

## 수준에서의 변화에 적응하는 구조모형

### An Adaptive Structural Model When There Is A Major Level Change

전 덕 빈\*

#### Abstract

In analyzing time series, estimating the level or the current mean of the process plays an important role in understanding its structure and in being able to make forecasts. The author studies the class of time series models where the level of the process is assumed to follow a random walk and the deviation from the level follow an ARMA process. The estimation and forecasting problem is formulated in a Bayesian framework and uses the Kalman filter to obtain forecasts based on estimates of level. In the analysis of time series, we usually make the assumption that the time series is generated by one model. However, in many situations the time series undergoes a structural change at one point in time. For example there may be a change in the distribution of random variables or in parameter values. Another example occurs when the level of the process changes abruptly at one period. In order to study such problems, the assumption that level follows a random walk process is relaxed to include a major level change at a particular point in time. The major level change is detected by examining the likelihood ratio under a null hypothesis of no change and an alternative hypothesis of a major level change. The author proposes a method for estimation the size of the level change by adding one state variable to the state space model of the original Kalman filter. Detailed theoretical and numerical results are obtained for the first order autoregressive process with level changes.

#### 1. 서론

시계열의 구조를 이해하고 적합한 예측을 하려면 underlying process의 수준, 증감경향, 계절적인 요소(level, trend, seasonal component)들의 평가가 중요하다. 과거 많은 논문에서 이 점을 강조하였으며, 특히 1984년 Harvey[9]에서 structural model의 중요성과 응용력을 볼 수 있다. 위의 세가지 형태의 구성요소들중 증감 경향과 계절적인 요소들은 경우에 따라서 존재하게 되겠지만, 수준은 모든 시계열의 underlying process에 존재한다고 볼 수 있다.

일반적으로 시계열의 분석시 한가지 underlying process에 의해 발생된다고 가정하여 모형

을 설정한다. 그러나, 많은 경우 시계열은 어떤 시점에서 구조적인 변화(structural change)를 겪기 쉽다. 그러한 경우 모형을 구성하는 계수값이나 확률변수등의 분포에서 변화가 나타나거나, 또는 각 구성요소에서의 변화가 일어날 수 있다. 특히 각종 경제지수 또는 제품 수요의 시계열이 오랜시간동안 한가지 형태의 underlying process를 따른다고 가정하기는 어렵다.

본 논문에서는 underlying process가 수준과 관측오차(measurement noise)로서 구성되고, 수준은 random walk process를 따르며, 관측오차는 Box와 Jenkins의 ARMA(Autoregressive and Moving Average process)를 따르는 모형이 소개된다. 이 모형은 Gersh와 Kitagawa[7]와 유사한 형태이나, 본 논문에서는 모형의 구조 뿐만 아니라 Box-Jenkins 모형과의

\* 경희대학교 산업공학과

관계를 강조하며, Kalman Filter를 사용하여 시계열을 관찰함에 따라 수준을 추정하여 그 함수값으로서 예측하는 법이 제시된다.

또한 random walk process를 따르던 수준이 어느 순간 갑자기 급격한 증가 또는 감소등의 변화(major level change or interruption)를 일으킨 후 다시 그점의 process를 따르는 경우, 그 변화를 감지하고, 변화량을 추정하여, 그 변화에 적응하여 반응하는 예측 시스템을 디자인한다. 어떤 의미에서 본 논문에서 어느 순간 수준에서의 증감 변화를 모형화한 것은, 변화가 있는 경우와 없는 경우의 두가지 모형을 비교한 다른 점에서, Harrison과 Stevens[8]의 multi-process모형과 유사한 형태로 볼 수 있다.

## 2. 수준이 random walk process를 따르는 ARMA모형

관찰할 수 없는 수준  $l_t$ 는 그 전 시각의 수준  $l_{t-1}$ 과 그 기대값은 같으나 교란변수(perturbation noise)  $b_t$ 에 의하여 변화를 일으키는 random walk process를 따르며, 시간  $t$ 에 관찰 가능한 확률변수  $Z_t$ 가  $l_t$ 로부터 벗어난 양(deviation)이 ARMA( $p, q$ ) process를 따르는 다음과 같은 모형을 생각하자.

$$\Phi(B)(Z_t - l_t) = \theta(B)a_t \quad (1a)$$

$$l_t = l_{t-1} + b_t \quad (1b)$$

$B$ 는 backshift operator이고  $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ ,  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ 로서 autoregressive와 moving average 계수들을 표시하며,  $\{a_t, t=1, 2, \dots\}$ 와  $\{b_t, t=1, 2, \dots\}$ 는 serially uncorrelated noise 들이고  $l_0$ 와  $\{a_t\}$ ,  $l_0$ 와  $\{b_t\}$ 는 서로 독립이라 가정한다.  $l_t$ 가 상수인 경우 식(1a)는 stationary ARMA( $p, q$ ) process이며 식(1b)가 추가됨으로서  $k = \max(p, q+1)$ 인 nonstationary ARIMA( $p, 1, k$ ) process가 된다.

Box-Jenkins의 identification과 estimation 과정은, stationary한 시계열로부터 sample mean을 뺀 후에, nonstationary한 시계열의 경우는

differencing을 한 후에 시행되어진다. 그러한 시행과정에서 예측시에 사용될 가장 중요한 요소중의 하나인 수준의 추정을 교묘히 피하고 있다. 반면 위와 같은 형태로 모형화하여 Kalman Filter의 결과를 적용할 경우  $Z_t$ 의 값이 관찰됨에 따라  $l_t$ 를 추정하여 그 함수값으로서 예측이 가능하여진다.

식(1a)의  $Z_t - l_t$ 를  $d_t$ 로서 정의하면 위 모형을 Gersh와 Kitagawa[7], Harvey[9]의 structural model의 측면에서 해석하는 것이 가능하다.

$$Z_t = l_t + d_t \quad (2a)$$

$$l_t = l_{t-1} + b_t \quad (2b)$$

$$\Phi(B)d_t = \theta(B)a_t \quad (2c)$$

즉 underlying process는 random walk를 따르는 수준으로서 구성되며 관측오차는 다양한 형태를 수용할 수 있는 ARMA process이다. 식(2a, b)는 Harrison과 Stevens[8]의 dynamic linear model의 가장 간단한 형태로서  $Z_t$ 의 minimum mean square error forecast는 널리 사용되는 지수이동평균법(exponentially weighted moving average)의 결과로서 나타난다(Harvey[9], Oliver[13] 참조). 또한  $\Phi(B) = \theta(B) = 1$ 이고  $l_t$ 가 상수일 경우는 regression model의 가장 간단한 형태인 절편(intercept) 또는 수준만이 존재하는 모형이 된다.

식(2a, b)는 다음과 같이 dynamic linear model로서 재구성하는 것이 가능하다.

$$Z_t = H' S_t \quad (3a)$$

$$S_t = F S_{t-1} + G W_t \quad (3b)$$

$$H' = [1, \theta, \dots, \theta, 1]$$

$$F = \begin{bmatrix} \phi_1 & 10000 \\ \phi_2 & 01000 \\ \cdot & 00 \cdot 00 \\ \cdot & 00010 \\ \phi_k & 00000 \\ 0 & 00001 \end{bmatrix}, S_t = \begin{bmatrix} d_{t,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{t,k} \\ l_t \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -\theta_{k-1} & \cdot \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_t = \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix}$$

$S_0$ 와  $W_t$ 의 확률분포를 가정할때, Kalman[11]의 Kalman Filter의 결과를 이용하여,  $\{Z_t, Z_0,$

$\dots, Z_t\}$ 의 관찰시  $S_t$ 의 사후분포 (posterior distribution)에 대한 추정이 가능하며  $Z_{t+k}$ 의 시간  $t$ 에서의 예측치는 수준과 관측오차의 시간  $t$ 에서의 사후분포의 기대치의 합으로서 나타난다.

### 3. 수준에서의 급격한 변화가 발생한 경우의 모형

이제까지 수준이 random walk process를 따르는 경우를 생각하였다. 그러나 어떤시점  $m$ 에서 수준이 급격한 증감변화를 겪고 다시 그전의 process로 되돌아가는 상황을 식(2b)를 수정하여 다음과 같이 모형화 할 수 있다.

$$Z_{t+1} = l_{t+1} + d_{t+1} \quad t=0,1,2,\dots,T-1 \quad (4a)$$

$$\phi(B) d_{t+1} = \theta(B) a_{t+1} \quad (4b)$$

$$l_{t+1} = \begin{cases} l_t + b_{t+1} & t \neq m \\ l_t + \Delta + b_{t+1} & t = m \quad 1 \leq m \leq T-1 \end{cases} \quad (4c)$$

정규분포를 갖는 확률변수  $\Delta$ 는 변화량을 나타내며 역시 정규분포를 갖는  $l_0$ ,  $\{a_t\}$ ,  $\{b_t\}$ 와 서로 독립이고,  $\{a_t\}$ 와  $\{b_t\}$ 는 각각 serially uncorrelated된 정규분포를 가지며 기대치 0와 각각의 분산  $\sigma_a^2$ 와  $\sigma_b^2$ 을 가정한다.

수준의 급격한 변화를 감지하고, 변화량을 추정하여 적용해 나가는 예측 시스템의 디자인 문제를 고려할 때, 시간의 흐름에 따라 그 자료를 관찰하여 현재까지 주어진 시간중에서 어느 시점에서 수준이 급격한 변화를 일으켰는가를 추정하여야 하는 온라인 예측시스템에서는, 미지수  $m$ 에 사전분포 (prior distribution)를 가정하여,  $\Delta$ 와 더불어 동시에 추정하는 것이 곤란하다. 오히려 두단계로 문제를 구분하여 일단계로 우선 온라인 시스템을 통하여 얻게 되는  $Z_t$ 의 값과 그 밖의 이용가능한 모든 정보를 활용하여 변화시점  $m$ 을 추정 확인한 후, 두번째 단계로 발견된 변화시기를 활용하여 변화량을 추정하는 방법을 생각할 수 있다.

#### 3.1 급격한 수준변화 시기의 감지문제

어느 시점에서 수준에서의 급격한 변화가 일

어났는가의 문제는 그 시기에 식(4a, b, c)의 모형이  $\Delta=0$ 인가 또는  $\Delta \neq 0$ 가의 문제로서 귀착된다. 따라서 그 모형에 대한 다음과 같은 가설 검정을 고려할 수 있다.

$$H_0 : \Delta=0 \quad \text{v. s.} \quad H_1 : \Delta \neq 0$$

현재까지 관찰된  $\{z_1, z_2, \dots, z_T\}$ 의 정보가 있을 경우 위의 가설하에서의 likelihood의 ratio는

$$\frac{f(Z_T, \dots, Z_{m+1}/z_m, \dots, z_1; H_0)}{f(Z_T, \dots, Z_{m+1}/z_m, \dots, z_1; H_1)} \quad (5)$$

$m$ 이 미지수이므로  $m=1, 2, \dots, T-1$ 에 관하여 차례로 위의 likelihood ratio를 적용하여 급격한 수준 변화의 시기를 발견하는 것이 가능하다.

Bayes factor  $B_t$ 를 다음과 같이 표시할때

$$B_t = \frac{f(Z_t/z_{t-1}, \dots, z_1; H_0)}{f(Z_t/z_{t-1}, \dots, z_1; H_1)} \quad (6)$$

식(5)는  $B_T \times B_{T-1} \times \dots \times B_1$ 과 같다.

위의 likelihood ratio를 고려하여 변화시기를 판별할 경우  $B_t$ 중의 어느 한개의 값이 매우 크거나 작은 경우 전체 likelihood ratio의 값을 좌우하게 되므로 그 변화를 간과하기 쉽다. 따라서  $B_t$ 를 개별적으로 고려하는 것이 도움이 될 수 있으며, 저자의 경험에 비추어 볼 때  $B_{m+1}$ 과  $B_{m+2}$  두개의 값을 비교하여 판별이 가능하다.  $B_{m+1}$ 과  $B_{m+2}$  모두 0에 가까운 값을 갖는 경우 시간  $m$ 에 수준에서의 급격한 변화가 발생하여  $\{z_{m+1}, z_{m+2}\}$ 의 값에 그 변화가 나타났음을 의미하며,  $B_{m+1}$ 과  $B_{m+2}$  모두 양의 큰 값인 경우는 변화가 없는 것으로,  $B_{m+1}$ 은 0에 가까우나  $B_{m+2}$ 가 1 이상의 큰 값을 가질 경우는  $z_{m+1}$ 로부터는 변화가 나타났으나  $z_{m+2}$ 를 관찰함으로써 수준에서의 급격한 변화가 일어났던 것이 아니며  $z_{m+1}$ 의 경우 a single outlier 이었음으로 해석된다. 물론 오관의 경우 손실이 막대하고 판단을 내릴때까지의 시간적인 여유가 충분한 경우는 가능한 많은 시계열을 관찰하여 ratio를 고려하여야 한다. 식(4)의 모형에서  $\Phi(B) = \theta(B) = 1$ ,  $\sigma_b = 0$ 인 매우 간단한 경우에 Worsley [15]는 관계된 likelihood ratio의 특성을 분석하였으며, 일반적인 경우에 관계된 likelihood ratio는 매우 복잡한 값으로서 그 통계적인 특성은 현재까지 미해결 과제로 남아있다.

### 3.2 변화량의 추정

변화가 일어난 시기  $m$ 을 알고 있는 경우 변화량의 추정은 식(3a, b)의 state variable에  $\Delta$ 를 포함시키고  $F$ 를 시간  $m$ 에 변화시킴으로서 가능하다.

$$Z_{t+1} = H' S_{t+1} \quad (7a)$$

$$S_{t+1} = F_t S_t + G W_{t+1} \quad (7b)$$

$$H' = [1, 0, \dots, 0, 1, 0], \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -\theta_{k-1} & \cdot \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_t = \begin{bmatrix} d_{t,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{t,k} \\ l_t \\ \Delta_t \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \end{bmatrix}, \quad \text{for all } t$$

$$F_m = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{for } t \neq m$$

식(7b)에서  $\Delta_{t+1} = \Delta_t = \dots = \Delta$ 이며 시간  $m$ 에 단 한번 수준에 접속되어  $l_{m+1}$ 를  $l_{m+1} = l_m + \Delta + b_{m+1}$ 로서 변화시킨다. 따라서 수준에서의 급

격한 변화후에  $Z_t$ 를 관찰하여  $S_t$ 의 사후분포를 유도하며, 따라서  $\Delta$ 의 사후분포도 쉽게 유도된다.  $d_t$ 가 AR(1) process를 따르는 경우 Kalman Filter에 의한 사후분포의 기대치와 분산의 순환 방정식과 예측식은 다음과 같으며, Jun과 Oliver [10]는  $d_t$ 가 white noise인 경우를 다루었다.

$\phi(B) = 1 - \phi B$ ,  $\theta(B) = 1$ 인 경우의 순환관계식

$$\text{표기 : } \hat{l}_t = E\{l_t / z_t, \dots, z_1\}$$

$$f_{t,k} = E\{Z_{t+k} / z_t, \dots, z_1\}$$

$$\hat{d}_t = E\{d_t / z_t, \dots, z_1\}$$

$$v_{t,k} = \text{Var}\{Z_{t+k} / z_t, \dots, z_1\}$$

$$\hat{\Delta}_t = E\{\Delta / z_t, \dots, z_1\}$$

$$\hat{\Sigma}_t = \text{Cov}\{[l_t, d_t, \Delta]', [l_t, d_t, \Delta] / z_t, \dots, z_1\} / \sigma_a^2$$

$$\lambda = \sigma_b^2 / \sigma_a^2$$

$\Delta$ ,  $l_0$ ,  $\{a_t\}$ ,  $\{b_t\}$ 가 서로 독립임을 가정할 때, 시간 0에서  $l_0$ ,  $d_0$ ,  $\Delta$ 의 사전분포의 기대치로서  $\hat{l}_0$ ,  $\hat{d}_0$ ,  $\hat{\Delta}_0$ 과 분산으로서  $\hat{\Sigma}_0$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\mu}_0 & 0 \\ \hat{\mu}_0 & \hat{p}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{q}_0 \end{bmatrix}$$

식(7a, b)에 Kalman [11]의 결과를 적용하면  $\hat{\Sigma}_t$ 은 다음과 같은 형태로 나타나며

$$\hat{\Sigma}_t = \begin{bmatrix} \hat{p}_t & -\hat{p}_t & -\hat{w}_t \\ -\hat{p}_t & \hat{p}_t & \hat{w}_t \\ -\hat{w}_t & \hat{w}_t & \hat{q}_t \end{bmatrix}$$

사후 분포에 대한 Kalman Filter 순환관계식은 다음과 같다.

$t > m$  경우 :

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{t+1} \\ \hat{l}_{t+1} \\ \hat{\Delta}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \hat{d}_t \\ & \hat{l}_t \\ & \hat{\Delta}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t^{(a)} \\ 1 - k_t^{(a)} \\ (1 - \phi) \hat{w}_t / h \end{bmatrix}$$

$$\times (z_{t+1} - \phi \hat{d}_t - \hat{l}_t) \quad (8a)$$

$$h = (1 - \phi)^2 \hat{p}_t + \lambda + 1 \quad (8b)$$

$$k_t^{(d)} = \{-\phi(1-\phi)\hat{p}_t + 1\}/h \quad (8c)$$

$$\hat{p}_{t+1} = \{(\phi^2\lambda + 1)\hat{p}_t + \lambda\}/h \quad (8d)$$

$$\hat{q}_{t+1} = \hat{q}_t - (1-\phi)^2\hat{w}_t^2/h \quad (8e)$$

$$\hat{w}_{t+1} = (\phi\lambda + 1)\hat{w}_t/h \quad (8f)$$

$t=m$  경우 :

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{m+1} \\ \hat{l}_{m+1} \\ \hat{\Delta}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi\hat{d}_m \\ \hat{l}_m + \hat{\Delta}_o \\ \hat{\Delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_m^{(d)} \\ 1 - k_m^{(d)} \\ \hat{q}_o/h \end{bmatrix} \times (z_{m+1} - \phi\hat{d}_m - \hat{l}_m - \hat{\Delta}_o) \quad (9a)$$

$$h = (1-\phi)^2\hat{p}_m + \hat{q}_o + \lambda + 1 \quad (9b)$$

$$k_m^{(d)} = \{-\phi(1-\phi)\hat{p}_m + 1\}/h \quad (9c)$$

$$\hat{p}_{m+1} = \{(\phi^2\hat{q}_o + \phi^2\lambda + 1)\hat{p}_m + \hat{q}_o + \lambda\}/h \quad (9d)$$

$$\hat{q}_{m+1} = \hat{q}_o - \hat{q}_o^2/h \quad (9e)$$

$$\hat{w}_{m+1} = \{-\phi(1-\phi)\hat{p}_m + 1\}\hat{q}_o/h \quad (9f)$$

$t < m$  경우는  $t > m$  경우에서  $\hat{w}_t = 0$ 를 대입하면 된다. 결과적으로  $\hat{\Delta}_t = \hat{\Delta}_o$ 과  $\hat{q}_t = \hat{q}_o$  으로서 시간 0에  $\Delta$ 와  $l_t$ ,  $d_t$ 가 독립임을 가정하면 수준의 급격한 변화가 나타나기 시작하는  $z_{m+1}$ 을 관찰할 때까지  $\Delta$ 의 시간 0에 주어진 사전분포는 변화하지 않는다. 또한  $\Delta = 0$ 인 식 (3a, b) 모형의 경우 Kalman Filter 순환식은  $\Delta$ 를 제외한 나머지 식 (8a, b, c, d)로서 나타난다.

시간  $t$ 에  $z_{t+k}$ 의 예측치와 그에 따른 분산은

$$f_{t,k} = \hat{l}_t + \phi^k \hat{d}_t, \quad t+k \leq m \text{ or } t \geq m+1 \quad (10a)$$

$$= \hat{l}_t + \phi^k \hat{d}_t + \hat{\Delta}_o, \quad t \leq m \text{ and } t+k \geq m+1 \quad (10b)$$

and

$$v_{t,k} = (1 + \phi^{2k} - \phi^k)\hat{p}_t + k\sigma_b^2 + \sigma_a^2(1 - \phi^{2k}) / (1 - \phi^2), \quad t+k \leq m \text{ or } t \geq m+1 \quad (11a)$$

$$= (1 + \phi^{2k} - \phi^k)\hat{p}_t + \hat{q}_o + k\sigma_b^2 + \sigma_a^2(1 - \phi^{2k}) / (1 - \phi^2), \quad t \leq m \text{ and } t+k \geq m+1 \quad (11b)$$

시간  $m$ 이전의  $Z_t$ 만이 관찰가능하고 수준에서의 급격한 변화가 일어난 이후의 값을 예측하고자 할 경우 식 (10b, 11b)에서와 같이  $\Delta$ 의 사전분

포의 기대치와 분산이 포함되어야 하며, 그밖의 경우에는 수준과 관계된 순환식에 그 효과가 자동적으로 포함된다. 또한 관찰치의 값과 무관한  $\hat{p}_t$ 은 오랜시간이 경과한 후에 다음의 값으로 수렴한다.

$$p^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_t = \frac{\lambda}{2} \times \frac{1+\phi}{1-\phi} \times \left[ -1 + \left\{ 1 + \frac{4}{\lambda(1+\phi)^2} \right\}^{1/2} \right] \quad (12)$$

#### 4. 계산실험 예

본 논문에서 제안한 방법들의 실패를 보이고자 Box와 Jenkins [3]에 실린 시계열  $D$ 의 처음 100개의 값중 71번째 값에 1을 더하여 a single outlier가 포함된 시계열을 구성하고, 71번째부터 100번째까지 각각 1을 더하여 수준에서의 급격한 변화를 갖는 시계열을 만들었다(그림 1 참조).

$\Phi(B) = 1 - \phi B$ 와  $\theta(B) = 1$ 인 식 (1a, b)의 모형을 시계열의 처음 50개에 적용한 결과,  $Cov(a_t, b_t) = 0$ ,  $\sum_o$ 은 식 (12)의  $p^*$ 를 사용하고,  $\phi = 0.87$ ,  $\hat{d}_o = 0$ ,  $\hat{l}_o = 8$ 을 가정할 때, maximum likelihood estimator로서  $\hat{\lambda} = 0.03$ ,  $\hat{\sigma}_a^2 = 0.075$ ,  $\hat{\sigma}_b^2 = 0.0023$ 와  $\hat{d}_{50} = -0.23$ ,  $\hat{l}_{50} = 8.53$ ,  $\hat{p}_{50} = 1.45$ 를 얻었다.  $\phi$ 도 자료로부터의 추정이 가능하나 추정과정을 간단히 하고자 Box-Jenkins의 결과를 활용하였다.

그림 2는 수준에서의 변화를 포함한 시계열의 나머지 50개에 식 (4a, b, c)의 모형을 적용  $H_o: \Delta = 0$ 와  $H_1: \Delta \neq 0$ 의 가설검정을 위하여  $B_{m+1}$ 과  $B_{m+2}$ 를  $m = 50, 51, \dots, 98$ 의 경우에 계산하여 나타냈다.  $H_1$ 하에서의  $\Delta$ 의 분포를  $N(0, 1)$ 를 가정하였을 때  $B_{m+1}$ 은 71, 78, 84, 92번째에서 1 이하로 떨어지나  $B_{m+2}$ 는 71번째에서만 1 이하로 떨어져 수준에서의 급격한 변화가 있었음을  $Z_{71}$ 과  $Z_{72}$ 를 관찰함으로써 감지한다. 결과는  $H_1$ 하에서의  $\Delta$ 의 확률분포에 민감치 않았다.

그림 3은  $\Delta$ 의 사전분포로서 기대치 0와 분산 1을 가정한 경우,  $\hat{\Delta}_t$ 과 그에 따른 95% 신

회귀값  $\hat{\Delta}_t \pm 1.96\sqrt{\hat{q}_t \hat{\sigma}_a^2}$ 을 나타내며,  $Z_{t1}$ 을 관찰하기까지는 사전분포로부터 변화가 일어나지 않고  $z_{t1}$ 이 순환관계식에 반영된 후  $\hat{\Delta}_{t1}$ 이 실제값 1에 근접하게 됨을 보여준다.

끝으로 그림 4에서는 수준에서의 급격한 변화가 있는 경우와  $z_{t1}$ 이 a single outlier인 경우에 대하여 조건부 확률  $Pr[\Delta > 0.8/z_{t1}, \dots, z_{t1}]$ 을 계산하였다.

그림 1. 71번째 크기 1의 급격한 수준의 변화가 존재하는 시계열과 a single outlier가 존재하는 시계열

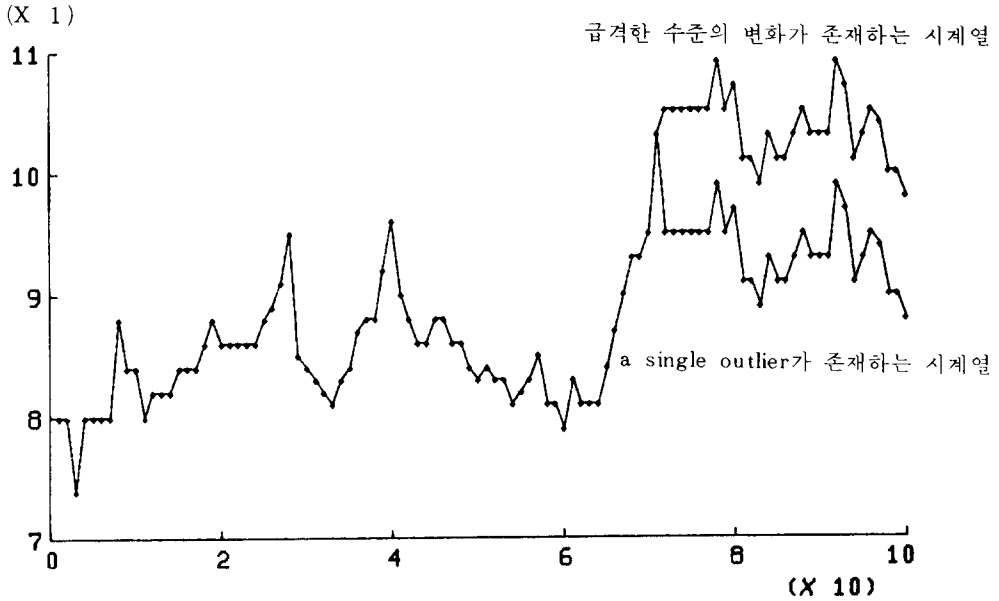


그림 2.  $\Delta \sim N(0.8, 1)$ 인 경우의  $B_{m+1}$ 과  $B_{m+2}$

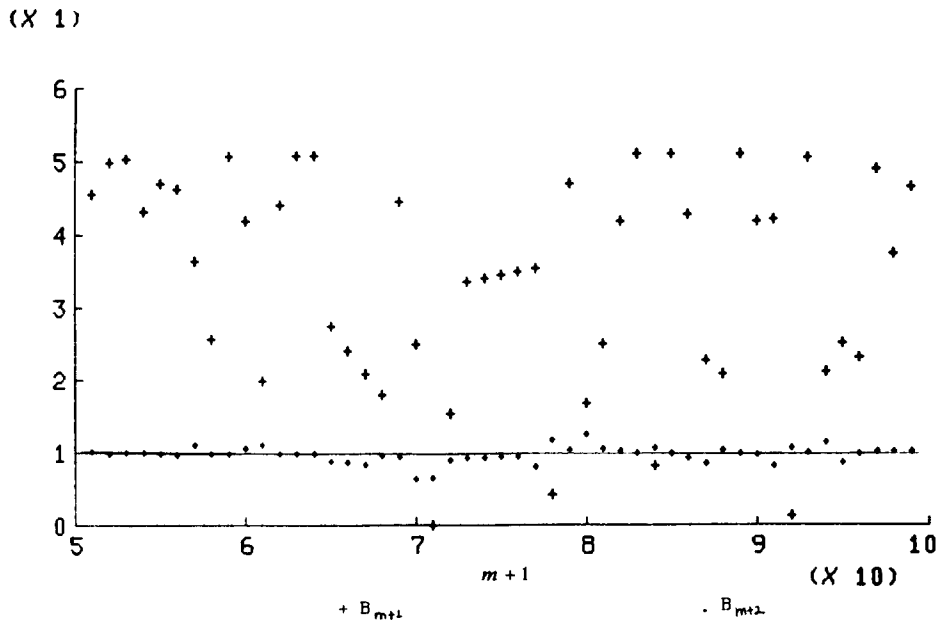


그림 3.  $\Delta$ 의 사전분포가  $N(0, 1)$ 인 경우의  $\Delta$ 의 사후분포의 기대치 및 95% 신뢰구간

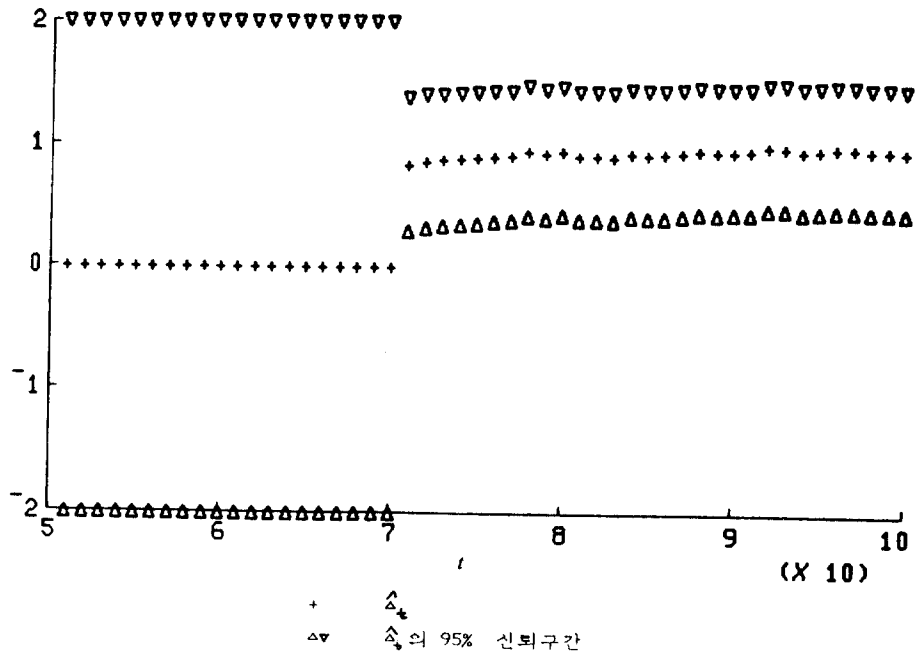
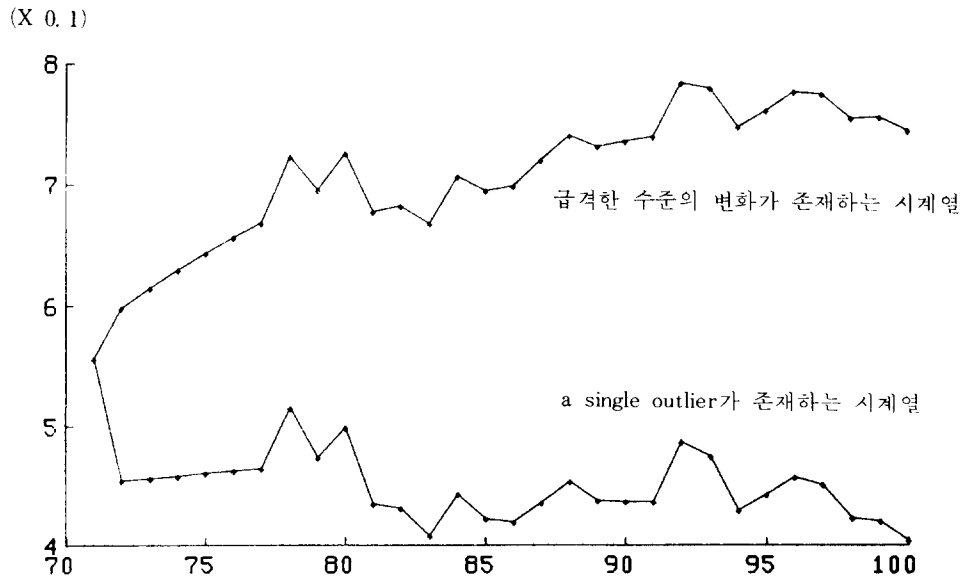


그림 4 급격한 수준의 변화가 존재하는 시계열과 a single outlier가 존재하는 시계열의 경우  $Pr(\Delta > 0.8 / z_1, \dots, z_1)$



## 참 고 문 헌

1. Anderson B.D.O. and Moore J.B., *Optimal Filtering*, Prentice-Hall ; New Jersey, 1979.
2. Barlow R.E., Durst M.J. and Smiriga N.G., "A Kalman filter model for determining block and trickle SNM losses," *Low -Probability/High-Consequence Risk Analysis*, Plenum Press ; New York and London, pp. 161-179, 1984.
3. Box G.E.P. and Jenkins G.M., *Time Series Analysis : forecasting and control*, Holden-Day, Oakland, 1976.
4. Broemeling, L.D., D. Moen, and D.Salazar, "Structural change in multivariate regression models," *Communications in Statistics*, vol. A14, no. 9, 1985.
5. Broemeling, L.D., and D.Moen, "The uncertainty of forecasting : models with structural changes versus those without changing parameters," *Communications in statistics*, vol. A14, no. 9, 1985.
6. Degroot M.M., *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill ; New York, 1970.
7. Gersch W. and Kitagawa G., "The prediction of time series with trends and seasonalities," *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 1, no. 3, pp. 253-264, July, 1983.
8. Harrison P.J. and Stevens C.F., "Bayesian forecasting," *Journal of Royal Statistical Society (B)*, vol. 38, no.3, pp.205-247, 1976.
9. Harvey A.C., "A unified view of statistical forecasting procedures," *Journal of Forecasting*, vol. 3, no. 3, pp. 245-275, 1984.
10. Jun D.B. and Oliver R.M., "Bayesian forecasts following a major level change in Exponential Smoothing," *Journal of Forecasting*, vol. 4, no.3, pp. 293-302.
11. Kalman R.E. "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 34-45, 1960.
12. Kalman R. E. and Bucy R. S., "Now results in linear filtering and prediction theory," *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
13. Oliver R.E., "Exponential Smoothing-I," *Operations Research Center Report*, UCB/ORC-84/5, Berkeley, 1984 ; also *Operations Research Letters*, vol. 3, no. 3, 1984.
14. Quandt R.E., "Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 55, pp. 324-330, 1960.
15. Worsley K.J., "On the likelihood ratio test for a shift in location of Normal populations," *Journal of the American Statistical Association*," vol. 74, no. 366, pp. 365-367, 1979.