 K를 초과하지 않는다. ($\sum_{i \in R} d_i \leqq K$)

2) 각 경로에는 반드시 본점이 포함되어야 한다.

일반적으로 많이 인용되고 있는 불법경로 방지 제약식은 Magnanti(1981)가 제시한 식으로서 S^*는 다음과 같다.

$$S^* = \{(x_{ij}) \mid \sum_{i \in R} \sum_{j \in R} x_{ij} \leqq |R| - \lceil \sum_{i \in R} d_i / K \rceil, \quad R \subseteq \{1, \cdots, n-1\}, \; |R| \geqq 2\}$$

식(7)은 변수 x_{ij}에 대한 제약조건이다.

이 모형에서 불법경로방지식(6)을 제외시키면, 특수한 형태의 수송문제가 되는데, 여기서는 이 문제를 특수수송문제(specialized transportation problem; STP)라고 칭하기로 한다.

(VRP)를 풀기위한 방안으로는 우선 Laporte et al. (1985)이 대칭 VRP문제를 푸는데 사용했던 바와같이, 완화된 선형계획법 문제에 분지한계법을 적용하고, 그 정수해가 불법경로를 형성할 경우에 한하여 불법경로방지식을 만들어

선형계획법 문제에 추가시키는 방법을 생각해 볼 수 있다. 그런데 식(2), (3), (4), (5)와 (7) 에 의한 특수수송문제(STP)는 unimodular구조를 갖고 있으므로, STP문제의 해는 정수이다. 그러므로 이 특성을 활용하는 것이 훨씬 이점이 있을 것이다. 따라서 본 연구에서는 (VRP) 에서 불법경로방지식(6)이 완화된 STP문제를 우선 고려하고, 식(6)을 만족시키기 위해서 분지한계법을 적용하여 변수 x_{ij}를 순차적으로 0 또는 1로 고정시켜감으로써 최적해를 구하고자 한다. 그리고 분지한계법의 전반적인 절차는 Laporte et al. (1986)을 따르기로 하는데, 단지 다음과 같은 두가지 사항에서 차이가 있다.

첫째, Laporte et al.은 STP문제를 배정문제로 변형시켜서, 변형된 배정문제(modified assignment problem;MAP)의 목적함수 값을 분지한계법의 하한으로 설정하는 반면, 본 연구에서는 3장에서 기술한 바와 같이 STP문제를 직접푸는 해법을 개발하고, 그 문제의 목적함수 값을 분지한계법의 하한으로 설정한다.

둘째, Laporte et al.이 차량적재용량 제한조건을 활용하여 제시한 분지전략을 4장에서 언급한 바와 같이 보완함으로써, Laporte et al. (1986)의 단계 6의 과정을 불필요하게 만들 뿐만아니라, 가능해가 존재하지 않을 후보부분문제들에 대한 계산과정을 생략시킨다.

3. 특수수송문제

(VRP)모형에서 불법경로 방지식(6)을 제거시키면 다음과 같은 특수수송문제(STP)가 된다.

(STP)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij} \qquad (8)$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=1,\cdots,n-1 \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=m, \quad i=n \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1,\cdots,n-1 \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=m, \quad j=n \qquad (12)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall_{i,j} \qquad (13)$$

단, $c_{ii}=\infty \;\; \forall_i$

여기서 m의 범위는 $\underline{m}\leq m\leq\overline{m}$이다.

이 문제에서 계수행렬은 unimodular 특성을 갖고 있고 우변상수가 0또는 1이기 때문에 식(13)을 아래와 같은 제약식(14)로 대체한 선형계획법 문제의 해는 이 문제의 해와 같다. 〔Murty(1976) 참조〕

$$x_{ij}\geq 0 \quad \forall_{i,j} \qquad (14)$$

그런데 이 문제의 목적함수 값은 VRP문제에 대한 분지한계법의 하한이 된다. 분지한계법은 하한의 계산방법에 따라 그 효율성이 크게 좌우되므로, 이 (STP)문제의 구조적 특성을 이용한 해법이 필요할 것이다.

m의 값이 $m=m^\circ$로 고정된 경우의 특수수송문제를 (P1)이라고 하자. (P1)을 풀기위한 방법으로는 크게 두가지를 생각할 수 있다.

1) 수송문제의 해법을 적용하는 방안.
2) 배정문제로 변환시킨 후 배정문제의 해법을 적용하는 방안.

그렇지만 상기방안들은 (P1)에 대한 전용해법이 되지는 못하며, 더우기 (STP)문제는 m의 값이 m°가 아니라 $\underline{m}\leq m\leq\overline{m}$의 범위내에 있다. 따라서, 본 연구에서는 배정문제에 대한 Hungarian법을 응용하여, 이러한 (STP)문제를 효율적으로 풀 수 있는 해법을 개발하였다.

그러면 본 해법을 설명하기로 한다. 우선 (P1)의 최적해부터 구해보기로 하자. (P1)의 쌍대문제는 다음과 같다.

(D1)

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^{n-1} u_i+\sum_{j=1}^{n-1} v_j+m^\circ\,(u_n+v_n) \qquad (15)$$

s. t.

$$u_i+v_j\leq c_{ij} \quad \forall_{i,j} \qquad (16)$$

$$u_i,\, v_j \gtreqless 0 \quad \forall_{i,j} \qquad (17)$$

(P1)의 가능해 $\bar{x}_{ij}$와 (D1)의 가능해 $\bar{u}_i, \bar{v}_j$가 (P1)의 최적해가 되려면 아래와 같은 상보여유 조건을 만족해야 한다.

$$(\bar{u}_i+\bar{v}_j-c_{ij})\cdot\bar{x}_{ij}=0 \qquad (18)$$

(P1)의 해법은 (D1)의 제약식을 만족하는 쌍대가능해 $\bar{u}_i, \bar{v}_j$로 부터 시작하여, 이 쌍대가능해와 관련된 상보여유조건을 만족시키면서, 원가능성(primal feasibility)에 가장 근접하는 원해(primal solution) x°_{ij}를 찾는 것이다. 만일 x°_{ij}가 원가능(primal feasible)이면, 그 해가 원문제 (P1)의 최적해가 된다. 그렇지 않으면 원해가 원가능성에 좀 더 가까이 접근할 수 있도록 쌍대가능해를 변경시켜서, 새로운 원해를 구한다. 이 과정을 원가능해가 발견될 때까지 계속 한다.

이 방법의 특징은 (P1)문제의 쌍대가능해를 쉽게 찾고, 그 해를 변경하기가 용이하다는 점이다. 쌍대가능해가 주어진 상태에서 상보여유조건을 만족시키면서 원가능성에 가장 가까운 원해를 찾는 문제는 간단한 2분할성 네트워크(bipartite network)에서 최대유통문제와 같게 되는데, 이것은 꼬리표절차(labeling algorithm)에 의해 효율적으로 풀린다. 꼬리표절차를 수행하여 "통과(breakthrough)"가 발생하면, 원해를 변경하는데, 이때 배정이 하나가 추가되어 원가능성에 더욱 근접한다. 그리고 "불통(non-breakthrough)"이 발생하면, 쌍대가능해를 변경한다. 본 연구에서는 꼬리표절차와 원해 및 쌍대해변경을 수송문제에 대한 원-쌍대해법의 계산절차 〔Murty(1976) 참조〕에 따라 수행하기로 하는데, 단지 원해 변경시에는 단 한개의 배정만이 추가된다는 점이 다르다. 여기서는 그러한 해법과 크게 다른 초기쌍대해 설정방법과 특수수송문제의 최적판정기준에 관해서만 기술하기로 한다.

3.1 초기쌍대가능해

쌍대가능해는 $u_i+v_j\leq c_{ij}\ \ \forall_{i,j}$를 만족하여야 한다. 그런데 n번째 행과 열에는 m개 이상이 배정되어야 하며, 그 외의 각 행과 열에는 한개씩만 배정되어야 한다. 그런데 비용행렬상의 특정세포(i,j)에 $x^\circ_{ij}=1$을 배정하려면, 상보여유조건에 의하여 그 세포(i,j)에 해당되는 할인가 $\bar{c}_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$는 0이어야 한다. 여기서는 할인가 $\bar{c}_{ij}$가 0인 세포를 허용세포(admissible cell)라고 칭한다. 본 해법은 n번째 행과 열에 적어도 m개 이상의 허용세포를 미리 만들고, 그외의 각 행과 열에는 1개 이상의 허용세포를 미리 만들고어 냄으로써, 원가능성에 가급적 빨리 도달할 수 있도록 쌍대초기해를 다음과 같이 설정한다.

우선 쌍대초기해 값을 0으로 둔다. 즉

$$\bar{u}_i=0\ \ \forall_i$$
$$\bar{v}_j=0\ \ \forall_j$$

그러면 n번째 행과 열에 m개 이상의 허용세포를 만들기 위해 쌍대가능해를 다음과 같이 설정한다.

행 n에서 m번째로 작은 $c_{n,j}$를 △라 하자.

$$\bar{u}_n=\triangle$$

$$\bar{v}_s=c_{n,s}-\triangle \quad \text{여기서} \quad s\in\{i\mid c_{n,j}<\triangle\}$$

그리고 열 n에서 m번째로 작은 $c_{i,n}-\bar{u}_i$를 δ라 하자.

$$\bar{v}_n=\delta$$

$$\bar{u}_r=C_{r,n}-\delta \quad \text{여기서} \quad r\in\{i\mid c_{i,n}-\bar{u}_i<\delta\}$$

그 다음에는 그 외의 각 행과 열에 적어도 한개 이상의 허용세포를 만들도록 한다.

만일 행 i에서 $\bar{c}_{ij}=0$인 허용세포가 하나도 없을 경우에는, $\bar{u}_i$값을 아래와 같이 설정한다.

$$\bar{u}_i=\min\{\bar{c}_{ij};j=1,\cdots,n\},\ \ i=1,\cdots,n-1$$

그 다음 만일 열 j에서 $\bar{c}_{ij}=0$인 허용세포가 하나도 없을 경우에는 $\bar{v}_j$값을 아래와 같이 설정한다.

$$\bar{v}_j=\min\{\bar{c}_{ij};i=1,\cdots,n\},\ \ j=1,\cdots,n-1$$

3.2 특수수송문제의 최적해 판정기준

지금 m의 범위가 $m\geq m^\circ$인 경우로 대체된 특수수송문제를 (P2)라고 하자.

정리 1. (P1)의 최적해가 (P2)의 최적해가

되기 위해서는 (P1)의 쌍대최적해가 아래의 조건 (19)을 만족해야 한다.

$$u_n+v_n \geq 0 \quad (19)$$

증명. (P2)의 쌍대문제 (D2)는 다음과 같다.

(D2)

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^{n-1} u_i + \sum_{j=1}^{n-1} v_j + m^\circ \cdot (u_n+v_n)$$

s. t.

$$u_i+v_j \leq c_{ij} \quad \forall_{i,j}$$

$$u_n+v_n \geq 0$$

$$u_i \gtreqless 0 \quad \forall_i$$

$$v_j \gtreqless 0 \quad \forall_j$$

(D2)의 제약식에는 (D1)의 제약식에 식(19)가 추가되어있다. 그러므로 (P1)의 원가능해는 (P2)의 원가능해가 되지만, (D1)의 쌍대가능해가 (D2)의 쌍대가능해가 되려면 식(19)를 만족해야 한다.

정리 2. (P1)의 쌍대최적해가 $\bar{u}_n+\bar{v}_n<0$ 의 관계에 있을때 m값을 한단위 증가시키면, (P1)의 목적함수 값은 $|\bar{u}_n+\bar{v}_n|$만큼 감소된다.

증명. (P1)의 쌍대문제인 (D1)의 최적해를 $\bar{u}_i, \bar{v}_j, i, j=1, \cdots, n$이라 하고, 목적함수값을 Z^*라고 하자. 지금 m의 값을 m°에서 한 단위 증가시킨다고 하자. 그러면 새로운 목적함수값$\tilde{Z}^*$는 아래와 같게 된다.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^* &= (\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n) \cdot (1, \cdots, m^\circ+1, 1, \cdots, m^\circ+1)^T \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \bar{u}_i + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{v}_j + m^\circ (\bar{u}_n+\bar{v}_n) + (\bar{u}_n+\bar{v}_n) \\ &= Z^* + (\bar{u}_n+\bar{v}_n) \end{aligned}$$

여기서 $\bar{u}_n+\bar{v}_n<0$이면, $\tilde{Z}^*=Z^*-|\bar{u}_n+\bar{v}_n|$ 의 관계가 성립된다.

특수수송문제(STP)는 특수한 형태의 수송문제이므로 Szwarc(1971)가 예시한 바와 같은 예외적인 경우를 제외하고는 대체로 $m=\underline{m}$일때 최적해가 얻어질 것으로 기대된다. 그래서 본 해법은 m°의 초기값을 $m^\circ=\underline{m}$로둔 (P1) 문제를 풀고, 정리 1과 2에 의해서 그 쌍대최적해가 조건식(19)를 위배할 경우에 한하여 m°의 값을 한 단위씩 증가시켜 해를 개선해 나감으로써 (STP)문제에 대한 최적해를 구한다. 이때 m°은 $\overline{m}$를 초과할 수는 없다. 따라서 (P1)의 최적해가 (STP)문제의 최적해가 되려면, 다음 두가지 조건중 하나를 만족하면 된다.

(i) $\bar{u}_n+\bar{v}_n \geq 0$

(ii) $m^\circ=\overline{m}$

상기 원리에 의한 계산절차는 다음과 같다.

단계 1. 초기화

$m^\circ=\underline{m}$로 둔 (P1)에 대해 초기쌍대가능해를 구하고, 그에 따른 초기원해를 설정한다.

단계 2. 꼬리표절차

꼬리표절차를 수행한다.

(1) 만일 "불통"이 발생하면, 단계 3으로 간다.

(2) 만일 "통과"가 발생하면, 단계 4로 간다.

단계 3. 쌍대가능해 변경

쌍대가능해를 변경하고, 단계2로 간다.

단계 4. 원해 변경

원해를 변경한다.

(1) 만일 변경된 원해가 (P1)의 원가능이면, 단계 5로 간다.

(2) 아니면, 단계 2로 간다.

단계 5. 최적해 변경

(P1)의 쌍대최적해를 $\bar{u}_i, \bar{v}_j$라 하자.

(1) 만일 $\bar{u}_n+\bar{v}_n \geq 0$이거나 $m^\circ=\overline{m}$이면, 계산은 끝난다.

이때의 해 $\bar{x}_{ij}, \bar{u}_i, \bar{v}_j, \forall_{i,j}$ 및 $m^*=m^\circ$가 최적해이다.

(2) 그렇지 않으면, $m^\circ=m^\circ+1$로 두고 단계 2로 간다.

4. 분지전략

본 연구의 해법에서 사용되는 분지방안은 TSP문제에 대한 Carpaneto와 Toth(1980)의 방

안을 토대로 하여, 본 연구에서 다루는 VRP문제의 특성에 맞추어 제시된 것이다. 여기서는 부분문제의 해에 불법경로가 포함되어 있을 때 그 여러개의 불법경로중에서 분할시킬 경로 하나를 선택하여, 그 경로의 형성을 방지하기 위해 부분문제에 제약조건을 부가함으로써 후보부분문제를 만드는 방안에 관하여 기술하기로 한다.

부분문제에 부가되는 제약조건으로는, 어떤 특정 호(k, ℓ)이 반드시 연결되도록 설정하는 제약식 $x_{kl}=1$과 연결되지 못하도록 설정하는 제약식 $x_{kl}=0$의 두가지가 있다. $x_{kl}=1$로 설정되는 호(included arcs)의 집합을 I, $x_{kl}=0$으로 설정되는 호(excluded arcs)의 집합을 E라고 표시하면, 각 부분문제 h에는 I_h와 E_h가 부여 되어 있다.

4.1 불법경로의 선택

분지해야될 현재의 부분문제 h에 대하여, I_h에 포함되어 있지 않은 호(arcs)의 수가 최소인 불법경로를 선택한다. 이 전략은 호의 수가 최소인 불법경로를 선택하는 Bellmore와 Malone(1971)의 전통적 분지전략과는 다르게, 파생될 후보부분문제 수를 줄이기 위한 방안으로 Carpaneto와 Toth가 제시한 것이다.

4.2 후보부분문제 j에 부가될 제약조건

선택된 불법경로에서 I_h에 포함되어 있지 않은 호의 수를 M이라 하고, 이 호의 집합을 T라고 하자.

$T=\{(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_M, \beta_M)\}$

T에서 각 호는 불법경로에 나타난 순서대로 나열되어 있다고 하자. 부분문제 h로 부터는 M개의 후보부분문제가 파생되는데 그 중 j번째로 파생될 후보부분문제 j에는 다음과 같은 I_j와 E_j이 제약조건으로 부가된다.

$$I_j=\begin{cases} I_h & , j=1 \\ I_h \cup \{(\alpha_u, \beta_u), u=1, \cdots, j-1\}, & j=2, \cdots, M \end{cases}$$

$$E_j=E_h \cup \{(\alpha_j, \beta_j)\}, \quad j=1, \cdots, M$$

상기 4.1, 4.2항과 같은 기본적인 분지방안에 따라 분지되는 후보부분문제의 수를 가능한 적게 하기 위하여 차량적재용량 제한조건을 이용한, 보완된 분지방안은 다음과 같다.

4.3 차량적재용량을 초과하는 불법경로의 형성방지

후보부분문제 j에서 총 수요량이 차량적재용량을 초과하는 경로의 형성을 가급적 방지하기 위해서 반드시 배제되어야 할 경로의 호 들을 E_j에 추가시켜 E_j를 수정한다.

문제 j에서 I_j의 호들로 연결된 지점의 부분집합을 $S_1, S_2, \cdots, S_q$라하자. 그리고 차량기점인 지점 n을 제외한 그 외의 지점들을 각각 $S_{q+1}, \cdots, S_r$로 표시하자. 그러면 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\sum_{t=1}^{r} |S_t| = n-1$$

여기서 각 부분집합에 포함된 지점의 수 $|S_t|$는,

$|S_t| \geq 2, t=1, \cdots, q$

$|S_t| = 1, t=q+1, \cdots, r$

이다. 그리고 각 부분집합 S에 해당되는 총수요량 $D(S_t)$는 다음과 같다.

$$D(S_t) = \sum_{i \in S_t} d_i$$

만일 두 부분집합 S_t, S_v의 총수요량의 합계가 차량적재용량 K를 초과한다면, S_t와 S_v가 같은 경로에 포함될 경우 불법경로를 형성하게된다. 따라서 S_t와 S_v에 관련된 사슬의 양끝지점 간에 연결되는 호는 반드시 배제 되어야 한다.

S_t의 시작지점을 f_t, 끝지점을 ℓ_t라 하고, S_v의 시작지점을 f_v, 끝지점을 ℓ_v라 하자. 물론 $|S_t|=1$이면, f_t와 ℓ_t는 같은지점이 된다. 그러면 반드시 배제해야될 호 집합 W_j는 다음과 같이 표시된다.

$$W_j=\{(\ell_v, f_t), (\ell_t, f_v) \mid D(S_t)+D(S_v)>K, \ f_t, \ell_t, f_v, \ell_v \neq n, \ t=1, \cdots r, \ v=1, \cdots r, t \neq v \}$$

따라서 4.2항에서 언급한 E_j는 다음과 같이

수정된다.

$\bar{E}_j = E_j \cup W_j$

4.4 가능해가 존재하지 않을 후보부분문제의 형성방지

정리 3. 문제목록의 부분문제 h에서 파생될 M개의 후보부분문제 가운데 $D(S_t) > K$인 부분집합 S_t가 후보부분문제 j^*에서 존재한다면, j^*보다 나중에 생성될 후보부분문제 $j\,(j=j^*+1, \cdots, M)$에는 $D(S_t) > K$인 부분집합 S_t가 반드시 존재하게 된다.

증명. 4.2항에서 기술한 분지방안에 의해 $I_{j^*} \subset I_j,\ j=j^*+1, \cdots, M$ 이다. 그러므로 $j > j^*$인 모든 후보부분문제 j에는 $D(S_t) > K$인 부분집합 S_t가 반드시 존재한다.

그런데 후보부분문제 j에서 I_j의 호들로 연결된 지점들의 부분집합 S_t에 해당되는 총수요량 $D(S_t)$가 차량적재용량 K보다 크면, 즉 $D(S_t) > K$이면 후보부분문제 j는 가능해를 갖지 못한다. 따라서 부분문제 h에서 파생되는 후보부분문제 j를 풀기 이전에 미리 $D(S_t) > K$를 만족하는 부분집합 S_t가 존재하는가를 미리 확인함으로써, 정리 3에 의해서 가능해가 존재하지 않을 후보부분문제의 형성을 방지할 수 있다.

이 방안은 Laporte, et al. (1986)의 단계 6을 불필요하게 만들 뿐 아니라, 가능해가 존재하지 않을 $M-j^*+1$개의 후보부분문제들에 대한 계산을 생략시킨다.

5. 해법

본 연구의 해법을 설명하는데 필요한 용어부터 우선 정의하기로 한다.

Z^* : 여태까지 구해진 (VRP)의 가장 좋은 가능해에 의한 목적함수 값으로서 분지한계법의 상한

Z_h : h번째 문제목록에 있는 특수수송문제의 목적함수값

I_h : h번째 문제목록에 있는 특수수송문제에 부가된, 반드시 연결되도록 설정된 호의 집합, 즉 $x_{ij}=1$로 설정된 호(i, j)의 집합.

E_h : h번째 문제목록에 있는 특수수송문제에 부가된, 반드시 연결되지 못하도록 설정된 호의 집합, 즉 $x_{ij}=0$으로 설정된 호(i, j)의 집합.

계산절차는 다음과 같다.

단계 1. 초기화(initialization)

(1) 두개의 대리점 i와 j의 수요량의 합이 차량적재용량 K를 초과하면, 이 두개의 대리점이 서로 연결되지 못하도록 두 대리점간의 운행비용 c_{ij}를 무한대로 둔다. 즉 $d_i+d_j > K$이면, $c_{ij} = \infty\ (i, j=1, \cdots, n-1)$

(2) VRP문제에 대한 적절한 발견적기법을 이용하여 초기해를 구하고, 이 해에 의한 목적함수값을 Z^*의 초기값으로 설정한다. 본 연구에서는 저자(1987)가 개발한 지점위치 이동절차라는 발견적기법을 사용하였다.

(3) $I_1 = E_1 = 0$으로 두고 해당되는 특수수송문제를 풀어서 목적함수값 Z_1를 구한다. 특수수송문제의 해법은 3장에서 기술되었다.

1) 만일 $Z_1 \geq Z^*$이면, 초기해가 최적해가 되므로 끝난다.

2) 아니면, 해가 불법경로를 형성하는지 조사한다.

가. 만일 불법경로가 없으면, 이때의 해가 최적해가 되고 끝난다.

나. 그렇지 않으면, 이 특수수송문제를 문제목록에 넣고 단계 2로 간다.

2 단계. 탐색(search)

만일 문제목록이 비어 있으면 끝난다. 이때의 해가 최적해이다. 그렇지 않으면, 문제목록에서 부분문제 h를 선택한다. 이때 Z_h가 가장 작은 문제를 선택한다.

단계 3. 분지(branching)

선택된 부분문제 h의 해는 불법경로를 갖고 있다. 따라서 불법경로 하나를 선택하여, 그 불법경로가 없는 해를 얻기위하여 현재의 부분문제에 제약을 가함으로써 여러개의 후보부분문제를 파생시킨다. 이때 파생되는 후보부분문제 j에는 특정 호(arc)를 반드시 연결하거나 연결하지 못하도록 제약이 가해진다. 즉 I_j, E_j가 부

가된다. 불법경로의 선택과 I_j, E_j를 부가해서 여러개의 후보부분문제를 만드는 분지작업은 4장에서 언급한 분지전략에 의하여 이루어진다.

파생되는 각각의 후보부분문제 j에 대해서 단계 4와 단계 5를 수행한다.

모든 후보부분문제를 다 고려한 후에는 단계 6을 수행한다.

단계 4. 한계(bounding)

Z_j를 계산한다.

1) $Z_j \geq Z^*$이면, 그 다음 후보부분문제에 대해 단계 4를 수행한다.

2) 아니면, 단계 5로 간다.

단계 5. 경로의 합법성 검토(feasibility check)

1) 만일 현재의 해가 불법경로를 갖고있지 않으면, 이 해는 현재까지의 해 중에서 가장 좋은 가능해가 되므로, $Z^* = Z_j$ 로 두고 이때의 경로를 기억시킨다.

2) 그렇지 않으면, 이 후보부분문제 j를 문제목록에 삽입하고 그다음 후보부분문제에 대해 단계 4를 수행한다.

단계 6. 문제목록의 정리(memory recovery)

만일 문제목록에 들어있는 부분문제들의 수가 일정한 수치에 도달하게 되면, 문제목록에서 $Z_h \geq Z^*$인 모든 부분문제 h를 제거시키고 단계2로 간다. 이것은 제한된 기억공간을 효율적으로 활용하기 위한 방안이다.

이 분지한계법을 다음 예제에 적용하여 보기로 하자.

한국상사의 본점은 지역 5에 위치해 있고, 지역 1부터 지역 4까지 4군데의 지역에 있는 대리점에 적재용량이 3000kg인 차량들을 이용하여 제품을 배달하고자 한다. 대리점의 주문량과 각 지점간의 거리자료가 표 1, 표 2와 같이 주어져 있다. 본점을 출발한 차량들이 최단거리로 제품을 대리점에 배달하고 돌아올 제품배달 경로와 필요차량수를 구하고자 한다.

표 1 대리점 주문량

(단위 : kg)

대 리 점	1	2	3	4
주 문 량	1200	1300	1500	1400

표 2. 각 지점간의 거리

출발지 \ 도착지	1	2	3	4	5
1	0	10	12	22	10
2	11	0	7	10	15
3	13	8	0	17	22
4	23	11	18	0	24
5	9	14	21	23	0

이 문제를 본 해법에 의해 풀면 최적해는 다음과 같다.

총 운행거리=91

차량경로

5 → 1 → 3 → 5

5 → 2 → 4 → 5

차량경로수= 2

그리고 해 산출 과정을 그림으로 표시하면 그림 1과 같다.

그런데 저자 (1987)의 지점위치 이동절차라는 발견적기법에 의해 이 문제의 초기해를 구하면, 목적함수값 Z^*가 $Z^* = 91$가 되어, 최적해와 같게된다. 그리고 Clarke와 Wright의 절약방법에 의하면 $Z^* = 98$이 된다. 여기서는 발견적기법에 의한 초기상한 Z^*의 효과를 알아보기 위해 초기해를 구하지 않은 상태에서 시작하였다. 이 예제를 통해서 알 수 있는 것은 효율적인 초기해 산출방법에 따라서도 본 분지한계법의 효율성이 크게 좌우된다는 사실이다.

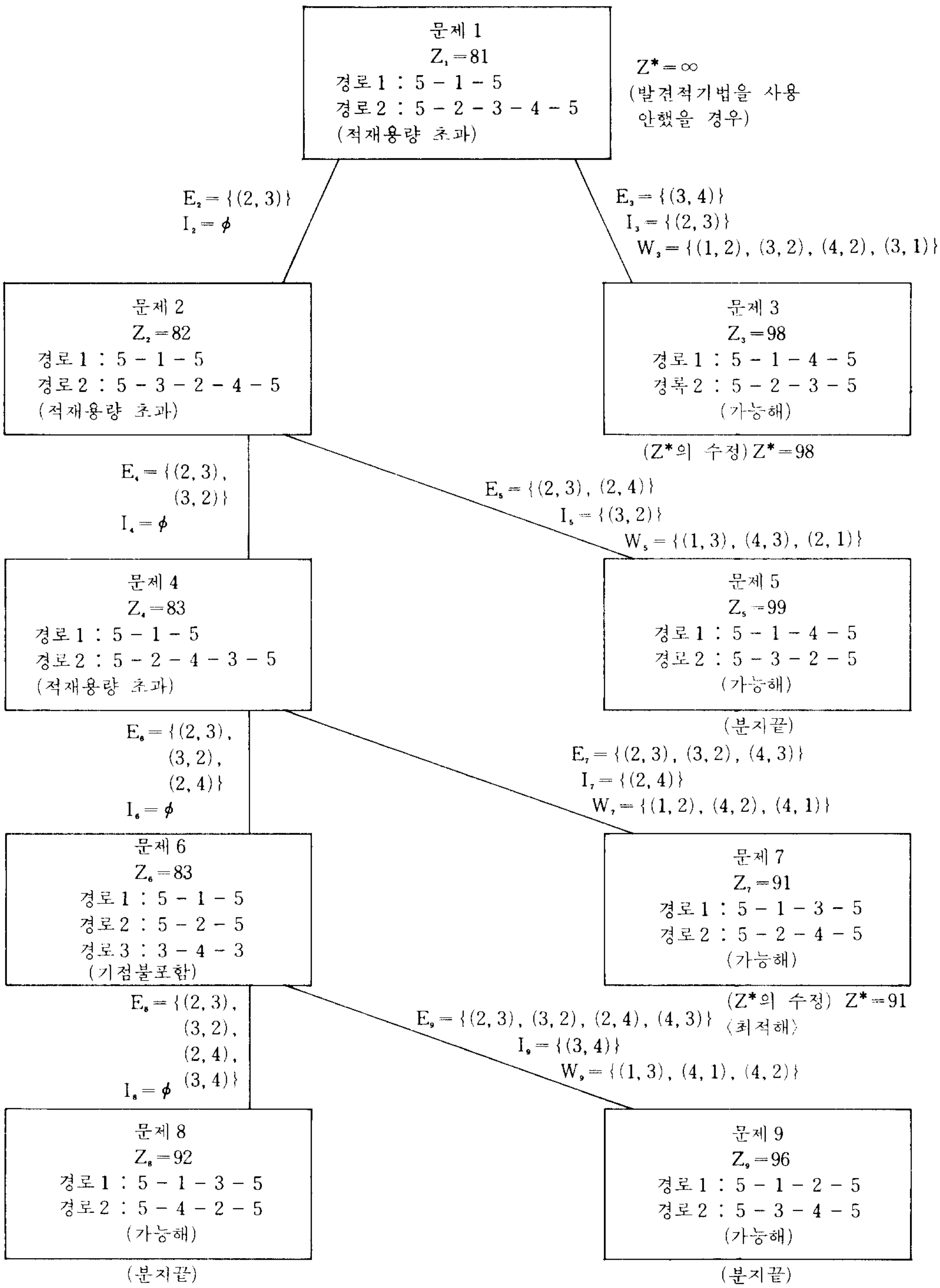
6. 결론

본 연구는 Laporte et al. (1986)이 다루었던 비대칭 차량경로문제에 대해서, 최적차량경로수도 함께 결정할 수 있는 수리모형에 입각한 최적해법으로서 효율적인 분지한계법을 개발하였다.

해법의 효율성을 재고시키기 위해서 다음 사항에 중점을 두었다.

첫째, 차량경로문제에 내재되어 있는 특수수송문제를 부분문제로 사용하고, 그 문제에 대한

그림 1. 분지한계법에 의한 해 산출과정



원-쌍대기법을 개발하였다.

둘째, 차량적재용량 제한조건을 활용하여 풀어야 할 후보부분문제 수를 줄이기 위한 분지방안을 제시하였다.

특히 특수수송문제는 차량경로문제 뿐만 아니라 복수외판원문제에도 내재되어 있기 때문에 본 연구에서 개발한 방법이 그 문제에도 잘 적용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. 송성헌, 차량경로비용을 고려한 단일 분배센타 입지선정문제, 서울대학교대학원 공학박사학위논문(1987).
2. Bellmore, M. end Malone, J.C., "Pathology of Traveling Saleman Subtour Elimination Algorithms," *Ops. Res.*, 19(1971) 278-307.
3. Bodin, L., B. Golden., A. Assad and M. Ball, "Routing and Scheduling of Vehicles and Crews. The State of the Art," *Comput. Ops. Res.*, 10(1983) 69-211.
4. Carpaneto, G. and P. Toth, "Some New Branching and Bounding Criteria for the Asymmetrical Travelling Salesman Problem," *Manag. Sci.*, 26 (1980) 736-743.
5. Christofides, N., A. Mingozzi. and P. Toth, "Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem, Based on Spanning Tree and Shortest Path Relaxations", *Math. Prog.*, 20 (198lb) 255-282.
6. Clarke, G. and J.W.Wright,"Sceduling of Vehicles from a Central. Depot to a Number of Delivery Points," *Ops.Res.*, 12(1964) 568-581.
7. Dantzig, G. B. and J. H. Ramser, "The Truck Dispatching Problem," *Management Sci.*, 6 (1959) 80-91.
8. Laporte, G., M. Desrochers and Y. Nobert, "Two Exact Algorithm for the Distance-Constrained Vehicle Routing Problem," *Networks*, 14 (1984) 161-172.
9. Laporte, G., H. Mercure and Y. Norbert, "An Exact Algorithm for the Asymmetrical Capacitated Vehicle Routing ; roblem," *Networks*, 16 (1986) 33-46.
10. Laporte, G., Y. Nobert and M. Desrochers, "Optimal Routing under Capacity and Distance Restricitions," *Ops.Res.*, 33(1985) 221-227.
11. Lenstra, J. K. and A.H.G.Rinnooy Kan, "Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems," *Networks*, 1l (1981) 221-227.
12. Magnanti, T.L., "*Combinatorial Optimization and Vehicle Fleet Planning : Perspective and Prospects*," 1l (1981) 179-213.
13. Murty, K. G., *Linear and Combinatorial Programming*, John Wiley & Son, Inc : New York (1976).
14. Schrage, L., "Formulation and Structure of More Complex/Realistic Routing and Scheduling Problems," *Networks*, 1l (1981) 229-232.
15. Szware, W., "The Transportation, Paradox," *Naval Res. Logistics Q.*, 18 (1971) 185-202.