
 論 文

大韓造船學會誌
 第24卷 第3號 1987年 9月
 Journal of the Society of
 the Naval Architects of Korea
 Vol. 24, No. 3, September 1987

유한요소법과 경계요소법의 결합해법에 의한 HATCH CORNER 해석

김창렬* · 이수룡** · 제정신***

The Analysis of Hatch Corner by the Coupling Method of
 F.E.M and B.E.M

by

Chang Yull Kim* · Soo Lyong Lee** · Jung Sin Che***

Abstract

Whereas the finite element method is well established today, the boundary element method is a fairly recent development. Both are general-purpose methods for the solution of various structural analysis problem. The B.E.M has several potential advantages relative to the F.E.M. One of them is that the number of unknowns in algebraic system obtained by discretization is proportional to the number of boundary nodes. Another advantage is the ease of discretization and input data preparation. However, the B.E.M. always leads to a fully populated and unsymmetric system of equations.

Even though the number of degree-of-freedom is reduced as compared with F.E.M, since nodes exist on the boundary only in the B.E.M, it follows that the effort to solve the equations can be greater. It has been shown also that the time spent in setting up the coefficient matrix is a significant and can, in some cases, be greater than the time required to solve the equation. Thus, one can naturally consider the idea that two methods should be coupled, then the advantages of both methods can be taken. And further, by using this coupling method the HATCH CORNER was analyzed to give the initial design data.

1. 서 론

구조물의 역학적 상태를 수치해석하는 방법으로서, 현재 유한요소법이 많이 사용되고 있다. 이 방법은 특별한 고려를 하지 않아도 복잡한 구조물의 해석이 가능하며, 비선형문제에도 쉽게 확장될 수 있는 장점이 있다. 그러나 이러한 영역형 해법은 구조물 전체를 유

소분할 하여야 하므로 연산량이 증대하여 많은 계산시간을 요한다.

한편, 경계요소법은 유한요소법과는 달리 경계만을 요소로 분할하고 그 구조물의 지배방정식을 경계상의 적분방정식으로 변환한 다음, 유한요소법과 같이 요소를 이산화 하여 해석하는 방법으로서, 구조물의 경계만을 요소분할하면 충분하므로 연산량이 감소하여 유한요소법에 비하여 계산시간의 단축이 기대된다. 그러

접수일자 : 1987년 6월 20일, 재접수일자 : 1987년 7월 29일

* 정회원, 부산대학교 공과대학

** 학생회원, 부산대학교 대학원 조선공학과

*** 부산대학교 대학원 조선공학과

나, 경계요소법은 수학적인 기본해를 기초로 하고 있으므로, 이것을 얻기 어려운 경우가 있다는 점과 해법의 특성상 계수행렬이 비대칭이므로 대단히 큰 구조물을 해석하는 경우에는 요소의 수가 증가하여, 자유도의 감소에서 얻어지는 이득보다 연립방정식을 푸는 노력이 크다는 단점이 있다. 이러한 이유에서 경계요소법과 유한요소법을 결합하여 해석하고자 하는 시도가 Brebbia 등 [1~4, 7~12]에 의하여 연구되었다. 즉, 경계요소법으로 취급하기 어려운 복잡한 영역은 유한요소법으로 해석하고, 영역형 해법으로는 비효율적인 영역은 경계단을 대상으로 하는 경계요소법으로 해석하는 방법이다. 이와 같은 결합해법의 정식화에서는 두 가지가 있다.

1) 등가경계요소 : 유한요소법에서 얻어진 강성방정식을 경계요소법의 탄성방정식과 비슷한 형으로 변환하여 양자를 기계적으로 결합한다.

2) 등가유한요소 : 경계요소법에서 얻어진 탄성방정식을 유한요소법의 강성방정식과 비슷한 형으로 변환하여 다절점유한요소로서 양자를 결합한다.

본 연구에서는 계수매트릭스가 대칭으로 되며, 기존의 유한요소 프로그램에 결합되기 쉬운 등가유한요소 방식을 택하여 탄성문제에 대한 유한요소법과 경계요소법의 결합해법의 정식화를 행한 후, 이를 선체의 HATCH CORNER 해석에 적용하였다.

2. 경계요소법에 의한 탄성해석

2.1. 탄성 기본식

Fig. 2-1과 같은 탄성문제에서 내부응력을 σ_{ij} , 표면력을 p_i , 물체력을 b_i 라고 할 때 평형방정식과 경계조건은

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j} + b_i &= 0 \text{ in } \Omega \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_1 \\ p_i &= \bar{p}_i \text{ on } \Gamma_2 \quad i=1, 2, 3, \quad j=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2-1)$$

여기에서 $\sigma_{i,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ 이다.

물체의 표면 Γ_2 위의 표면력성분에 대한 평형방정식은

$$p_i = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad i=1, 2, 3, \quad j=1, 2, 3 \quad (2-2)$$

여기에서 n_j 는 방향여현이다. X_i 축 방향의 변위를 u_i 로

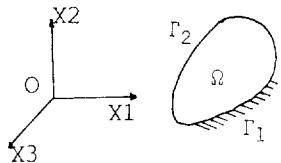


Fig. 2-1 Definition of domain

표시하면 변위와 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-3)$$

응력과 변형률의 관계를 매트릭스로 표시하면

$$\sigma = c \cdot \epsilon \quad (2-4)$$

로 된다.

2.2. 문제 및 기본해^{7,8)}

선형인 미분작용소를 L 이라 하면 $L[U(x)]$ 에 대하여 $L[U^*(x, \xi)] + \delta(x, \xi) = 0$ (2-5) 을 만족하는 해 $U^*(x, \xi)$ 를 기본해라 하고 이의 물리적 의미는 ξ 위치에 단위힘이 작용할 때 x 위치에서의 변위이며 $\delta(x, \xi)$ 는 Dirac Delta 함수다.

2.3. 적 분

2개의 계 I, II에서 변위, 표면력, 물체력을 각각 u, p, b 및 u^*, p^*, b^* 라 하면 Maxwell의 상반정리에 의해서

$$\int_{\Omega} b^T u^* d\Omega + \int_{\Gamma} p^T u^* d\Gamma = \int_{\Omega} b^* T u d\Omega + \int_{\Gamma} p^* T u d\Gamma \quad (2-6)$$

와 같이 되고 u^* 및 p^* 를 매트릭스로 표시하면

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

여기에서 e_i 는 ξ 위치에 작용하는 단위힘 e 의 X_i 축 방향의 성분이다. 여기에서 계 I의 물체력을 0, 계 II의 물체력을 단위하중이라 하면

$$b = 0, \quad b^* = \delta e \quad (2-8)$$

이 되고 식 (2-7)은

$$u^* = U^* e, \quad p^* = P^* e \quad (2-9)$$

와 같이 쓸 수 있다.

식 (2-8), (2-9)를 식 (2-6)에 대입하면 각 항은

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b^T u^* d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} p^T u^* d\Gamma &= \int_{\Gamma} p^T U^* e d\Gamma = e^T \int_{\Gamma} U^* T p d\Gamma \\ \int_{\Omega} b^* T u d\Omega &= \int_{\Omega} (\delta e)^T u d\Omega = e^T u(P') \\ \int_{\Gamma} p^* T u d\Gamma &= \int_{\Gamma} (P^* e)^T u d\Gamma = e^T \int_{\Gamma} P^* T u d\Gamma \end{aligned} \quad (2-10)$$

와 같이 되므로 식 (2-6)은

$$e^T \left[\int_{\Gamma} U^* T p d\Gamma \right] = e^T \left[u(P') + \int_{\Gamma} P^* T u d\Gamma \right] \quad (2-11)$$

로 되어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(P') = \int_{\Gamma} (U^* T p - P^* T u) d\Gamma \quad (2-12)$$

2.4. 경계적분 방정식

Fig. 2-2와 같이 단위힘 e 가 작용하고 있는 Ω 내의

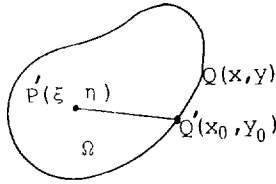


Fig. 2-2 Transformation of source point

P' 점을 경계상의 Q' 점으로 이동시켜 식(2-12)를 경계적분 방정식으로 변환시킨다.

식(2-12)를 매트릭스로 표시하면

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} p_{11}^* & p_{21}^* \\ p_{12}^* & p_{22}^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} p \Gamma \quad (2-13)$$

여기에서 U^*, P^* 의 기하학적 정의는 Fig. 2-3과 같으며 성분은 다음과 같다.

$$U_{ik}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (2-14)$$

$$P_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu) \cdot r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ik} + 2 \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot n_i \right) \right] \quad (2-15)$$

여기에서 $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r}$ 이다.

그리고 식(2-13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(P') = \int_{\Gamma} \left\{ U^{*T}(Q, P) p(Q) - P^{*T}(Q, P') u(Q) \right\} d\Gamma \quad (2-16)$$

식(2-14)를 식(2-13)에 대입하면 경계적분 방정식은

$$\frac{1}{2} u(Q) = \int_{\Gamma} (U^{*T} p - P^{*T} u) d\Gamma \quad (2-17)$$

으로 되어, 이 식으로 부터 기지의 경계값을 고려하면 미지의 경계값을 구할 수 있다.

2.5. 이산화

경계적분 방정식 식(2-17)을 수치적분하기 위하여,

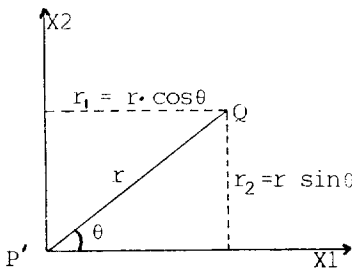


Fig. 2-3 Geometric definition

영역 Ω 의 경계를 Γ_1 과 Γ_2 로 나누고 각각 n_1, n_2 개의 요소로 분할한 다음 일정요소를 사용하여 이산화 한다.

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad n = n_1 + n_2 \quad (2-18)$$

식(2-17)을 이산화하면

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} P^{*T} d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} U^{*T} d\Gamma \right\} p_j \quad (2-19)$$

여기에서 u_j, p_j =일정 on $\Gamma_j, j=1 \sim n$

이며, Γ_j 는 j 번째의 경계요소이다. 다시 정리하면

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j \quad (2-20)$$

으로 되고 H_{ij}, G_{ij} 는 다음과 같다.

$$H_{ij} = \frac{1}{2} I_{ij} + \int_{\Gamma_j} P^{*T} d\Gamma \quad (2-21)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} U^{*T} d\Gamma$$

여기에서

$$I_{ij} = \begin{cases} 0; & (i \neq j) \\ I; & (i = j) \end{cases} \quad (2-22)$$

식(2-20)은 한 절점에 대한 두 개의 방정식을 나타내고 있다. 이것을 Γ 상의 n 개의 절점에 대해서 모두 나타내면

$$H \cdot u = G \cdot p \quad (2-23)$$

으로 된다. 이 식이 경계적분 방정식의 기본식이다.

3. 경계요소법과 유한요소법의 결합

3.1. 결합해법의 기초

Fig. 3-1에서와 같이 영역 Ω 를 2개의 부분으로 나누어, 영역 Ω_B 에는 경계요소법을, 영역 Ω_F 에는 유한요소법을 적용하는 것으로 한다.

Ω_B 와 Ω_F 가 접하는 내부경계를 Γ_I 로 하여 영역 Ω_B 는 $\Gamma_B + \Gamma_I$, 영역 Ω_F 는 $\Gamma_F + \Gamma_I$ 로 이루어진 것으로 한다. 물체력이 작용하지 않는 것으로 가정하면, 영역 Ω_B

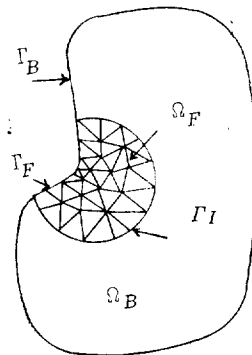


Fig. 3-1 Combination of F.E. and B.E.

에 대한 경계요소법의 탄성방정식은 식(2-23)으로부터

$$[H] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_B \\ \tilde{u}'_B \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \tilde{p}_B \\ \tilde{p}'_B \end{Bmatrix} \quad (3-1)$$

여기에서 $[H]$ 와 $[G]$ 는 식(2-23)으로부터 계산되는 계수 매트릭스이며, $\{\tilde{u}_B\}$ 와 $\{\tilde{p}_B\}$ 는 각각 Γ_B 상의 절점변위벡타 및 절점표면벡타이다. 또 $\{\tilde{u}'_B\}$ 와 $\{\tilde{p}'_B\}$ 는 각각 내부경계 Γ_I 상의 절점변위벡타와 절점표면력벡타이다.

한편, 영역 Ω_F 에 대한 유한요소법의 강성방정식은 역시 물체력이 작용하지 않는다고 가정하였을 때 다음 식으로 주어진다.

$$[K] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_F \\ \tilde{u}'_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F' \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

여기에서, $[K]$ 는 강성매트릭스이고 $\{\tilde{u}_F\}$ 와 $\{\tilde{u}'_F\}$ 는 각각 $\Omega_F + \Gamma_F$ 와 Γ_I 에 속하는 절점변위벡타이다. 또 $\{F\}$ 와 $\{F'\}$ 는 각각 $\Omega_F + \Gamma_F$ 와 Γ_I 에 속하는 절점력벡타이다.

내부경계 Γ_I 상에서는, 경계요소법과 유한요소법에서 구하여진 변위가 같아야 하며 절점력도 평형조건을 만족하여야 한다. Γ_I 상의 변위적합조건은

$$\{\tilde{u}_B\} = \{\tilde{u}'_F\} \quad (3-3)$$

로 나타낼 수 있다. 또 평형조건은 절점표면력벡타 $\{\tilde{p}'_B\}$ 와 절점력벡타 $\{F'\}$ 에 관한 것으로 된다. 그리나 이 평형조건은 식(3-3)과 같이 간단히 나타낼 수가 없다. 왜냐하면 $\{\tilde{p}'_B\}$ 는 단위면적당의 힘이라는 차원이고 $\{F'\}$ 는 단순히 힘의 차원이기 때문이다. 여기에서 $\{F\}$ 와 $\{\tilde{p}\}$ 의 관계를 표면력의 형상함수에 의하여

$$\{F\} = [M] \{\tilde{p}\} \quad (3-4)$$

로 쓸 수 있다. 매트릭스 $[M]$ 은 유한요소의 한 변 S_i 에서

$$[M] = \int_{S_i} \{N_1\}^T \cdot \{N_2\} \cdot t dS_i \\ = \int_{-1}^1 \{N_1\}^T \cdot \{N_2\} \cdot |J| t d\eta \quad (3-5)$$

로 정의되며, 이 매트릭스를 결합선 전체에 걸쳐 모으면 된다. 여기에서 $\{N_1\}$ 및 $\{N_2\}$ 는 각각 변위 및 응력도에 대한 삼간함수로 이루어지는 벡타이며, t 는 판의 두께, $|J|$ 는 Jacobian이다. 이 삼간함수를 일차함수라 하면

$$[M] = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta)^2 & 0 & \frac{1}{4}(1-\eta)^2 & 0 \\ & \frac{1}{4}(1-\eta)^2 & 0 & \frac{1}{4}(1-\eta)^2 \\ \text{sym.} & & \frac{1}{4}(1-\eta)^2 & 0 \\ & & & \frac{1}{4}(1-\eta)^2 \end{pmatrix} |J| \cdot t \cdot d\eta \quad (3-6)$$

여기에서 $|J| = \frac{1}{2} \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ 이다.

따라서 식(3-4)는 경계요소법에서 이용하는 절점표면력벡타 $\{\tilde{p}\}$ 를 유한요소법에서 이용하는 절점하중벡타로 변환하는 관계식이다. 이를 이용하면 Fig. 3-1의 내부경계 Γ_I 상에서의 평형조건을 구체적으로 표시할 수 있으므로 결국 경계요소법과 유한요소법의 결합이 가능해진다.

3.2. 등가유한요소법에 의한 결합해법¹⁵⁾

전 영역 $\Omega_B + \Omega_F$ 에서 Ω_B 에 대한 탄성방정식은 식(3-1)로부터

$$[H] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_B \\ \tilde{u}'_B \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \tilde{p}_B \\ \tilde{p}'_B \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

또한, Ω_F 영역에 대한 강성방정식은 식(3-2)로부터

$$[K] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_F \\ \tilde{u}'_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F' \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

로 된다. 식(3-7)을 식(3-8)의 형태로 만들기 위하여 먼저 식(3-7)의 양변에 $[G]^{-1}$ 를 앞에서 곱하면

$$[G]^{-1}[H] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_B \\ \tilde{u}'_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_B \\ \tilde{p}'_B \end{Bmatrix} \quad (3-9)$$

가 얻어진다. 다시 식(3-9)에 $[M]$ 을 앞에서 곱하면, 다음의 유한요소법형의 방정식계가 얻어진다.

$$[K'] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_B \\ \tilde{u}'_B \end{Bmatrix} = [\tilde{F}'] \quad (3-10)$$

여기에서

$$[K'] = [M][G]^{-1}[H], \quad [\tilde{F}'] = [M] \begin{Bmatrix} \tilde{p}_B \\ \tilde{p}'_B \end{Bmatrix} \quad (3-11)$$

식(3-11)의 $[\tilde{F}']$ 가 유한요소 방정식에서의 절점력벡타에 대응하는 것은 이미 앞절의 식(3-4)에서 설명하였다. 따라서 식(3-10)은 영역 $\Omega_B(\Gamma_B + \Gamma_I)$ 를 하나의 요소로 생각하였을 때의 강성방정식과 같다. 그러나 경계요소법의 이산화에 따르는 오차의 영향에 의하여 강성매트릭스 $[K']$ 는 일반적으로 대칭이 되지 않는다.

이는 식(3-10)을 단독으로 풀 때에는 문제가 되지 않으나, 영역 $\Omega_F(\Gamma_F + \Gamma_I)$ 의 유한요소법 방정식(3-8)과 결합하는 것에 의하여 전 영역을 유한요소법형의 방정식계로 만들어 기존의 유한요소법 알고리즘을 이용하여 풀 때에는 $[K']$ 의 비대칭성은 매트릭스 전체의 정보가 필요하므로, 계산기의 기억용량이나 계산시간의 관점에서 불리하다.

이 때문에 Brebbia⁷⁾는 최소자승법에 의해 비대칭 매트릭스의 비대각성분에 대한 오차의 자승을 최소로 하는 것에 의하여 대칭화 하는 것을 제안하고 있다.

성분 k_{ij} 에 대한 오차는 k_{ij}' , k_{ji}' 와 여기에서 구해지

는 대칭인 k_{ij} 와의 차로서 표현된다. 즉

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(k_{ij} - k_{ij}') + (k_{ij} - k_{ji}')] \quad (3-11)$$

이 오차의 자승을 최소로 하면

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}} (\epsilon_{ij}^2) = 2k_{ij} - k_{ij}' - k_{ji}' = 0$$

로 된다. 따라서 새로운 대칭인 성분은

$$k_{ij} = \frac{1}{2} (k_{ij}' + k_{ji}')$$

로 나타난다. 그러므로 대칭화된 강성매트릭스 $[K_S]$ 는

$$[K_S] = \frac{1}{2} ([K'] + [K']^T) \quad (3-12)$$

영역 $\Omega_B (\Gamma_B + \Gamma_I)$ 에서의 유한요소법형의 이산화 방정식

$$[K_S] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_B \\ \tilde{u}_I' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_B \\ \tilde{F}' \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

와 영역 Ω_F 에 대한 식(3-8)을 중첩하고, 적합조건식(3-3)

$$\{\tilde{u}_B'\} = \{\tilde{u}_I'\} = \{u'\} \quad (3-14)$$

을 고려함으로써, 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} K_S^B & K_S^I & 0 \\ 0 & K_F^I & K_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_B \\ \tilde{u}_I \\ \tilde{u}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_B \\ \tilde{F}' + \tilde{F}' \\ \tilde{F} \end{Bmatrix} \quad (3-15)$$

여기에서 $\{\tilde{F}' + \tilde{F}'\}$ 는 경계요소와 유한요소의 공유점에서의 힘이므로 내부경계 Γ_I 상의 평형조건은 식(3-15)로부터

$$\{\tilde{F}' + \tilde{F}'\} = \{0\} \quad (3-16)$$

로 두는 것에 의해 만족된다. 단, Γ_I 상에는 외력이 작용하지 않는다고 생각한다. 여기에서 식(3-15)를 유도할 때 식(3-13)의 강성매트릭스 $[K_S]$ 를

$$[K_S] = [K_S^B \quad K_S^I] \quad (3-17)$$

와 같이 부분매트릭스로 분할한다.

이와 같이 영역 Ω_B 에 대하여 등가의 유한요소로 간주하여, 전 영역 $\Omega_B + \Omega_F$ 를 유한요소법형의 방정식계로 변환하는 결합해법은 대칭인 매트릭스를 취급하는 것으로 되어 기존의 유한요소법 알고리즘을 활용하여 수치계산을 할 수 있다.

그렇지만 경계요소법은 유한요소법과 비교하여, 경식화의 차이에 의해 최종적으로 얻어지는 언넛방정식의 성질이 다르다. 즉 유한요소법의 강성매트릭스는 대칭형이고 0이 아닌 성분이 대각항 부근에 분포하는 매트릭스인 것에 대하여, 경계요소법의 계수매트릭스는 원리적으로 0성분을 갖지 않은 매트릭스이다. 따라서 경계요소법의 프로그램에서는 유한요소법에서 잘 사용되는 밴드매트릭스의 형으로 계수매트릭스를 기억시키는 것은 불가능하다. 이와 같은 이유로 전체 영역을

몇 개의 소영역으로 분할하여 해석하는 유니트 분할법을 경계요소법과 유한요소법을 결합하는 본 연구에 채택하였다.

4. 프로그램 구성 및 검증

4.1. 프로그램 구성

본 연구의 프로그램은 유한요소법에 의한 2차원 탄성해석용 프로그램^{6,17)}에 경계요소법과의 결합을 위한 기능을 첨가시킨 것으로서 총 26개의 부프로그램으로 이루어져 있다. 본 프로그램의 전반적인 흐름은 유니트 분할법에 의한 해법으로 각 유니트의 성질에 따라 유한요소형과 경계요소형의 계산을 수행한다. 따라서 본 프로그램은 유한요소법만으로도 전 영역을 해석할 수 있다.

4.2. 프로그램 검증

결합해법의 타당성을 조사하기 위하여 얇은 정사각형 유공평판에 균일인장력이 작용하는 경우를 대상으로 유한요소법과 결합해법을 비교하였다.

모델의 형상은 Fig. 4-1과 같고 요소분할은 Fig. 4-2와 같다.

여기에서 $E=2,100,000 \text{ kg} \cdot \text{f}/\text{cm}^2$, $\nu=0.3$ 이다. 유한요소법과 결합해법에 의한 각각의 결과를 Table 4-1에 나타내었다.

그리고 응력집중의 현상을 조사하여 Fig. 4-3에 나타내었다.

위의 결과에 의하면 결합해법은 상당히 양호한 결과를 주는 것이 확인되었다. 나타난 차이는 해석이 검증에 위한 것이므로 요소의 분할을 적게 하였기 때문이다. 다시 이 결합해법을 본 논문에서 해석하고자 하는 HATCH CORNER에 적용하여 검증한 결과 Table 4-2

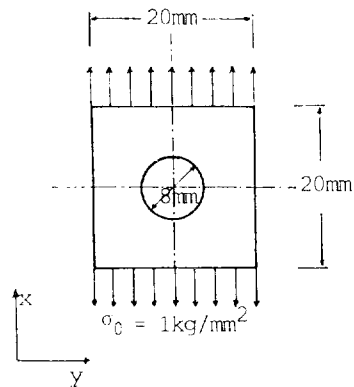


Fig. 4-1 Shape of model

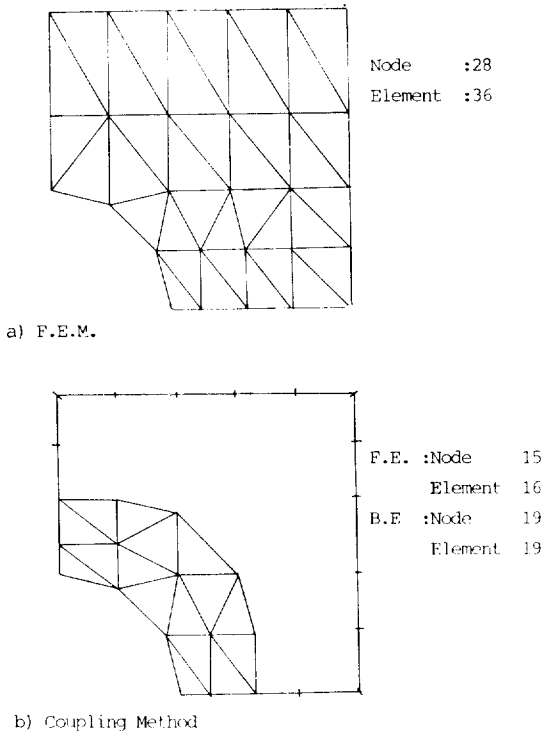


Fig. 4-2 Mesh Pattern

Table 4-1 Comparison of maximum stress (σ^* : theoretical value)

Method	δ^*/δ
F.E.M	0.859
Coupled method	0.719

Table 4-2 Comparison of max. stress by each method ($\text{kg}\cdot\text{f}/\text{cm}^2$)

Method	B.E.M	F.E.M	Coupling method
σ_{\max}	1.823	1.795	2.789
No. of Node	40	111	F.E. : 65, B.E. : 19

Table 4-3 Accuracy of computation by different mesh pattern

Mesh Pattern	e	σ^*/σ	F.E		B.E		CPU(sec)
			Node	Element	Node	Element	
Ⓐ	0.258	0.916	65	99	27	27	13.643
Ⓑ	0.159	0.980	65	99	37	37	30.212
Ⓒ	0.134	0.993	74	109	37	37	38.273

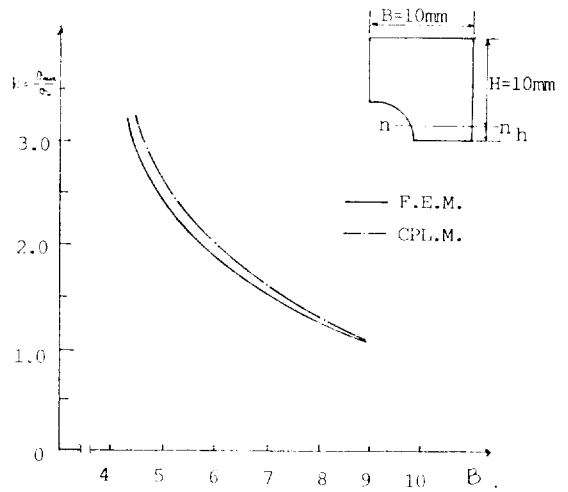


Fig. 4-3 Stress distribution at $h/H=0.06$

와 같다.

Table 4-2에서 보는 바와 같이 결합해법의 결과는 만족스럽지 못하다. 이는 식 (3-12)의 대칭화된 매트릭스 $[K_S]$ 가 실제로 엄밀한 대칭이 아니기 때문이다. 여기에서 매트릭스의 비대칭도 e 를⁽¹⁰⁾

$$e = \max_{i,j} \left(\left| \frac{[K']_{ij} - [K_S]_{ij}}{[K']_{ii}} \right|, \left| \frac{[K']_{ij} - [K_S]_{ij}}{[K']_{jj}} \right| \right)$$

로 정의한다. 여기에서 첨자 i, j 는 매트릭스 성분이다. 따라서 모델의 요소를 세분하여 비대칭도 e 를 조사하여 본 결과 Table 4-3과 같다. 여기서 *는 유한요소법에 의한 결과이다.

즉 비대칭도는 경계요소영역의 요소수와 분할형상에 민감하였다. 본 논문에서는 비교적 정도가 높으면서 연산시간이 짧은 ④를 채택하였다. 또 이 때의 유한요소법 및 경계요소법에 의한 연산시간의 비교는 Table 4-4에 나타나 있다.

그리고 각 해법에 의한 응력분포는 Fig. 4-4에 나타내었다.

이상의 결과로부터 본 결합해법은 실용상 종래의 수

Table 4-4 Comparison of CPU times

method	B.E.M	F.E.M	coupling method
CPU(sec)	8.492	25.315	13.643
No. of Nodes	40	111	F.E : 65, B.E : 27
No. of Elements	40	176	F.E : 99, B.E : 27

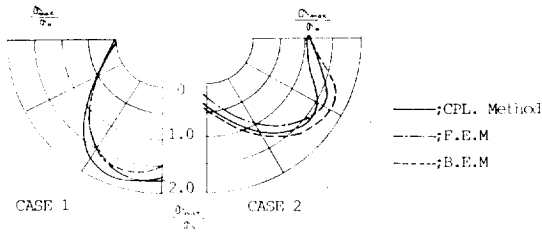


Fig. 4-4 Stress distribution of each method
($R/D=0.2, B/D=3.0, H/D=2.5$)

치해석법과 비교해 볼 때 정도면에서 충분하다고 할 수 있다.

5. 수치해석

앞에서 정식화한 결합해법에 의해 선체의 HATCH CORNER에 대한 2차원탄성 해석을 수행하였다. 요소로서는, 경계요소에서는 일정요소를, 유한요소에서는 삼각형요소를 사용하였으며 평면응력 상태로 가정하여 해석을 수행하였다.

5.1. 계산모델

Fig. 5-1과 같은 상갑판 형상에서 HATCH CORNER

Table 5-1 Aspect ratio of model

R/D	B/D	H/D	L/D
0.2	2.5	2.0	7.0
0.4		2.5	
0.6	3.0	2.5	
0.8	3.5	3.0	
1.0			

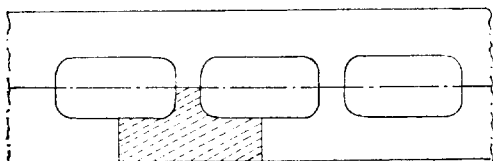


Fig. 5-1 Arrangement of hatchway

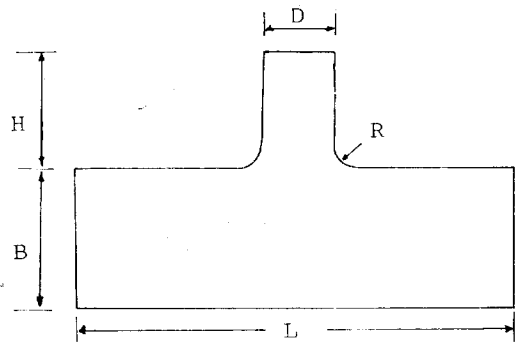


Fig. 5-2 Shape of model

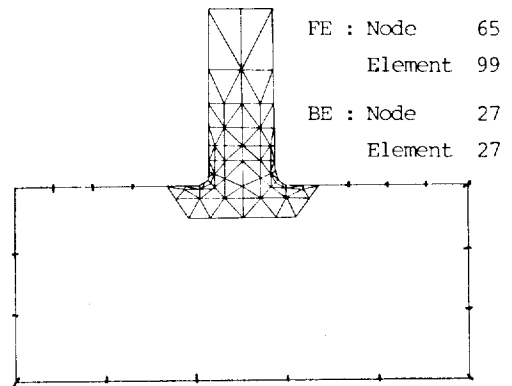


Fig. 5-3 Mesh pattern

의 응력집중을 조사하기 위한 모델을 Fig. 5-2와 같이 선택하여 Fig. 5-3과 같이 요소분할 하였다.

그리고 HATCH CORNER의 형상계수 $H/D, B/D, R/D$ 의 값을 Table 5-1과 같이 변화시켜 가면서 계산을 수행하였다.

5.2. 하중 및 경계조건

계산은 각 모델에 대해서 Fig. 5-4에 나타난 바와 같이 2가지의 경우로 하였으며, 응력집중현상을 쉽게 알아 보기 위하여 기준응력 σ_0 를 단위응력으로 하였다.

경우 1 : 선체의 종굽힘 모멘트에 의한 side deck의 인장인 경우

경우 2 : 선체의 횡하중 및 횡굽힘 모멘트에 의한

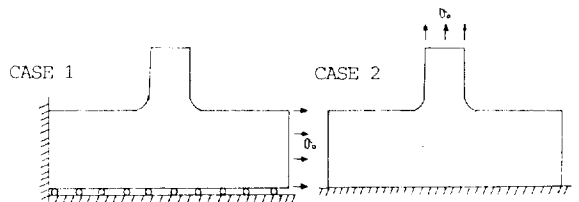


Fig. 5-4 Load and restraint condition

cross deck의 인장인 경우

5.3. 계산결과 및 고찰

경우 1, 경우 2의 각 상태에 대해서 R/D , B/D , 및 H/D 를 Table 5-1과 같이 변화시켜 가면서 계산을 수행하였다.

먼저 R/D 및 B/D 의 변화에 따른 응력분포를 살펴 보면 Fig. 5-5, Fig. 5-6과 같다. 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 R/D 의 값이 작을수록 최대 응력값은 증상으로 기우는 경향이 있으며 $R/D=1.0$ 에서는 약 0° 부근에서 $R/D=0.2$ 에서는, 경우 1에서는 약 10° , 경우 2에서는 약 45° 기울어 저서 최대 응력이 발생한다. 또, B/D 의 변화에 따른 응력의 변화는, 경우 1에서는 R/D 의 값이 클수록 그 변화량이 적으며 경우 2에서는 R/D 의 변화에 관계없이 거의 일정하다.

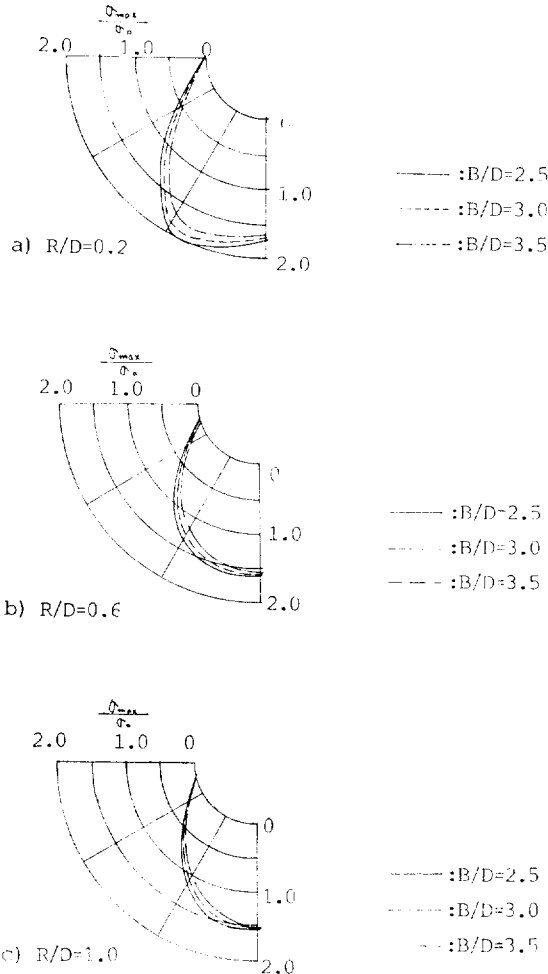


Fig. 5-5 Tangential stress distribution, case 1

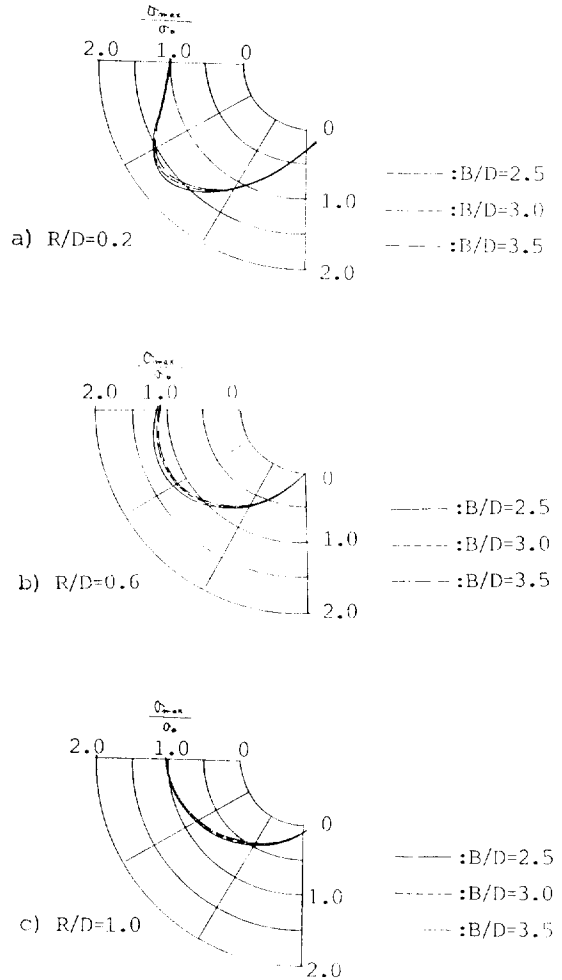


Fig. 5-6 Tangential stress distribution, case 2

Table 5-2 Stress concentration factor, case 1

$R/D \backslash B/D$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2.5	2.08	1.80	1.69	1.62	1.57
3.0	1.96	1.70	1.60	1.54	1.49
3.5	1.88	1.64	1.54	1.50	1.45

Table 5-3 Stress concentration factor, case 2

$R/D \backslash B/D$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2.5	1.55	1.28	1.19	1.16	1.14
3.0	1.54	1.28	1.19	1.16	1.14
3.5	1.54	1.28	1.19	1.16	1.14

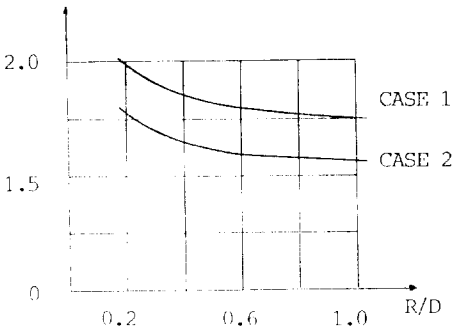


Fig. 5-7 Stress concentration factor($B/D=0.3$)

대한 응력변화는 미소하다는 것을 보여준다.

그리고, H/D 의 변화에 대한 응력변화량은 무시할 수 있을 정도로 미소하였다. 경우 1, 경우 2에 대하여 응력집중계수를 살펴보면, Table 5-2에서 보는 바와 같이, 경우 1에서는 1.34~2.08, 경우 2에서는 Table 5-3에서 보는 바와 같이 1.14~1.55이며 R/D 의 값이 클 수록 응력집중계수는 낮아짐을 알 수 있다.

Fig. 5-7에는 $B/D=3.0$ 에 대하여 R/D 의 변화에 대한 응력집중계수의 변화를 나키내고 있으며, 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 R/D 의 값이 클수록 응력집중계수의 변화는 완만하며 R/D 의 값이 작을수록 그 변화가 급격함을 알 수 있다.

6. 결 론

유한요소법과 경계요소법의 결합해법에 의한 정식화를 유도하고 이에 대한 프로그램을 구성하여, 이를 신체의 HATCH CORNER 해석에 적용한 결과 다음과같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 결합해법은 계산정도면에서 종래의 수치해석법과 동등하다는 것을 알 수 있었다.
- 2) 결합해법에 필요한 계산기의 기억용량은 다른 수법에 비하여 작고, 계산시간도 짧다. 계산시간은 유한요소법에 비하여 55~80% 정도로 단축되었다.
- 3) HATCH CORNER의 응력분포와(Fig. 5-5, Fig. 5-6) Table 5-2, Table 5-3에 의하여 적절한 보강범위를 결정할 수 있다.

또한, 본 해법은 구조물의 탄소성 해석시 소성영역과 탄성영역의 경계를 예상하여 해석을 수행할 수 있을 것이며, 나아가서 구조해석문제뿐만 아니라 유체역학적인 문제에서도, 까다로운 경계조건인 무한영역을 경계요소로 치환하여 쉽게 해석할 수 있을 것이다.

끝으로 본 연구는 1986년도 문교부 자유과제 학술연구 조성에 의하여 연구되었으며 모든 계산은 부산대학교 전자계산소 Cyber 180으로 수행하였다.

참 고 문 헌

- [1] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, P. Bettles, "The Coupling of Finite Element and Boundary Solution Procedures", *Int. J. num. Meth. Engng.*, 11, 355-376, (1976).
- [2] G. Beer, "Finite Element, Boundary Element and Coupled Analysis of Unbounded Problems in Elastostatics", *Int. J. num. Meth. Engng.*, 19, 567-580, (1983).
- [3] G. Beer, "BEFE-a Combined Boundary Element Finite Element Computer Program", *Adv. Eng. Software*, 6, 103 (1983).
- [4] 小松, 長井, "西牧境界要素法とブロック要素法の混用解析手法による薄肉箱桁の立體解析", 土木學會論文報告集, 334, 1983.
- [5] 榎本, 越川, 辻岡, 前田, "コンテナ船の倉口隅部の應力分布", 三井造船技報, 86, 1974.
- [6] 三好俊郎, "有限要素法", (東京:實教出版, 1976.)
- [7] C.A. Brebbia, "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, (1980).
- [8] C.A. Brebbia, S. Walker, "Boundary Element Techniques in Engineering", Newness-Butterworths, (1980).
- [9] R. Butterfield, "Developments in Boundary Element Methods-1", Applied Science Publishers, (1979).
- [10] C.A. Brebbia ed., "Boundary Element Methods in Engineering", Proceeding of the Fourth International Seminar, Southampton, England, (1982).
- [11] C.A. Brebbia ed., "Boundary Elements", Proceedings of the Fifth International Conference, Hiroshima, Japan, (1983).
- [12] 神谷紀生, 境界要素法の基礎, (東京:培風館, 1983).
- [13] 西田正孝, 應力集中, (東京:森北出版, 1978).
- [14] 神谷紀生, 有限要素法と境界要素法, (東京:サイエンス社, 1982).
- [15] 正中正隆, 境界要素解析の基礎, (培風館, 1984).

- [16] 三本木茂夫, 有限要素法による構造解析 プログラム, (東京: 培風館, 1970).
- [17] 三好俊郎, 數値破壊力學, (東京: 實教出版, 1980).
- [18] S. Desai, F. Abel, "Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand, (1972).
- [19] 岸本喜久雄外, 境界要素法・有限要素法による 彈塑性 破壊力學解析, 日本機械學會論文集 50卷 406號 (1984. 12).
- [20] 張昌斗, 李成薰, "境界要素法에 의한 2次元應力解析", 大韓造船學會誌 第23卷 第4號, (1982. 12).
- [21] 金昌烈, 李秀龍, "境界要素法에 의한 HATCH CORNER의 二次元的 強度解析", 釜山大工大研究報告 第32輯, (1986. 12).