

大韓造船學會誌
 第24卷 第4號 1987年 12月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 24, No. 4, December 1987

판요소의 탄성 대처짐 거동해석에 관한 연구

—증분 Galerkin법의 개발 및 응용—

백 점 기*

Analysis for Large Deflection Behaviour of Plate Elements

—Development and Application of Incremental Galerkin Method—

by

Jeom Kee Paik*

Abstract

In order to perform a detailed analysis of large deflection behaviour of a rectangular plate, an efficient semi-analytical method is developed in this paper. The method is called Incremental Galerkin Method.

This method is successfully applied to plates with initial deflection subjected to in-plane and out-of-plane loads to obtain the whole histories of the behaviour of these plates. Application of this method to rectangular plates with initial deflection is presented. Comparisons of results obtained by this method with those obtained by other methods are made and the validity of the method is demonstrated.

1. 서 론

선체를 구성하는 판요소는 각종 외하중을 받으며, 하중이 증가하게 되면 좌굴현상이나 대처짐으로 인한 복잡한 대처짐 거동을 보인다.

또한, 실제의 구조물은 보통 절단, 용접 등의 열가공에 의하여 진조되고 있으며, 그 결과 구조부재에는 초기부정이 필연적으로 발생한다. 이들 초기부정이 존재하는 구조물에 외력이 작용하면, 그 변형거동은 하중의 초기 단계에서부터 비선형성을 보인다.

선체와 같은 판구조물을 경제적이고 신뢰성 있게 설

계하고, 또한 안전성을 평가하기 위하여는 구조물을 구성하는 판요소에 대한 상기 거동을 상세히 해석할 필요가 있다.

이들 문제를 해석하는 방법으로는 크게 해석적인 방법과 수치적인 방법으로 분류할 수 있다. 전자는 판요소의 거동을 지배하는 미분방정식을 해석적으로 푸는 방법으로 Galerkin법 등이 이에 속한다. 이 방법은 비교적 간단한 하중상태에 대하여는 높은 정도로서 효율적으로 해를 얻을 수 있으나, 복잡한 하중상태에 대하여는 해를 얻기가 대단히 곤란한 경우가 있다. 특히, 좌굴파형이 복잡한 전단좌굴 등에 대하여는 높은 정도의 해를 얻기 위하여 가정하는 변위함수(처짐식)의 항

수를 많이 채용할 필요가 있으며, 이 경우는 미지수에 대한 연립 3차방정식을 풀기가 대단히 어렵고, 풀었다고 하더라도 3개의 근 중에서 경해를 결정하기가 곤란한 경우가 있다.

이에 비해, 후자의 방법은 컴퓨터의 발달과 함께 급속하게 보급된 방법으로서 비교적 복잡한 형상 및 하중상태하에 있는 판요소의 거동도 높은 정도로 해석 가능한 방법으로, 이 방법에는 유한요소법등이 있다.

그러나, 판요소의 좌굴 및 좌굴후 거동과 같은 비선형 거동해석에 수치적 방법을 적용하는 경우에는 막대한 계산시간이 소요되어 비경제적인 경우가 있으며, 특히 판요소의 최적설계에는 각종 parameter를 변화시킨 series계산을 행할 필요가 있으나, 이 경우에 유한요소법과 같은 수치적 방법을 적용한다는 것은 비실용적인 경우가 많다. 이같은 관점에서, 최근에는 해석적인 방법과 수치적인 방법을 부분적으로 병용하는, 소위 semi-analytical method에 대한 연구가 추진되고 있는 것이 세계적인 추세인 것 같다.

본 연구에서는, 선체와 같은 판구조물을 구성하는 판요소의 탄성대처점 거동을 높은 정도로 효율적으로 해석하기 위하여, 일종의 semi-analytical method인 증분 Galerkin법(Incremental Galerkin Method)을 개발하고, 이것을 면내 및 횡하중을 받는 주변단순지지의 사각형 판에 적용한다. 또한, 해석예를 통하여 그 정도와 유용성을 보인다.

2. 판요소의 지배방정식과 Galerkin법

Fig. 1에 나타내고 있는 초기처짐을 가진 판요소의 대처점 거동을 지배하는 방정식은 평형방정식, 식 (1)과 적합조건식, 식 (2)로 구성되어 있다[1].

$$D\nabla^4 w - t\{F_{,yy}(w+w_0)_{,xx} + F_{,xx}(w+w_0)_{,yy} - 2F_{,xy}(w+w_0)_{,xy}\} + q = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^4 F - E(w_{,xy}^2 - w_{,xx} \cdot w_{,yy} + 2w_{0,xy} \cdot w_{,xy} - w_{0,xx} \cdot w_{,yy} - w_{0,yy} \cdot w_{,xx}) = 0 \tag{2}$$

여기서,

w_0 = 초기처짐, w = 부가처짐

F = 응력함수로서 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sigma_x = F_{,yy}, \quad \sigma_y = F_{,xx}, \quad \tau_{xy} = -F_{,xy} \tag{3}$$

q = 판요소에 작용하는 단위면적당의 횡하중

t = 판두께

$$D = \text{굽힘강성} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

ν = Poisson 비

E = 탄성계수

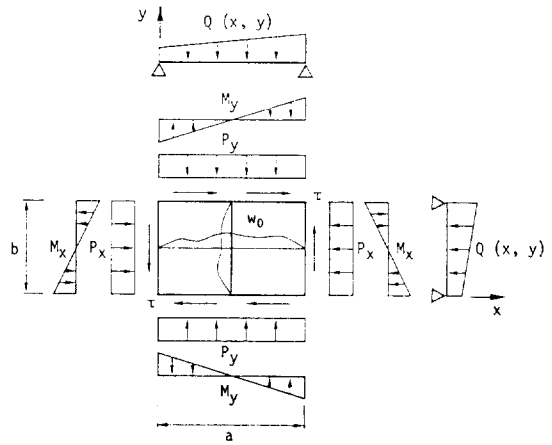


Fig. 1 A rectangular plate with usual initial deflection and general inplane and lateral loads

또한, 윗식에서 $F_{,xx}$ 등은 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ 등을 나타낸다.

식 (1)과 (2)를 풀면 판요소의 탄성대처점 거동을 해석할 수 있는데, 이를 위해 종래의 Galerkin 법에서는 먼저 처짐, w 와 초기처짐, w_0 를 다음과 같이 가정한다.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} f_m(x) g_n(y) \tag{4}$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} f_m(x) g_n(y) \tag{5}$$

여기서, $f_m(x)$ 와 $g_n(y)$ 는 판요소의 경계조건을 만족하도록 가정되는 함수이고, A_{mn} 은 미지계수이며 B_{mn} 은 기지의 상수이다.

식 (4)와 식 (5)를 식 (2)에 대입하여 응력함수, F 에 대하여 풀면 F 는 다음과 같이 구해진다.

$$F = Et^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} p_i(x) q_j(y) \tag{6}$$

식 (6)에 하중조건을 만족하는 항을 고려하면, 응력함수, F 는 다음과 같이 된다.

$$F = F_p + Et^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} p_i(x) q_j(y) \tag{7}$$

여기서, F_p 는 하중조건을 만족하는 특이해를 나타낸다.

또한, K_{ij} 는 식 (2)로부터 미지수 A_{mn} 에 대한 2차 식이라는 것을 알 수 있다. 처짐, w 와 응력함수, F 를 나타내고 있는 미지수 A_{mn} 은 total potential energy를 미지수 A_{mn} 에 관하여 변분을 취함으로써 구할 수도 있으나, 본 논문에서는 제 4 장에서의 해석이론과 비교하기 위해 식 (1)에 Galerkin법을 적용하여 계산하기로 한다.

$$\int\int [DF^4w - t\{F_{i,yy}(w+w_0)_{,xx} + F_{i,xx}(w+w_0)_{,yy} - 2F_{i,xy}(w+w_0)_{,xy}\} + q] \cdot f_r(x)g_s(y) dx dy = 0$$

$$(r=1, 2, \dots, s=1, 2, \dots) \quad (8)$$

식 (8)에 식 (4), (5), (7)을 대입하여 판요소 전체에 대하여 적분하면, A_{mn} 에 대한 3차방정식이 미지수 A_{mn} 의 수 만큼 얻어진다.

이 다원 3차연립방정식을 풀면 미지수 A_{mn} 이 얻어지고, 이것을 식 (4)와 (7)에 대입하면 처짐, w 와 응력함수, F 가 얻어진다. 그러나, 다원 3차연립방정식을 엄밀하게 풀기는 대단히 곤란한 경우가 많다. 보통, Newton-Rapson법을 이용하는데, 이 경우에는 초기치를 적합하게 선택하지 않으면 해의 수렴이 나빠지거나 발산될 우려가 있고, 경해에 가까운 초기치를 선택하지 않으면 정해를 얻기 어려운 경우가 많다. 또한, 이와 같은 초기치를 선택하는 것 자체가 대단히 곤란한 경우가 많다.

3. 증분형 지배방정식과 해법

여기서는, 전술한 바와 같은 3차 연립방정식을 푸는데 있어서의 비효율성을 해소하기 위해 지배방정식을 증분형으로 나타낸다[2].

하중을 증분적으로 증가시켜, $i-1$ 번째의 하중단계에 도달하여, 이때의 처짐과 응력함수 및 횡하중을 각각, w_{i-1} , F_{i-1} , q_{i-1} 이라고 생각한다. 따라서, 이 하중단계에서의 평형방정식과 적합조건식은 식 (1)과 (2)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$DF^4w_{i-1} - t\{F_{i-1,yy}(w_{i-1}+w_0)_{,xx} + F_{i-1,xx}(w_{i-1}+w_0)_{,yy} - 2F_{i-1,xy}(w_{i-1}+w_0)_{,xy}\} + q_{i-1} = 0 \quad (9)$$

$$F^4F_{i-1} - E(w_{i-1,xy}^2 - w_{i-1,xx} \cdot w_{i-1,yy} + 2w_{0,xy} \cdot w_{i-1,xy} - w_{0,xx} \cdot w_{i-1,yy} - w_{0,yy} \cdot w_{i-1,xx}) = 0 \quad (10)$$

같은 방법으로, i 번째의 하중단계를 생각하면 평형방정식과 적합조건식은 다음과 같이 된다.

$$DF^4w_i - t\{F_{i,yy}(w_i+w_0)_{,xx} + F_{i,xx}(w_i+w_0)_{,yy} - 2F_{i,xy}(w_i+w_0)_{,xy}\} + q_i = 0 \quad (11)$$

$$F^4F_i - E(w_{i,xy}^2 - w_{i,xx} \cdot w_{i,yy} + 2w_{0,xy} \cdot w_{i,xy} - w_{0,xx} \cdot w_{i,yy} - w_{0,yy} \cdot w_{i,xx}) = 0 \quad (12)$$

여기서, 처짐과 응력함수의 증분량을 각각 Δw 및 ΔF 라고 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$w_i = w_{i-1} + \Delta w \quad (13)$$

$$F_i = F_{i-1} + \Delta F \quad (14)$$

식 (13)과 (14)를 식 (11)과 (12)에 대입하여, 여기서 식 (9)와 (10)을 각각 뺀 뒤, 증분량, Δ 에 대한 2차 이상의 항을 미소량이라 생각하여 무시하면, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$DF^4(\Delta w) - t\{F_{i-1,yy} \cdot \Delta w_{,xx} + \Delta F_{,yy} \cdot (w_{i-1}+w_0)_{,xx} + F_{i-1,xx} \cdot \Delta w_{,yy} + \Delta F_{,xx} \cdot (w_{i-1}+w_0)_{,yy} - 2F_{i-1,xy} \cdot \Delta w_{,xy} - 2\Delta F_{,xy} \cdot (w_{i-1}+w_0)_{,xy}\} + \Delta q = 0 \quad (15)$$

$$F^4(\Delta F) - E(2w_{i-1,xy} \cdot \Delta w_{,xy} - w_{i-1,xx} \cdot \Delta w_{,yy} - \Delta w_{,xx} \cdot w_{i-1,yy} + 2w_{0,xy} \cdot \Delta w_{,xy} - w_{0,xx} \cdot \Delta w_{,yy} - w_{0,yy} \cdot \Delta w_{,xx}) = 0 \quad (16)$$

식 (15)와 (16)에 있어서 $i-1$ 번째의 하중단계에서의 처짐과 응력함수가 기지라면 그 증분량 Δw 와 ΔF 가 얻어지고, 식 (13)과 (14)로부터 i 번째의 하중단계에서의 처짐과 응력함수가 얻어진다. 같은 방법으로 하면 $i+1$ 번째의 하중단계에 있어서도 얻어지며, 결국 임의하중단계에서의 처짐과 응력함수가 얻어진다.

식 (15)와 (16)을 풀기 위하여 먼저 처짐의 증분 Δw 를 다음과 같이 가정한다.

$$\Delta w = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \Delta A_{kl} f_k(x) g_l(y) \quad (17)$$

여기서, $f_k(x)$, $g_l(y)$ 는 경계조건을 만족하는 함수이고, ΔA_{kl} 은 미지수이다. 또한, $i-1$ 번째의 하중단계에 있어서의 전체 처짐량 w'_{i-1} 을 기지라고 하고 다음과 같이 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$w'_{i-1} = w_{i-1} + w_0 = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n A_{mn}^{i-1} f_m(x) g_n(y) \quad (18)$$

따라서, 식 (17)과 (18)을 식 (16)에 대입하여 ΔF 에 대하여 풀면 다음 식이 얻어진다.

$$\Delta F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta k_{ij} p_i(x) q_j(y) \quad (19)$$

여기서, Δk_{ij} 는 식 (16)으로부터 알 수 있는 바와 같이 ΔA_{kl} 에 관한 1차식이다.

식 (19)에 하중조건을 만족하는 특이해 ΔF_p 를 고려하면, 응력함수의 증분량, ΔF 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta F = \Delta F_p + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta k_{ij} p_i(x) q_j(y) \quad (20)$$

또한, $i-1$ 번째의 하중단계에 있어서의 응력함수 F_{i-1} 은 기지라고 하고, 다음과 같이 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$F_{i-1} = F_p^{i-1} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_{ij}^{i-1} p_i(x) q_j(y) \quad (21)$$

따라서, 미지수 ΔA_{kl} 을 구하기 위하여 식 (17), (18),

(20), (21)을 식 (15)에 대입하여 Galerkin법을 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \iint \{ DF^4(\Delta w) - t(F_{i-1,yy} \Delta w_{,xx} + \Delta F_{,yy} w_{i-1,xx}^i \\ & + F_{i-1,xx} \Delta w_{,yy} + \Delta F_{,xx} w_{i-1,yy}^i) \\ & - 2F_{i-1,xy} \Delta w_{,xy} - 2\Delta F_{,xy} w_{i-1,xy}^i \} \\ & + \Delta q \int f_r(x) g_s(y) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(r=1, 2, ..., s=1, 2, ...)

식 (22)를 관요소 전체에 대하여 적분하면, 미지수, ΔA_{kl} 에 대한 연립 1차방정식이 얻어진다. 연립 1차방정식은 쉽게 풀 수 있고, ΔA_{kl} 을 구할 수 있다. 따라서, Δw 와 ΔF 가 얻어지고, w_i, F_i 도 얻어져서, 임의 하중상태에서의 관요소의 대처짐 응답이 얻어진다.

이상과 같은 과정에서 알 수 있는 바와 같이, 본 해석법은 관요소의 대처짐 거동을 지배하는 방정식을 하중증분간에 있어서 선형화 한다는 것과 증분형의 지배 방정식을 풀기 위하여 Galerkin법을 적용한다는데 특징이 있다. 이런 관점에서 이 방법을 증분 Galerkin 법 (Incremental Galerkin Method)이라 부르기로 한다[3].

4. 주변 단순지지 판에의 적용

Fig. 1에 나타내는 바와 같이 임의형상의 초기치짐을 가진 주변 단순지지된 사각형판을 생각한다. 판은 면내 2축방향의 축력, 2축방향의 굽힘, 전단 및 횡하중을 받는다. 주변 단순지지 조건 및 하중조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w=0, w_{,yy} + \nu w_{,xx} &= 0 \text{ at } y=0, y=b \\ w=0, w_{,xx} + \nu w_{,yy} &= 0 \text{ at } x=0, x=a \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^b F_{,yy} t dy &= p_x + \frac{1}{b} (2y-b) M_x \text{ at } x=0, x=a \\ \int_0^a F_{,xx} t dx &= p_y + \frac{1}{a} (2x-a) M_y \text{ at } y=0, y=b \\ F_{,xy} &= -\tau_{xy} (= \tau) \text{ at all boundaries} \end{aligned} \quad (24)$$

M_x, M_y : 각각 x 및 y 방향의 단위길이당의 최대굽힘모멘트

$i-1$ 번째 하중단계에 있어서의 전체치짐량, w_{i-1}^i 과 치짐의 증분 Δw 는 식 (23)의 주변단순지지의 경계조건을 만족하는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$w_{i-1}^i = w_{i-1} + w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{i-1} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (25)$$

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Delta A_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (26)$$

여기서 A_{mn}^{i-1} 는 기저의 상수이고, ΔA_{kl} 은 미지수이다.

식 (25) 및 (26)을 식 (16)에 대입하여 응력함수의 증분, ΔF 에 대하여 풀어서 하중조건을 고려하면 다음 식이 얻어진다(Appendix 참조).

$$\Delta F = \Delta F_p + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta k_{ij} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (27)$$

여기서, $\Delta k_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g(i, j, k, l) \Delta A_{kl}$,

$g(i, j, k, l)$: 기저의 상수

또한, $i-1$ 번째의 하중단계에 대한 기저의 응력함수, F_{i-1} 은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Appendix 참조).

$$F_{i-1} = F_p^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} k_{ij}^{i-1} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (28)$$

여기서, k_{ij}^{i-1} : 기저의 상수

식 (25), (26), (27) 및 (28)을 식 (22)에 대입하여 판전체에 대하여 적분하면, ΔA_{kl} 에 대한 다원연립 1차방정식이 얻어지며, 이것은 쉽게 풀 수 있다. 또한, 일반적으로 처짐식의 항은 계산상, 유한개의 항을 채용하게 되는데 컴퓨터를 이용하는 경우는 처짐식의 항을 비교적 많이 채용할 수 있고, 해석정도도 높일 수 있다.

5. 해석예

본 연구에서는 이상의 해석이론을 바탕으로, 초기치짐을 가진 주변단순지지의 사각형판이 2축방향의 축력, 2축방향의 면내굽힘, 전단 및 임의분포(직선적 분포)의 횡하중을 받는 경우의 좌굴 및 좌굴후거동을 해석할 수 있는 program, SPINE[4]를 개발하였다. 여기서는 SPINE를 이용한 해석예를 통하여, 정도와 유용성을 보인다.

(1) 1축방향 압축을 받는 정방형판

초기치짐을 가진 1000×1000×9(mm)의 정방형판이 1축방향의 압축을 받는 경우에 대한 탄성대처짐 거동 해석 결과를 Fig. 2에 나타내고 있다. 이 그림에서는 본해석법과 정해진 종래의 Galerkin법에 의한 해석 결과를 비교하고 있다. 하중의 증가와 함께 처짐은 처음부터 증가하고 있으며, 본 해석 결과의 정도는 대단히 양호하다는 것을 알 수 있다.

(2) 1축방향 압축을 받는 장방형판

다음으로, 초기치짐을 가진 장방형판이 1축방향의 압축을 받는 경우에 대하여 본 해석법과 유한요소법으로 해석하였다(Fig. 3).

판의 치수는 1680×980×11(mm)로서 고유의 좌굴 반파수는 길이방향에 2개이다. Fig. 4에는 하중과 처짐

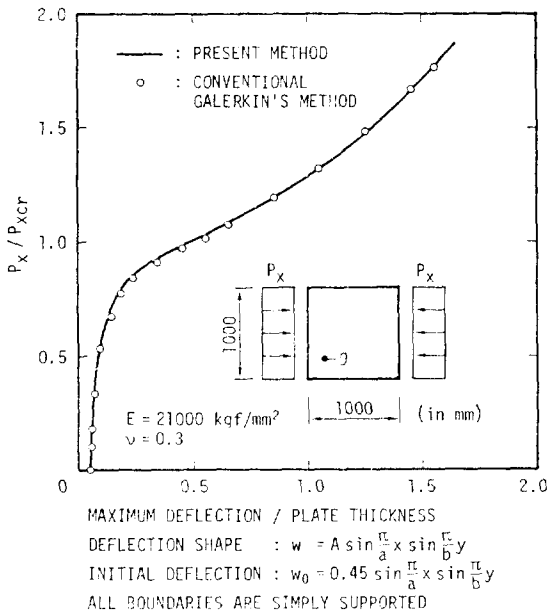


Fig. 2 Comparison of the deflection of a square plate subjected to uniaxial compression evaluated by the present method with that by the conventional Galerkin's method

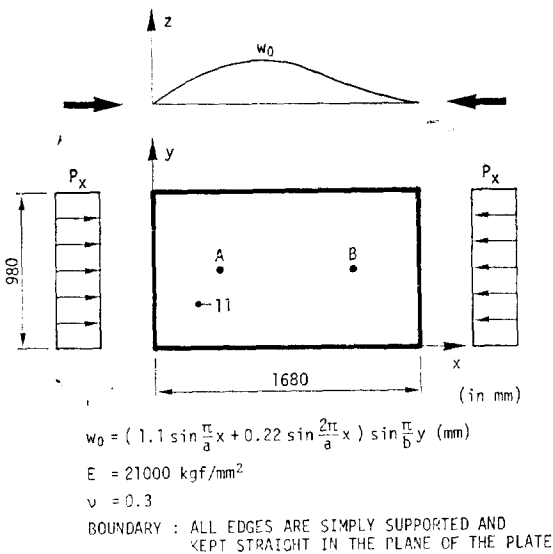


Fig. 3 Example rectangular plate, initial deflection and applied load

판계를, Fig. 5에는 하중과 면내 변위 관계를 각각 비교하고 있다. 본 해석에서는 처짐식으로서 다음과 같은 2종류를 가정하여 계산하였다. 즉,

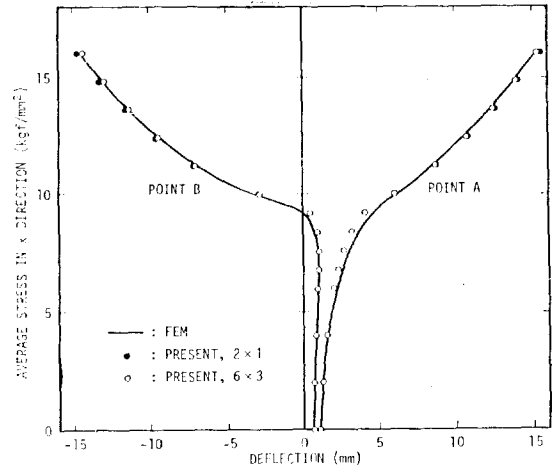


Fig. 4 Comparison of deflections of the plate shown in Fig. 3 evaluated by the present method with those by the finite element method

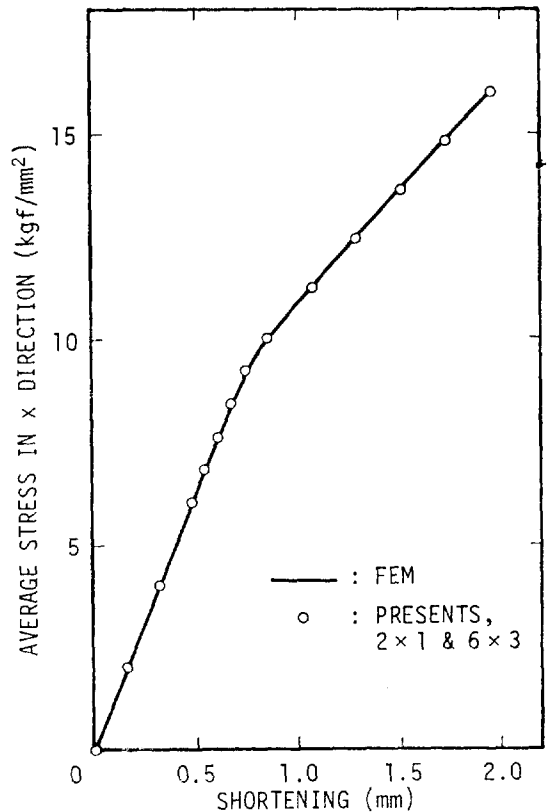


Fig. 5 Comparison of the shortening of the plate shown in Fig. 3 evaluated by the present method with that by the finite element method

$$w = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^1 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$w = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^3 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

또한, 유한요소해석에서는 폭방향에 대한 대칭조건을 고려하여 길이×폭방향=24×7개의 사각형 요소로 분할하였으며, 유한요소는 MSC/NASTRAN의 CQUAD 4[5]를 사용하였다.

하중을 증가시키면, Fig. 4에 나타내고 있는 바와 같이 처음에는 초기치점의 방향으로 치지게 되지만(점 A 및 B의 치점이 모두 증가), 하중을 더욱 증가시키면 점 A와 B의 치점방향은 반대로 되어 고유의 좌굴 mode가 나타난다. 이 현상을 일종의 좌굴이라 생각할 때 좌굴강도는 고유의 좌굴치와 비슷하며, 초기치점의 형상에 따라서는 좌굴강도에 미치는 영향이 다르다는 것을 알 수 있다.

본 해석 결과는 치점식을 2×1 혹은 6×3 어느 경우로 가정하더라도 비슷하고, 계산시간을 고려하면 2×1을 채용하는 것이 유리하다. 또한, 본 해석 결과는 유한요소법의 결과와도 잘 일치하고 있으며, 계산시간은 유한요소법에 비해 극히 짧다.

(3) 횡하중을 받는 장방형판

Fig. 6에는 균일한 횡하중을 받는 주변 단순지지의 장방형판에 대한 해석 결과를 나타내고 있다. 그림에서는 하중과 치점관계를 나타내고 있으나, 본 해석 결과는 정해와 일치하고 있다는 것을 알 수 있다.

(4) 1축방향 압축과 전단을 받는 장방형판

Fig. 7에는 순수전단 또는 1축방향 압축과 전단의 조합하중을 받는 판의 탄성 대치점 해석 결과를 나타

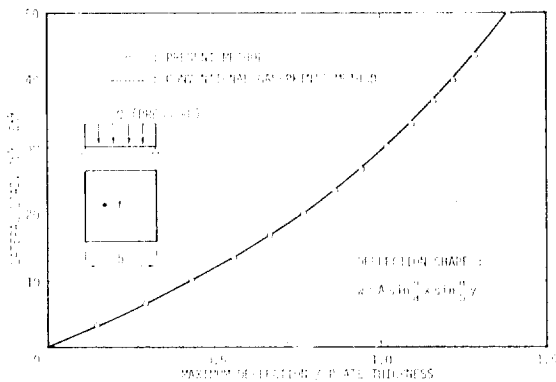


Fig. 6 Comparison of the deflection of a square plate subjected to uniform lateral load evaluated by the present method with that by the conventional Galerkin's method

내고 있다.

본 해석에서의 치점식으로서, a/b=1인 경우, 9항 (m×n=3×3)과 25항 (m×n=5×5)을 가정하여 하중과 치점관계를 비교하였다. 또한, 하중조건으로서 조합하중이 작용하는 경우는, 먼저 압축을 증분적으로 작용시켜 (p_x/p_{xcr}=0.65), 그 크기를 일정하게 유지시키면서 전단을 증분적으로 증가시켰다.

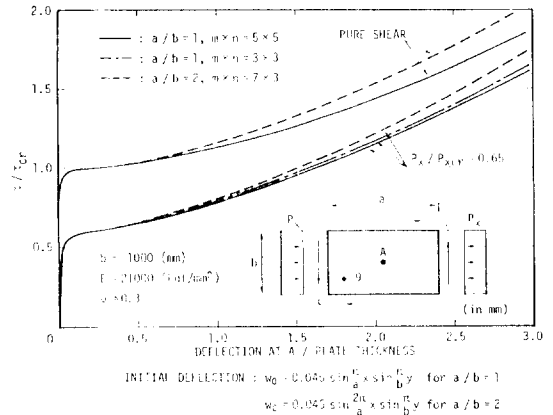


Fig. 7 Load-displacement relationship of square and rectangular plates subjected to inplane shear and combined inplane shear and uniaxial compression

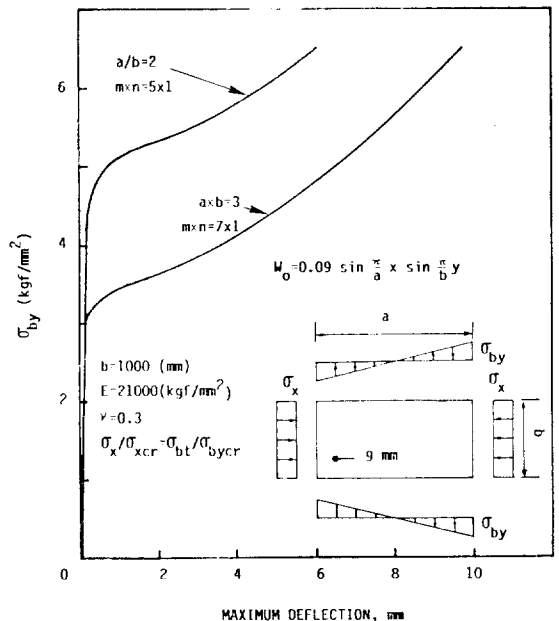


Fig. 8 Load-deflection relationship of rectangular plates subjected to combined compression and inplane bending

$a/b=1$ 인 경우는 9항과 25항의 처짐식을 가정하여 계산한 결과가 동일하였다. 따라서, 장방형판에서는 전단이 작용하더라도 9항($m \times n=3 \times 3$) 정도로서 충분한 정도를 얻을 수 있으리라 생각된다.

그러나, 장방형판의 경우는 정도를 높이기 위하여 길이방향에 보다 많은 항을 채용할 필요가 있다. Fig. 7에는 $a/b=2$ 인 장방형판에 대하여 21항($m \times n=7 \times 3$)의 처짐식을 가정하여 해석한 결과도 나타나고 있다.

(5) 1축방향 압축과 1축방향 면내 굽힘을 받는 장방형판

Fig. 8에는 미소한 초기처짐을 가진 $a/b=2$ 와 3의 장방형판이 x 방향에 압축력 σ_x 를, y 방향에 면내굽힘 σ_{by} 를 받는 경우의 탄성 대체집 해석 결과를 나타내고 있다. 하중비는 $\sigma_x/\sigma_{xcr}=\sigma_{by}/\sigma_{bycr}$ (σ_{xcr} : x 방향 압축력에 대한 좌굴응력, σ_{bycr} : y 방향 면내굽힘에 대한 좌굴응력)로 일정하게 유지시켰다.

처짐식으로서, $a/b=2$ 인 경우는 5항($m \times n=5 \times 1$)을, $a/b=3$ 인 경우는 7항($m \times n=7 \times 1$)을 각각 가정하였다.

면내굽힘하중의 증가와 함께 좌굴이 발생하여 처짐이 급격히 증가하게 되는데 이 경우의 좌굴하중은 a/b 가 작을수록 크다.

6. 결 론

이상에서는, 판요소의 탄성대체집 거동을 효율적으로 해석할 수 있는 증분 Galerkin법을 개발하였고, 이것을 각종 조합하중 즉, 2축방향축력, 2축방향면내굽힘, 전단 및 횡하중을 받는 주변 단순지지의 사각형판에 적용하였다. 이 방법에서는 초기처짐을 가진 판요

소의 대체집거동을 지배하는 미분방정식을 하중증분간에서 선형인 증분형으로 나타내고, 방정식을 풀기 위하여 Galerkin법을 적용하였다. 따라서, 실제 해석에서는 하중을 증분적으로 증가시키게 되는데 하중증분크기가 작을수록 해석정도는 향상된다.

또한, 본 해석 이론을 바탕으로 program SPINE[4]을 개발하고, 해석 예를 통하여 본 해석법의 정도와 유용성을 확인하였다.

끝으로, 본 연구는 부분적으로 일본 오사카대학 유학중에 행하여진 것임을 밝혀두며, 오사카대학의 Y. Ueda 교수와 CRC의 S.M.H. Rashed 박사께 깊은 감사사를 드린다.

참 고 문 헌

- [1] S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [2] Y. Ueda, T. Yamakawa and N. Mori, "Analysis on Nonlinear Behavior of Plates", *J. SNA of Japan*, Vol. 126, 1969 (in Japanese).
- [3] Y. Ueda, S.M.H. Rashed and J.K. Paik, "An Incremental Galerkin Method for Plates and Stiffened Plates", Technical Note for First World Congress on Computational Mechanics, Austin, Texas, USA, 1986.
- [4] 백집기, SPINE 사용설명서, Nonlinear Analysis of Stiffened Plates by Incremental Galerkin Method, 한국기계 연구소
- [5] MSC/NASTRAN Application Manual.

[Appendix]

본문의 식 (27)과 (28)은 구체적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

1. 응력함수의 증분, ΔF 의 계산

$$\nabla^4(\Delta F) - E(2w_{i-1,xy}^t \cdot \Delta w_{,xy} - w_{i-1,yy}^t \cdot \Delta w_{,xx} - w_{i-1,xx}^t \cdot \Delta w_{,yy}) = 0 \tag{A.1}$$

$$w_{i-1}^t = w_{i-1} + w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_i A_{mn}^{i-1} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{A.2}$$

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Delta A_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \tag{A.3}$$

식 (A.2) 및 (A.3)을 식 (A.1)에 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \nabla^4(\Delta F) = & \frac{E\pi^4}{a^2 b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Delta A_{kl} A_{mn}^{i-1} \cdot [2mnkl \, cx(m)cy(n)cx(k)cy(l) \\ & - k^2 n^2 \, sx(m)sy(n)sx(k)sy(l) \\ & - m^2 l^2 \, sx(m)sy(n)sx(k)sy(l)] \end{aligned} \tag{A.4}$$

여기서,

$$cx(i) = \cos \frac{i\pi x}{a}, \quad cy(i) = \cos \frac{i\pi y}{b}, \quad sx(i) = \sin \frac{i\pi x}{a}, \quad sy(i) = \sin \frac{i\pi y}{b}$$

식 (A.4)는 ΔF 에 대한 4차 미분방정식으로, 하중조건을 고려하여 풀면, ΔF 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta F = \Delta F_p + \frac{E\beta^2}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Delta A_{klt} A_{mn}^{i-1} & \left[\frac{-(kn-ml)^2}{\{(m+k)^2 + \beta^2(n+l)^2\}^2} cx(m+k)cy(n+l) \right. \\ & + \frac{-(kn-ml)^2}{\{(m-k)^2 + \beta^2(n-l)^2\}^2} cx(m-k)cy(n-l) \\ & + \frac{(kn+ml)^2}{\{(m+k)^2 + \beta^2(n-l)^2\}^2} cx(m+k)cy(n-l) \\ & \left. + \frac{(kn+ml)^2}{\{(m-k)^2 + \beta^2(n+l)^2\}^2} cx(m-k)cy(n+l) \right] \end{aligned} \quad (A.5)$$

여기서,

$$\Delta F_p = -\frac{\Delta P_x}{2bt} y^2 - \frac{\Delta P_y}{2at} x^2 - \frac{\Delta M_x}{2bt} y^2(2y-b) - \frac{\Delta M_y}{2at} x^2(2x-a) - \Delta \tau xy \quad (A.6)$$

ΔP_x : x 방향 축력의 증분

ΔP_y : y 방향 축력의 증분

ΔM_x : x 방향 단위길이당 면내굽힘의 증분

ΔM_y : y 방향 단위길이당 면내굽힘의 증분

$\Delta \tau$: 전단의 증분

$\beta = a/b$

2. $i-1$ 하중단계에서의 응력함수, F_{i-1} 의 계산

$$\nabla^4(F_{i-1}) - E(w_{i-1,xy}^2 - w_{i-1,xx} \cdot w_{i-1,yy} - w_{0,xy}^2 + w_{0,xx} \cdot w_{0,yy}) = 0 \quad (A.7)$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A.8)$$

$$w_{i-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^{i-1} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A.9)$$

식 (A.8) 및 (A.9)를 식 (A.7)에 대입하면 정리하면,

$$\begin{aligned} \nabla^4(F_{i-1}) = \frac{\pi^2 E}{a^2 b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (A_{mn} \cdot A_{klt} - A_{0mn} A_{0klt}) \cdot \{mnkl \, cx(m)cy(n)cx(k)cy(l) \\ - m^2 n^2 sx(m)sy(n)sx(k)sy(l)\} \end{aligned} \quad (A.10)$$

식 (A.10)은 F_{i-1} 에 대한 4차 연립방정식으로, 하중조건을 고려하여 풀면, F_{i-1} 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{i-1} = F_p^{i-1} + \frac{E\beta^2}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (A_{mn} A_{klt} - A_{0mn} A_{0klt}) \\ \cdot \left[\frac{mn(kl-mn)}{\{(m-k)^2 + \beta^2(n-l)^2\}^2} cx(m-k)cy(n-l) \right. \\ + \frac{mn(kl+mn)}{\{(m-k)^2 + \beta^2(n+l)^2\}^2} cx(m-k)cy(n+l) \\ + \frac{mn(kl+mn)}{\{(m+k)^2 + \beta^2(n-l)^2\}^2} cx(m+k)cy(n-l) \\ \left. + \frac{mn(kl-mn)}{\{(m+k)^2 + \beta^2(n+l)^2\}^2} cx(m+k)cy(n+l) \right] \end{aligned} \quad (A.11)$$

여기서,

$$F_p^{i-1} = -\frac{p_x^{i-1}}{2bt} y^2 - \frac{p_y^{i-1}}{2at} x^2 - \frac{M_x^{i-1}}{2bt} y^2(2y-b) - \frac{M_y^{i-1}}{2at} x^2(2x-a) - \tau^{i-1} xy \quad (A.12)$$

p_x^{i-1} : $i-1$ 하중단계까지의 x 방향 축력

p_y^{i-1} : $i-1$ 하중단계까지의 y 방향 축력

M_x^{i-1} : $i-1$ 하중단계까지의 단위길이당의 x 방향 면내굽힘

M_y^{i-1} : $i-1$ 하중단계까지의 단위길이당의 y 방향 면내굽힘

τ^{i-1} : $i-1$ 하중단계까지의 전단