

---

 論 文
 

---

大韓造船學會誌  
 第24卷 第3號 1987年 9月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 24, No. 3, September 1987

### 3차원 자유표면파 문제에서의 국소유한요소법의 응용

배 광 준\* · 김 세 은\*\*

## An Application of the Localized Finite Element Method to 3-dimensional Free Surface Wave Problems

by

K.J. Bai\* · Se-Eun Kim\*\*

### Abstract

In this paper, the localized finite element method (LFEM) is applied to 3-dimensional ship motion problems in water of infinite depth. The LFEM used here is based on the functional constructed by Bai & Yeung (1974). To test the present numerical scheme, a few vertical axisymmetric bodies are treated by general 3-dimensional formulation. The computed results of hydrodynamic coefficients for a few vertical spheroids and vertical circular cylinders show good agreement with the results obtained by others.

The advantages of the present numerical method compared with the method of integral equation are as follows:

- (i) The cumbersome existence of irregular frequencies in the method of conventional integral equation is removed.
- (ii) The final matrix is banded and symmetric and the computation of the matrix elements is comparatively easier, whereas the size of the matrix in the present scheme is much larger.
- (iii) In the future research, it is possible to accommodate with the nonlinear exact free surface boundary condition in the localized finite element subdomain, whereas the linear solution is assumed in the truncated (far field) subdomain.

### 1. 서 언

자유표면을 갖는 유체에서의 운동을 계산하는 방법으로 특이점 분포에 의한 적분방정식 방법, Multipole Expansion Method, 유한요소법과 국소유한요소법 등

이 있다. 이 국소 유한요소법은 다루고자 하는 유체 영역을 두 부분으로 나누어 내부 영역에서는 유한요소법을 이용하고 외부 영역에서는 해석해(Eigenfunction)나 Green Function 사용)로 표시하고 경합 경계면에서 경합 조건을 만족하도록 하여 무한원방 경계 조건을 대신하는 방법이다.

본 논문은 대한조선학회 1987년도 춘계연구발표회에서 발표된 논문임

접수일자: 1987년 5월 20일, 재접수일자: 1987년 7월 20일

\* 정회원, 서울대학교 공과대학

\*\* 정회원, 서울대학교 공과대학(현재 대우조선(주) 근무)

이러한 국소 유한요소법은 Bai & Yeung[1]에 의해 유한 수심의 경우에 처음 적용된 이래 여러 유체 역학 분야에서 사용되어 왔으며 Kil & Bai[2]는 외부 영역을 나타내는 해석해로써 Green 함수를 이용하여 무한 수심에서의 2차원 자유표면파 문제를 계산하였다.

무한 수심에서의 3차원 문제를 다루는 본 논문에서는 외부 영역의 해를 Green 함수를 이용하여 표시하고 내부 영역의 해는 Polynomial Trial Function으로 근사하는 데 여기서 사용하는 범함수(Functional)를 이용한 국소 유한요소법에서는 특이파수가 존재하지 않고 최종 매트릭스는 대칭 매트릭스가 되어 계산상의 효율이 좋아진다.

본 논문에서는 일반적인 3차원 물체에 대한 6 자유도 문제 및 diffraction 문제를 풀 수 있도록 프로그램은 완성되었으나 계산 시간상 수직 축대칭 물체에서의 상하 등요시의 유체력 계수들을 구하여 기존 결과들과 비교 검토하였다.

2. 문제의 정식화

입의 형상의 3차원 물체가 무한 수심의 정수중에서 동요 운동을 한다고 가정하고 좌표계  $oxyz$ 는 Fig. 1과 같이  $z$ 축은 중력과 반대 방향이 양(+)이 되도록 하고  $oxy$ 평면은 교란되지 않은 수면상에 설정한다.

2.1. 지배 방정식 및 경계 조건

이와 같은 물리적 문제를 풀기 위해 필요한 수학적 모델은 다음과 같은 가정하에 정립된다.

- (i) 유체를 비점성, 비압축성 유체이고 유체의 유동을 비회전성이라고 가정하면 속도 포텐셜  $\phi(x, y, z, t)$  ( $\vec{v} = \nabla\phi$ )가 유체 영역내에서 존재한다.
- (ii) 물체의 운동 진폭이 작다고 가정하면 물체에 대한 경계 조건들은 순간적인 위치 대신에 평형 상태에서 만족하게 된다.
- (iii) 물체가 진동수  $\sigma$ 의 주기 운동을 한다고 가정하

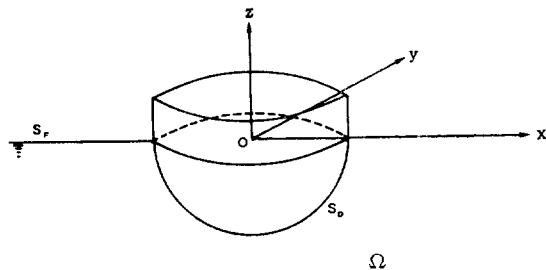


Fig. 1 Coordinate system and boundary configurations

면 속도 포텐셜은 각각 시간과 공간을 나타내는 항들로 분리하여 나타낼 수 있다.

(iv) 물체의 운동에 의해 발생하는 자유 표면파의 파고는 파장에 비하여 충분히 작다고 가정하면 선형화된 자유표면 경계조건을 정수면( $z=0$ )상에 적용할 수 있다.

위와 같은 가정하에서 속도 포텐셜  $\phi$ 는 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \phi_1(x, y, z) \cos \sigma t + \phi_2(x, y, z) \sin \sigma t \\ &= R_c[\phi(x, y, z)e^{-i\sigma t}] \\ \phi &= \phi_1 + i\phi_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 복소함수  $\phi$ 는 각 운동 mode에 대하여

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^8 \phi^{(m)}(x, y, z) \tag{2.2}$$

와 같이 쓸 수 있다.

그러면 속도 포텐셜  $\phi(x, y, z)$ 는 모든 유체 영역에서 3차원 Laplace방정식 및 다음의 경계 조건들을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y, z) &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi(x, y, z) \\ &= 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\phi_z - \nu\phi = 0 \quad \text{on } S_F \tag{2.4}$$

$$|\nabla\phi| \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty \tag{2.5}$$

$$\phi_n = f(x, y, z) \quad \text{for } (x, y, z) \in S_0 \tag{2.6}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial\phi}{\partial R} - i\nu\phi \right) = 0 \tag{2.7}$$

여기서  $\nu = \frac{\sigma^2}{g}$ 이고  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이며  $\Omega, S_F, S_0$ 는 Fig. 1에서와 같이 각각 유체 영역, 교란되지 않은 자유 표면 그리고 평형 상태에서의 물수원 물체의 표면을 표시한다.

물체의 단위 속도 운동을 고려한다면  $f(x, y, z)$ 는 각 운동 mode에 따라 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$f^{(i)}(x, y, z) = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$(n_4, n_5, n_6) = (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{n}$$

여기서  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 은 물체 안쪽 방향을 양(+)으로 하는 법선 벡터이고  $\vec{r}_c$ 는 원점에서 회전 운동의 중심 위치까지의 거리 벡터이며  $\vec{r} = (x, y, z)$ 이다.

2.2. 힘과 모멘트

물체에 작용하는 선형화된 힘과 원점  $o$ 에 대한 모멘트는 아래와 같이 주어진다.

$$F_j(t) = \iint_{S_0} p n_j ds \tag{2.8}$$

$$M_j(t) = \iint_{S_0} p (\vec{r} \times \vec{n}_j) ds \tag{2.9}$$

여기서  $ds$ 는 미소한 표면 요소이고 압력  $p$ 는 Ber-

nonull 방정식에서 비선형항과 경수 입력을 무시하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p(x, y, z, t) = -\rho \Phi_t \quad (2.10)$$

이때  $\rho$ 는 유체의 밀도이다.

그리고

$$(F_4, F_5, F_6) = (M_1, M_2, M_3) \quad (2.11)$$

라는 표현을 도입하면 강제 운동을 하는 물체에 미치는 유체력을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$F_j = i\sigma \left( \mu_{jk} + i \frac{\lambda_{jk}}{\sigma} \right) \quad j, k = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.12)$$

여기서  $\mu_{jk}$ 와  $\lambda_{jk}$ 는 각각  $k$  mode의 물체의 운동에 의한  $j$  방향 성분의 부가 질량과 감쇄 계수를 나타내고 이들은 다음과 같이 잘 알려진 적분으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{jk} + i \frac{\lambda_{jk}}{\sigma} &= \rho \iint_{s_0} \phi^{(k)} n_j ds \\ &= \rho \iint_{s_0} \phi^{(k)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 3. 변분법의 응용

종래에 사용되어 오던 classical variational method에서는 다루어야 할 유체영역이 무한 영역에서부터, 극부 교란이 소멸되는 정도를 고려하여 설정된 수치적 원방 경계면(numerical radiational boundary)까지의 유한한 영역으로 감소하였으나 문제를 풀기에는 수치 계산면에서 취급해야 할 영역이 아직도 너무 크다는 단점을 지니고 있다.

이와 같은 단점을 보완하기 위해서 유체 영역 중에서 어떤 영역을 이미 알고 있는 해석해를 이용하여 표현함으로써 다루어야 할 유체 영역을 줄이는 방법을 사용한다.

Fig. 2에서와 같이 가상적인 정합 경계면  $J$ 를 설정하여 전 유체 영역을 내부 영역  $\Omega_1$ 과 외부 영역  $\Omega_2$ 로 나누고 각 영역에서의 자유 표면을  $S_{F1}$ 과  $S_{F2}$ 로 표시

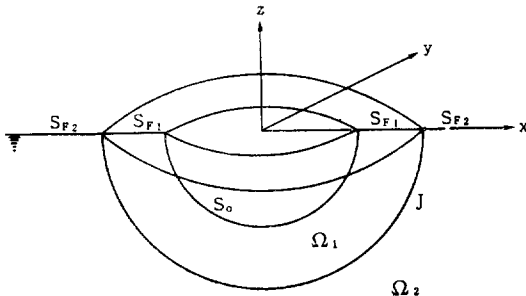


Fig. 2 Inner and outer regions of the modified variational method

한다. 그러면 내부 영역  $\Omega_1$ 의 경계면은  $S_1 = S_{F1} \cup S_0 \cup J$ 이고 외부 영역  $\Omega_2$ 의 경계면은  $S_2 = S_{F2} \cup J$ 와 무한 원방에서의 경계면( $R \rightarrow \infty$ )이 된다.

$\phi_1$ 과  $\phi_2$ 가 영역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 에서의 각각의 속도 포텐셜이라고 하면 다음과 같은 지배방정식과 경계 조건들을 만족하여야 한다. 여기서의  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 는 식 (2.1)의  $\phi_1, \phi_2$ 와 다름을 밝혀둔다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0 \quad \text{in } \Omega_1 \\ \phi_{1z} - \nu \phi_1 &= 0 \quad \text{on } S_{F1} \\ \phi_{1n} &= V_n \quad \text{on } S_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

그리고  $\phi_2$ 는

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_2 &= 0 \quad \text{in } \Omega_2 \\ \phi_{2z} - \nu \phi_2 &= 0 \quad \text{on } S_{F2} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial R} - i\nu \phi_2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

를 만족해야 한다.

그리고 정합 경계면  $J$ 에서 속도 포텐셜과 그의 법선 도함수의 연속 조건을 고려하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ \phi_{1n} &= -\phi_{2n} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } J \quad (3.3)$$

여기서 법선 벡터는 유체 영역에서 외부로 나가는 방향을 양(+)으로 한다. 식 (3.3)의 정합 조건에 의해서 속도 포텐셜  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 는 유일해를 갖게 된다. 그리고 식 (3.2)에 대한 일반적인 해석해들을 알고 있다고 가정하면  $\phi_2$ 는 후에 결정될 특이점 분포를 가지고 이것들로써 표현될 수 있다.

따라서 식 (3.1), (3.2)와 식 (3.3)의 경계 조건을 만족하는 범함수  $F_1$ 과  $F_2$ 는 다음과 같이 결정할 수 있다(Bai & Yeung[1]).

$$\begin{aligned} F_1(\phi_1, \phi_2) &= \iiint_{\Omega_1} \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 dx dy dz - \frac{\nu}{2} \iint_{s_{F1}} \phi_1^2 ds \\ &\quad - \iint_{s_1} V_n \phi_1 ds + \iint_J \left( \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2 \right) \phi_{2n} ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} F_2(\phi_1, \phi_2) &= \iiint_{\Omega_2} \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 dx dy dz - \frac{\nu}{2} \iint_{s_{F2}} \phi_2^2 ds \\ &\quad - \iint_{s_0} V_n \phi_2 ds + \iint_J [(\phi_2 - \phi_1) \phi_{1n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi_2 \phi_{2n}] ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

그러므로

$$\delta F_1(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (3.6)$$

혹은

$$\delta F_2(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (3.7)$$

라고 하는 것은 식 (3.1), (3.2) 그리고 식 (3.3)의 해

를 구하는 것과 같다.

4. 유한 요소법과 해석해를 이용한 해의 도출

4.1. 내부 영역에 대한 근사해

앞에서 언급한 것처럼 미분 방정식으로 표현되는 경계치 문제가 변분법을 이용한 문제와 동등하므로 다음과 같은 trial function을 가정하여 근사해를 구한다.

변분법에 의한 방법이 미분 방정식과는 달리 범함수를 구하는 과정에서 부분 적분(Green 정리)을 이용하므로 범함수로 정의된 적분에는  $\phi_1$ 에 대한 2차 도함수가 존재하지 않고 단지 1차 도함수만 관련되어 있다. 따라서 본래의 미분 방정식에서보다 완화된 조건에서 근사해를 구할 수 있다는 장점을 갖고 있다.

정합 경계면  $J$ 까지의 유체의 내부 영역  $\Omega_1$ 을 Fig. 3과 같이 분할하고, 단으로 싸인 부분을 요소라고 한다(본 논문에서는 삼각 기둥 요소를 사용). 각 요소에 관련된 trial functions  $N_i^e(x, y, z)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,을 도입하던 속도 포텐셜  $\phi_1(x, y, z)$ 는 각 절점에서의  $\phi_1$ 의 값을 계수로 하는( $\phi_{1i}$  at  $i$ -th node) 이들 trial function의 합으로 근사할 수 있다. 여기서  $n$ 과  $e$ 는 각각 요소 절점수와 각 요소를 뜻한다. 그러나 본 문제의 경우 범함수의 값을 직접 구하는 것이 아니고 적분 형태로 표현된 1차 편미분이 영(stationary)이 되도록 하는 점을 구하는 것이므로 이들  $\phi_{1i}$ 값이 각 node에서의  $\phi_1$ 의 값이 아니라 어떤 요소에서  $\phi_1$ 을 나타낼 수 있는 다른 변수일 수도 있다.

절점 갯수가  $n$  개인 요소에서의 trial functions를 다음과 같은 행벡터로 나타내고

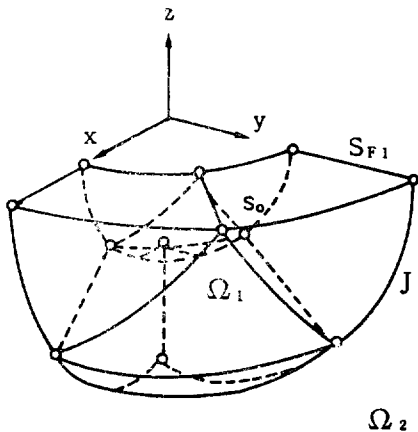


Fig. 3 Discretized meshes in the localized finite element region

$$[N]^e = [N_1^e, N_2^e, \dots, N_n^e] \tag{4.1}$$

절점에서의 값들을 다음의 열벡터로 나타내면

$$\{\phi_1\}^e = [\phi_{11}^e, \phi_{12}^e, \dots, \phi_{1n}^e]^T \tag{4.2}$$

각 요소에서의  $\phi_1$ 은 다음과 같이  $n$ 개 항들의 합으로 근사될 수 있다.

$$\phi_1 = [N]^e \{\phi_1\}^e \tag{4.3}$$

Trial functions  $[N]^e$ 가 관련된 요소 외에서는 항상 영이라고 정의하던 전 유체영역에서의 근사해  $\phi_1$ 은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\phi_1 = \sum_{e=1}^E [N]^e \{\phi_1\}^e = \sum_{i=1}^N \phi_{1i} N_i(x, y, z) \tag{4.4}$$

여기서  $E$ 는 총 요소수이고  $N$ 은 총 절점수이다.

4.2. 외부 영역에 대한 근사해

외부 영역  $\Omega_2$ 에서의  $\phi_2(x, y, z)$ 에 대한 trial function에는 몇가지 선택하는 방법이 있는데 본 논문에서는 Green 함수를 이용하기로 한다(Bai[1]는 유한 수심의 문제에서 고유함수를 사용하였고 Kil & Bai[2]는 2차원 무한 수심 문제에서 Green 함수를 사용한 바가 있다).

점  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 에 놓인 단위 세기의 pulsating source에 의해서 점  $P(x, y, z)$ 에서 (3.2)를 만족하는 Green 함수는 여러가지 형태가 있는데 여기서는 Haskind[3]가 구한 것을 사용하도록 한다.

그리고 이 함수는 Shin[4]에 상세한 유도 과정이 있다.

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - 2\nu e^{\nu(z+\zeta)} \int_{z+\zeta}^0 \frac{e^{-\nu u}}{\sqrt{R^2+u^2}} du - \pi \nu e^{\nu(z+\zeta)} [H_0(\nu R) + Y_0(\nu R)] + 2\pi i \nu e^{\nu(z+\zeta)} J_0(\nu R) \tag{4.5}$$

여기서

$$r = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$r' = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$H_0$  : Struve function  
 $Y_0$  : Bessel function of second kind  
 $J_0$  : Bessel function of first kind

$$\tag{4.6}$$

이다.

외부 영역  $\Omega_2$ 에서의 해  $\phi_2(x, y, z)$ 는 임의의 경계면 상에 Green 함수를 분포시키고 분포된 점에서 세기  $\phi_{2i}$ 를 갖는 point source의 합으로 나타낸다. Green 함수가 분포된 점들의 갯수가  $M$ 개이고 그 중  $i$ 번째의 Green 함수를  $\Psi_i(x, y, z)$ 라고 표시하면 함수  $\phi_2$ 는 다음과 같이 미지의 계수  $\phi_{2i}$ 를 갖는 Green 함수들의 합

으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_2(x, y, z) = \sum_{i=1}^M \phi_{2i} \Psi_i(x, y, z) \quad (4.7)$$

4.3. 해  $(\phi_1, \phi_2)$ 의 도출

내부 영역  $\Omega_1$ 에서의 polynomial trial function  $\phi_1$ 과 외부 영역  $\Omega_2$ 에서의 Green function trial function  $\phi_2$ 를 구하였으므로 식 (4.4)와 식 (4.7)을 식 (3.6)에 적용하여 다음 식에서와 같이 범함수  $F_1(\phi_1, \phi_2)$ 의 1차 편미분이영(stationary)이 되도록 하는 점을 찾을 수 있다.

$$\frac{\partial F_1(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_{1i}} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (4.8a)$$

$$\frac{\partial F_1(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_{2i}} = 0 \quad i=1, \dots, M \quad (4.8b)$$

식 (4.4)와 식 (4.7)을 식 (4.8)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{1i}} = & \iiint_{\Omega_1} \left( \phi_{1x} \cdot \frac{\partial \phi_{1x}}{\partial \phi_{1i}} + \phi_{1y} \cdot \frac{\partial \phi_{1y}}{\partial \phi_{1i}} \right. \\ & \left. + \phi_{1z} \cdot \frac{\partial \phi_{1z}}{\partial \phi_{1i}} \right) dx dy dz \\ & - \nu \iint_{s_{r1}} \phi_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} ds - \iint_{s_0} V_n \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} ds \\ & + \iint_j \phi_{2n} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} ds \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{2i}} = & - \iint_j \left[ \frac{1}{2} \left( \phi_2 \cdot \frac{\partial \phi_{2n}}{\partial \phi_{2i}} + \phi_{2n} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_{2i}} \right) \right. \\ & \left. - \phi_1 \cdot \frac{\partial \phi_{2n}}{\partial \phi_{2i}} \right] ds \end{aligned} \quad (4.9b)$$

여기서 다음의 관계를 이용한다면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \dots \right] \{\phi_1\} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_{1i}} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} &= N_i \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial \phi_{2n}}{\partial \phi_{2i}} &= \Psi_{in}(x, y, z) \quad i=1, \dots, M \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_{2i}} &= \Psi_i(x, y, z) \quad i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.10)$$

식 (4.9)는 다음과 같은  $(N+M)$ 개의 대수 방정식으로 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{11} &= [a_{ij}]_{N \times N} \\ A_{22} &= [b_{ij}]_{M \times M} \\ A_{12} &= [c_{ij}]_{N \times M} \\ A_{21} &= [d_{ij}]_{M \times N} \end{aligned} \quad (4.12)$$

이다. 그러면 위 매트릭스의 요소들은 다음과 같은 식

으로 정의된다.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \iiint_{\Omega_1} (N_{ix} N_{jx} + N_{iy} N_{jy} + N_{iz} N_{jz}) dx dy dz \\ & - \nu \iint_{s_{r1}} N_i N_j ds \\ b_{ij} &= -\frac{1}{2} \iint_j (\Psi_{in} \Psi_j + \Psi_i \Psi_{jn}) ds \\ c_{ij} = d_{ji} &= \iint_j N_i \Psi_{jn} ds \\ f_i &= \iint_{s_0} V_n N_i ds \end{aligned} \quad (4.13)$$

여기서  $Q_1 = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ 이고  $Q_2 = [0, \dots, 0]^T$ 이다. 이와 같이 본래의 문제가 식 (4.11)에서처럼 대수 방정식의 문제로 귀착되었고 대수 방정식의 계수에 해당하는 매트릭스는 대칭성을 갖게되고 절점 번호를 적절히 매기면 띠행렬(banded matrix)이 된다.

그리고 식 (4.13)에서의 6개의 절점을 갖는 일반적인 삼각 기둥 요소에 대한 적분의 실제적인 수치 계산은 주요소(master element)인 적각 삼각 기둥 요소로서의 좌표변환과 Gauss의 적분 공식을 이용하여 수행하였다.

5. 수치 계산 및 고찰

본 논문에서 사용한 방법을 적용할 물체에 대한 형상과 운동 mode에 대해서는 제한이 없지만 현재의 계산은 구(sphere)를 비롯한 수직타원체(vertical spheroid) 및 수직 원기둥(vertical cylinder)의 상하 동요에 대해서만 수행하였다. 이 이유는 앞서 말한 물체들은 수직축 즉,  $z$ 축에 축대칭인 물체이므로 이런 형상을 갖는 물체의 상하 동요를 계산할 때는 물체와 유체 영역 전체에 대한 계산은 필요없고, Fig. 4와 같이 물체를 썩기 모양으로 잘라 계산한 후 전체 물체에 대한 값으로 환산하면 계산 시간이 월등히 적게 걸리므로 이와 같은 형태의 물체에 대해서 계산하여 본 논문의 타당성 정도를 검토하였다. 물론 여기서 취급한 수직 축대칭 물체에 대한 수직 운동을 다루기 위해서는 순전히 2차원 문제로 귀착될 수 있다. 그러나 본 연구에서는 3차원 유한 요소를 이용하였음을 다시 한번 강조한다.

이처럼 썩기 형태를 갖는 물체에 대한 문제를 계산할 때 썩기 내의 임의의 경계면 상에만 point source를 분포시키면 실제의 외부 영역에서의 유체의 유동을 묘사하여 줄 수 없으므로(썩기로 자른 면에서 횡유동이 없다는 rigid wall condition을 만족할 수 없다) 썩기 양쪽의 rigid wall에 대한 image source를 분포시켜야

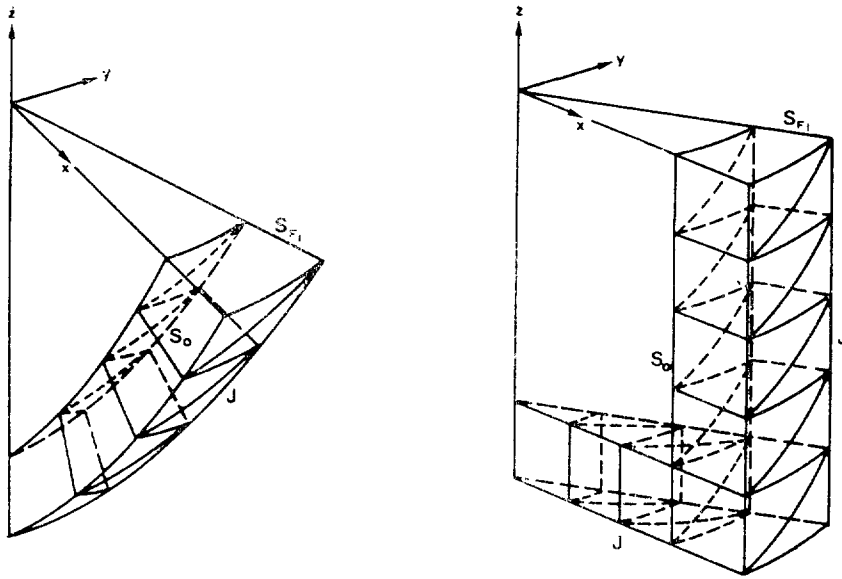


Fig. 4 Mesh subdivisions of a wedge of vertical spheroid and cylinder

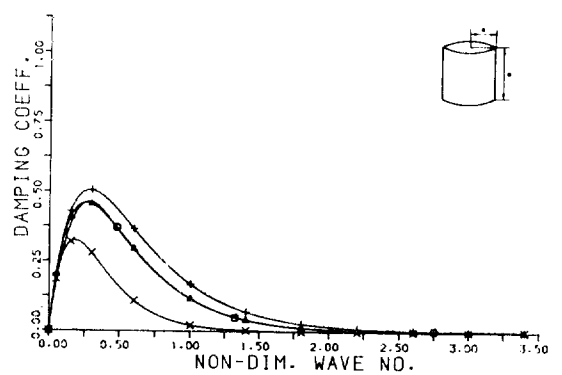
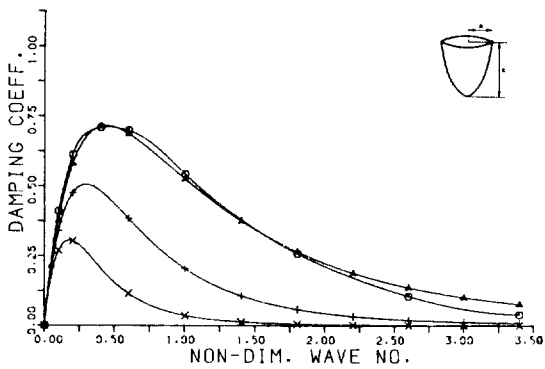
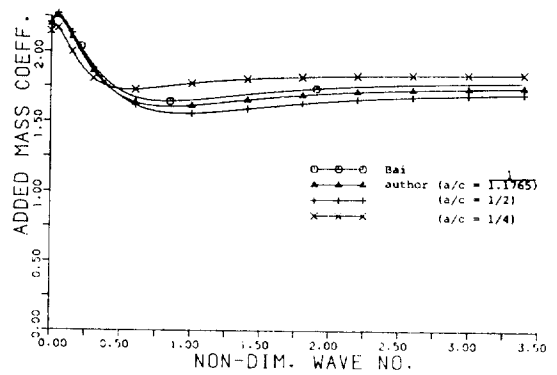
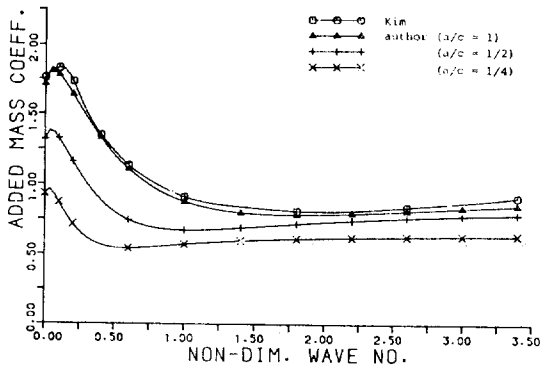


Fig. 5 Dimensionless added mass and damping coefficients of a heaving sphere and vertical spheroid

Fig. 6 Dimensionless added mass and damping coefficients of a heaving vertical cylinder.

유체의 유동을 완전히 표시할 수 있다. 그러나 source를  $z$ 축상에 분포시키면 image위치가 바로 그 점이므로 image를 고려할 필요가 없게 되어 계산 시간이 image source를 고려해야 하는 경우보다 월등히 줄어든다. 본 논문에서는 계산을 적게하기 위해 이와 같이 썬기 모양으로 잘라서 계산할 수 있는 물체와 운동 mode에서  $z$ 축에 source를 분포시켜 여러 형상에 대하여 계산하고 기존의 결과와 비교하였다.

본 논문에서 계산한 것은 구와 수직 타원체의 경우 썬기의 각도를  $10^\circ$ 로 작르고 밑으로도  $10^\circ$  간격으로 9등분하였고 source는  $z$ 축에 적당한 간격으로 5개를 놓았을 때의 값이다. 그리고 수직 원기둥에서는 썬기를  $10^\circ$ 로 작르고 아래 방향으로 5등분하여 계산하였다. 또한 물체 표면과 접한 경계 사이에서 유한 요소로 분할할 때 한결만으로 분할하여 계산하였고 한점의 두께는 편의상 물체 반경의 0.25배를 취하였다.

본 논문에서 사용되는 무차원화된 계수들인 부가질량 계수  $\bar{\mu}$ , 감쇄 계수  $\bar{\lambda}$  그리고 파수(wave no.)  $\nu a$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\mu} = \mu / \rho a^3$$

$$\bar{\lambda} = \lambda / \rho a^3$$

$$\nu a = \sigma^2 a / g$$

여기서  $\mu$ 와  $\lambda$ 는 각각 부가 질량과 감쇄 계수이고  $a$ 는 물체의 half-length이다. 그리고  $b$ 는 반폭,  $c$ 는 출수를 나타낸다. 축대칭 물체인 경우에는  $a=b$ 이다.

Fig. 5에서 구( $a/c=1$ )와 수직 타원체( $a/c=1/2, 1/4$ )에 대해서 무차원화된 파수에 따른 무차원화된 유체력 계수들의 값을 나타내고 있다.

구에 대하여는 Kim(1966)[5]이 적분 방정식으로 계산한 결과와 본 논문에서 계산한 결과를 비교하였는데 비교적 좋은 결과를 나타내고 있다.

그리고 수직 원기둥에 대한 유체력 계수들을 계산하였는데  $a/c=170/200=1/1.1765$ 인 경우에서 axisymmetric ocean platforms에 대한 Bai[6]의 결과와 비교하면 좋은 일치치를 보여주고 있다(Fig. 6).

한편 축대칭 물체를 썬기 모양으로 잘랐을 때  $z$ 축 외의 임의의 경계면에 source를 분포시켜 image의 영향을 고려하여 계산하여 보았다. 파수  $\nu a=1.0$ 인 경우에  $\bar{\mu}=0.8784$ ,  $\bar{\lambda}=0.5255$ 로 image를 고려하지 않고  $z$ 축에 분포시켰을 때의  $\bar{\mu}=0.8756$ ,  $\bar{\lambda}=0.5261$ 의 값과 큰 차이가 없고 계산 시간은 10배 이상 길리므로 전체 파수에 대한 계산을 실행하지 않았다.

## 6. 결 언

본 논문에서 국소 유한 요소법을 이용하여 3차원 자유 표면파 문제를 다루었다. 외부 영역을 나타내는 해석해로써 Green함수를 이용하는 국소 유한 요소법에서 한점의 유한 요소의 배열과 적은 수(5개)의 특이점 분포로 수직축 대칭 물체에 대하여 상하 동요의 경우 좋은 결과를 얻었다. 계산 시간상, 썬기 형태로 잘라 계산 영역을 적게할 수 있는 수직 축대칭 물체의 상하 동요에 대해서만 결과를 보여주고 있지만, 현재 개발된 program을 이용하면 수학적 형상의 3차원 물체에 임의의 형상의 실선이나 복잡한 해양 구조물에 대해서도 여러 운동 mode에 따라 유체력을 계산할 수 있겠다. 또한 본 방법의 경우 종래의 국소 유한 요소법과는 달리 특이 파수가 존재하지 않고 최종 매트릭스는 대칭 매트릭스가 되므로 계산 시간면에서도 효율적이다.

장래에는 유한 요소법이 적용되는 내부 영역에 비선형 자유 표면 경계 조건을 적용하여 더 정확한 해를 구하는 것이 바람직하다고 생각된다(Luke[7]).

## 후 기

본 논문은 한국과학재단의 연구비 지원하에 이루어졌음을 부기하며, 한국과학재단에 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

- [1] Bai, K.J. & Yeung, R.W., "Numerical Solutions to Free Surface Flow Problems", The 10th Symposium on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, Cambridge, Mass., pp.609-647, 1974.
- [2] Kil, H.K. & Bai, K.J., "An Application of the Localized Finite Element Method to Two-dimensional Free Surface Wave Problems", *J. of SNAK*, vol. 22, No. 3, pp.9-18, 1985.
- [3] Haskind, M.D., "The Exciting Forces and Wetting of Ships in Waves", English Translation: DTMB Trans. No. 307, 1957.
- [4] Shin, Y.S., "Three Dimensional Effects on the Hydrodynamic Coefficients and Wave Exciting Forces used in Predicting Motions of Ships", Ph.D. Dissertation, Department of Naval Archi-

- tecture and Marine Engineering, University of Michigan, 1979.
- [5] Kim, W.D., "On a Free-Floating Ship in Waves", *J. Ship Res.*, vol. 10, pp. 182-191+200, 1966.
- [6] Bai, K.J., "The Added and Damping Coefficients of and the Excitation Forces on Four Axisymmetric Ocean Platforms", David W. Taylor Naval Ship Research & Development Center, Bethesda, Maryland, Report SPD-670-01, April, 1976.
- [7] Luke, J.C., "A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface", *J. Fluid Mechanics*, vol. 27, part 2, pp. 395-397, 1967.
- [8] 김세은, "3차원 자유표면파 문제에서의 국소유한 요소법의 응용", 서울대학교 대학원 조선공학과 석사학위논문, 1986.