

大韓造船學會誌
第24卷 第1號 1987年 3月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 24, No. 1, March 1987

補剛 원통 Shell의 挫屈 및 最適補強

張 昌 斗* · 盧 完**

Buckling and Optimum Reinforcement of Axially Stiffened Cylindrical Shells

Chang Doo Jang* · Wan Nho**

Abstract

The energy expressions are formulated for the axially stiffened shell treating the stiffeners as discrete elements. The principle of minimum potential energy is employed to formulate the buckling equations for a simply supported, axially stiffened shell under uniform axial compression.

The displacement functions are expanded into double trigonometric series. The mode assuming method employed in this paper makes it possible to reduce the matrix size of the eigenvalue problem considerably.

Efforts are made to investigate the transition from overall buckling to local buckling and to verify the existence of the minimum stiffness ratio of stiffener as in the case of stiffened plate. The results of the calculation show that the critical stiffener size increases linearly as the length of the shell increases. The results also show that the overall buckling load decreases and the local buckling load has a nearly constant value as the length of the shell increases. The results show very good agreements with other computational results available.

기 호 정 의

A_s : stringer의 단면적
 d_s : stringer의 깊이
 E : shell의 탄성계수
 E_s : stringer의 탄성계수
 G_s : stringer의 전단계수
 I_s : stringer의 shell 증양면에 대한 2차 모멘트
 J_s : 보강재의 비틀상수

$$= \sum_{k=1}^{n_s} \frac{t_s^3 d_s}{3} \left(1 - \frac{192 t_s}{\pi^5 d_s} \cdot \tanh \frac{\pi d_s}{2 t_s} \right) \quad [1]$$

 L : shell의 길이
 m, n : 길이 방향 half-wave수와 원주방향 full-wave수

ν : Poisson's ratio
 n_s : stringer의 수
 N_x : 축방향 단위 길이당 좌굴 압력
 p_x : 축방향 좌굴 압력
 r : shell의 반지름
 σ_x : 축 방향 좌굴 응력
 t : shell의 두께
 t_s : stringer의 두께
 u, v, w : x, θ, z 방향의 변위
 U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} : x, θ, z 방향의 변위 상수
 Z : stringer의 shell 증양면에 대한 1차 moment
 θ_k : k 번째 stringer의 원점으로부터의 각도
 D : shell의 굽힘강성 $\left(= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \right)$

* 正會員, 서울大學校 工科學大學

** 正會員, 서울大學校 大學院

$$r_{min} = \frac{n_s E_s I_s}{2\pi r D} : \text{보강재의 최소강비 (min. stiffness ratio)}$$

1. 서 언

Shell 구조는 그의 기하학적 특성에 기인한 강성의 효율적인 증대와 경량성 때문에 각종 구조물에 널리 사용되어 왔다. Shell 구조의 합리적이고 경제적인 설계를 위해서는 주어진 외력에 대한 구조강도를 정확히 평가하여야 하는데, 특히 shell 구조의 취약점이라 할 수 있는 좌굴에 대한 진단 및 평가는 필요 불가결한 것이다.

Shell 구조의 좌굴 해석에는 여러가지 해석기법이 적용되어 왔다. 즉 고전적인 shell 이론으로 좌굴 변형을 고려한 상태에서 평형미분 방정식을 수립하여 이의 해석해를 구하는 방법 [2,3] 등이 있으나 실제로 해석적인 엄밀해를 구하는 것은 어려우며, 더우기 보강 shell의 경우는 거의 불가능하다. 이에 대해 차분법등의 수치 미분법을 적용하는 방법도 있으나 수렴성과 경제성에 문제가 있다. 또한 보강재의 강성을 shell 표면에 분포시켜 이방성 shell로 치환하여 좌굴하중을 구하는 방법 [4~6] 등도 있으나 이 방법으로는 국부좌굴을 고려할 수 없는 단점이 있다. 이에 대해 보강재의 이산성(discreteness)을 고려하여 보강 shell의 좌굴에 대한 해석도 수행된 바 있다[7,8]. 일반적으로 최근 널리 사용되고 있는 유한 요소법에 의한 해석은 stringer와 같이 종방향 보강재가 있는 경우에는 축대칭 문제로 단순화하기 어려운 관계로 연립방정식의 차원이 매우 커지므로 방대한 계산 시간이 소요되는 결점이 있다.

본 논문에서는 에너지법에 근거한 최소 포텐셜 원리와 Rayleigh-Ritz Method를 이용하여 좌굴 전후의 변위계를 적절한 변위함수를 도입하여 이들 변위함수의 일반화 좌표에 관한 연립방정식으로 정식화하여 고유치를 구함으로써 좌굴하중을 구한다. 이러한 방법을 통해서 stringer로 보강된 shell이 축압축하중을 받는 경우에 대하여 보강재의 이산성을 고려한 방법으로 전체 좌굴(overall buckling)과 국부좌굴(local buckling) 현상을 규명하고, 최적 보강을 위한 보강재의 치수를 결정하기 위한 기초 연구를 수행하여 그 수요가 날로 증가하고 있는 이들 보강 shell 구조의 강도설계에 필요한 기초 자료를 제공하고자 하였다. 즉 원통 shell의 길이, 보강재의 치수등의 변화에 따른 전체 및 국부좌굴의 하중 및 mode 변화를 규명하였다. 또 이 계산을 통하여 보강재가 작을 경우 보강재의 위치와 무관하게 좌굴 mode를 형성하는 전체 좌굴이 발생하며, 이 전체

좌굴 응력은 보강재의 크기가 커짐에 따라 증가하는 경향을 가짐을 알 수 있었다. 그리고 보강재의 크기가 어느 크기 이상으로 커지면 보강재 사이로 좌굴 mode를 형성하는 국부 좌굴이 발생하며 이 국부 좌굴 응력은 보강재가 그 이상 커져도 증가하지 않음을 보였다. 이에 따라 보강 shell 구조에 있어서도 보강 평판에서와 같이 최소 강비(r_{min})가 존재함을 본 연구를 통하여 분명히 밝히고 그 특성을 최적보강에 이용할 수 있게 하였다. 그리고 shell의 길이 변화에 따른 좌굴 응력 그리고 국부 좌굴과 전체 좌굴의 분기점이 되는 임계 보강재 크기의 변화와, 길이 변화에 따른 국부 좌굴과 전체 좌굴 하중의 변화를 살펴 보았다.

2. 문제의 정식화

2.1. 기본적인 가정

Shell의 좌굴 문제를 다루기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

(1) 변형전 shell 중앙면에 수직인 면은 변형후에도 평면을 유지하며 중앙면에 수직하게 된다. 그러므로 중앙면에 수직인 전단 변형률 γ_{xz} , $\gamma_{\theta z}$ 는 무시할 수 있다. 그리고 변형은 주로 굽힘에 의해 발생하므로 ϵ_z 도 무시한다.

(2) 중앙면에 수직한 응력 σ_z 는 다른 방향 응력에 비해 작으므로 무시한다.

(3) Shell의 두께는 다른 차원에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다.

(4) 보강재는 shell면에 완전하게 부착되어 있다.

2.2. 변형률과 변위의 관계식

Fig. 1에 보인것과 같은 원통 shell 구조가 있다. 좌표축을 그림과 같이 잡고 u 를 x 방향 변위, v 를 θ 방향 변위, w 를 z 방향 변위라 할때 shell 중앙면의 변형률과 변위의 관계식은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}\beta_x^2, & \beta_x &= -w_{,x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r}(v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2}\beta_\theta^2, & \beta_\theta &= \frac{1}{r}(v - w_{,\theta}) \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{1}{r}u_{,\theta} + v_{,x}\right) + \beta_x\beta_\theta \end{aligned} \quad (1)$$

중앙면에서 z 만큼 떨어진 곳의 변형률 및 곡률은 (2)식과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \epsilon_x + z\kappa_x, & \kappa_x &= \beta_{x,x} \\ \bar{\epsilon}_\theta &= \epsilon_\theta + z\kappa_\theta, & \kappa_\theta &= \frac{1}{r}\beta_{\theta,\theta} \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} + 2z\kappa_{x\theta}, & \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\beta_{x,\theta} + \beta_{\theta,x}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

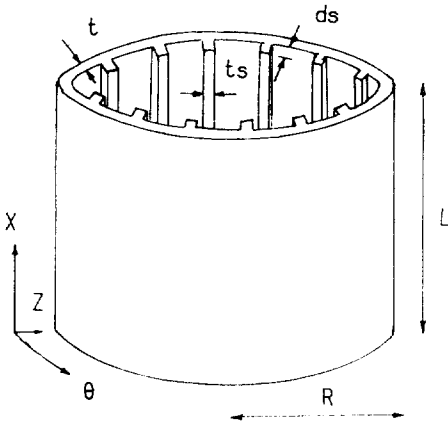


Fig. 1 An Axially Stiffened Shell

2.3. 응력과 변형률의 관계

응력과 변형률의 관계는 Hooke의 법칙에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta) \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) \\ \bar{\tau}_{x\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{x\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

단위 길이당 힘은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}_x dx = \frac{Et}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta) = C \cdot (\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta) \\ N_\theta &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}_\theta dz = \frac{Et}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) = C \cdot (\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) \\ N_{x\theta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\tau}_{x\theta} dz = \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma_{x\theta} = C \cdot \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$

2.4. 전체 Potential Energy와 변위 함수의 도입

보강된 원통 shell의 전체 potential energy는 다음과 같이 나타난다.

$$V = U_1 + U_2 + \Omega_1 + \Omega_2 \quad (5)$$

여기서 U_1 : shell의 strain energy

U_2 : stringer의 strain energy

Ω_1 : shell의 Potential energy

Ω_2 : stringer의 Potential energy

여기서 각 변위에 증분을 다음과 같이 준다.

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ v &= v_0 + v_1 \\ w &= w_0 + w_1 \end{aligned} \quad (6)$$

이때 u_0, v_0, w_0 는 좌굴전 변위이며 u_1, v_1, w_1 은 좌굴

후의 변위로 다음과 같이 가정한다[6].

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \\ v_1 &= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta \\ w_1 &= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \end{aligned} \quad (7)$$

2.5. 고유치 문제의 구성

위와 같이 변위에 증분을 주었을때 전체 Potential energy의 증분은 다음과 같다.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots \quad (8)$$

좌굴의 조건은 Trefftz criterion에 의해 다음과 같이 주어진다[3].

$$\delta(\delta^2 V) = 0 \quad (9)$$

여기서 potential energy함은 선형항으로 이루어지므로 (8)식에 영향을 주지 못한다. (5)~(9)에 대한 상세한 식은 부록에 나타나 있다(A.1~A.4). (9)식에 의해 고유치 문제가 형성이 되는데 이의 기본적 형태는 (10)식과 같고 matrix의 크기는 $3kl \times 3kl$ 이 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ac} \\ A_{ca} & A_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서 $\phi_a = [U_{mn} \ V_{mn}]^T$, $\phi_c = [W_{mn}]^T$ 이며 (10)식 우항의 matrix 특성을 이용하여 matrix 크기를 $kl \times kl$ 로 줄일 수 있다.

$$\begin{aligned} [A_a] \{\phi_c\} &= \lambda [B_{cc}] \{\phi_c\} \\ A_a &= A_{cc} - A_{cc} A_{aa}^{-1} A_{ca} \end{aligned} \quad (11)$$

위와 같은 조작을 통해 고유치 문제를 푸는 계산 시간을 크게 절약할 수 있게 된다.

3. 계산 결과

3.1. 좌굴 mode 추정에 대한 고찰

변위 함수를 (7)식과 같이 이중 급수로 가정하였으나, ring이 없고 stringer만으로 보강된 shell의 경우 길이 방향 변위는 급수로 표시할 필요가 없이 하나의 항만으로 표시할 수 있다. 이 사실은 변위함수를 이중 급수로 가정하여 계산했을 때 한 항 이외의 eigenvector 값(즉 변위 함수에 곱해지는 상수항)은 영이됨을 확인함으로써 증명될 수 있다. 이는 변위 함수가 아래와 같이 표현될 수 있음을 뜻한다.

$$u = \cos \frac{m\pi x}{L} \sum_{n=1}^l U_{m,n} \cos n\theta$$

$$v = \sin \frac{m_k \pi x}{L} \sum_{n=1}^I V_{m_k n} \sin n\theta$$

$$w = \sin \frac{m_k \pi x}{L} \sum_{n=1}^I W_{m_k n} \cos n\theta \quad (12)$$

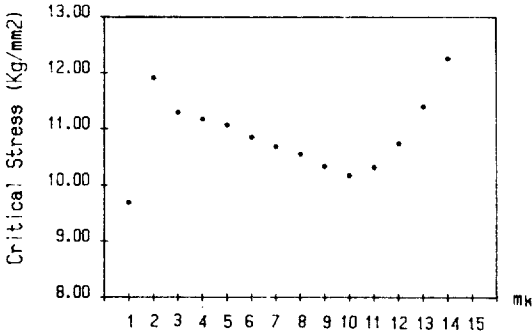


Fig. 2 Variation of buckling stress with longitudinal half wave number m_k for simply supported, stiffened cylinder under axial compression.
($L=400\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$ $d_s=10\text{mm}$)

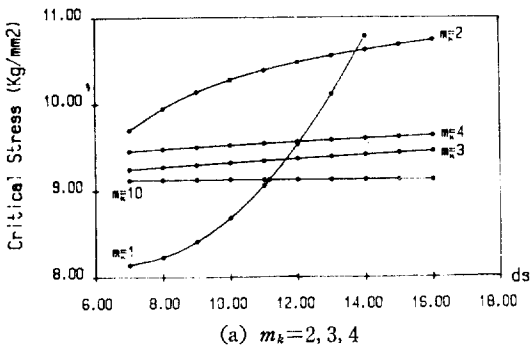
m_k 값을 변화시키에 따라 Fig. 2와 같이 좌굴 응력이 변하는데 이때 $m_k=1$ 에서 전체 좌굴이, 그리고 두번째 최소값을 갖는 m_k (Fig. 2에서는 10)에서 국부좌굴이

발생함을 전 계산과정을 통하여 알 수 있었다.

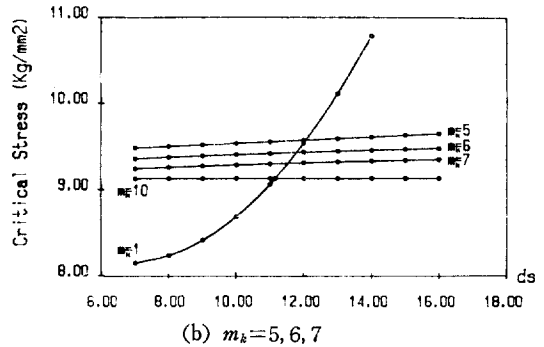
한 예로 각 m_k 값에 있어서 좌굴 응력의 보강재 크기에 대한 변화를 Fig. 3에 나타내었다. 그림에서 보듯이 전체 좌굴은 $m_k=1$ 에서 발생하며 국부좌굴은 m_k 가 Fig. 2에서 두번째 최소값을 가진 값 $m_k=10$ 에서 발생함을 볼 수 있다.

그리고 변위 함수의 형태로 볼때 원주방향 w 의 변위가 cosine 함수이므로 첫 보강재의 위치 $\theta_1 = \frac{\pi}{n_s}$ 로 정하는 것이 θ_1 을 영으로 정하는 것보다 수렴성이 더 좋아지게 됨을 알 수 있다.

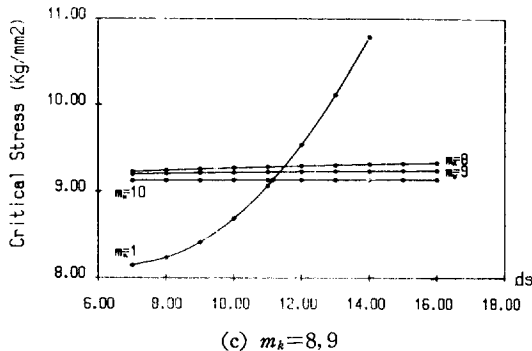
계산을 시작할 때 먼저 $I=32$ 로 하여 원주 방향 변위는 32개 함수의 합으로 이루어지게 계산하였다. 그 결과로 나온 eigenvector를 살펴보면, 같은 치수의 보강재들이 등간격으로 배치 되었을 경우 실제 좌굴 mode에 수렴하기 위해 필요한 n 값들이 $n=3, 9, 15, \dots$ 와 같이 규칙성을 갖게 된다. 그러므로 이 규칙성에 맞추어 필요한 항들을 열번째 항까지 고려하여 계산하였다. (예 : $n=3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57$) 이러한 방식으로 n 의 값을 정하여 주었기 때문에 고유치 문제의 크기를 대폭 줄이면서 똑같이 정확한 값을 얻을 수 있었다. 예를들면 $m=1$ $n=3, 9, 15, \dots, 57$ 일때 좌굴 하중을



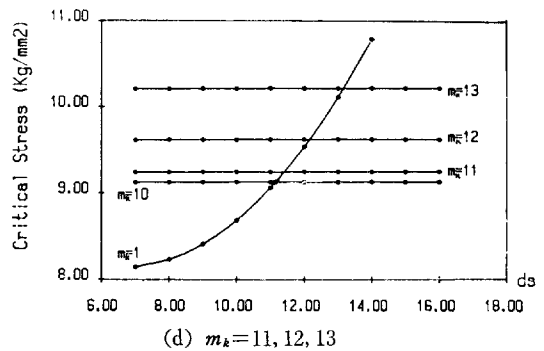
(a) $m_k=2, 3, 4$



(b) $m_k=5, 6, 7$



(c) $m_k=8, 9$



(d) $m_k=11, 12, 13$

Fig. 3 Comparison of buckling stress with other values of m_k
($L=400\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

일기 위해서는 $3kL \times 3kL$, 즉 171×171 의 matrix 크기를 갖는 고유치 문제를 풀어야 하는데 전 절에서 보인 방법으로 57×57 의 크기로 줄일 수 있으며 위에 설명한 방법으로 10×10 크기의 고유치 문제로 다시 축소시킬 수 있는 것이다.

이와 같은 방식의 계산은 수렴성도 뛰어나서 원주방향 함수에 한 항을 더 추가해 주어도 좌굴 하중의 값은 0.01%이하의 변화를 보일 뿐이었다.

그리고 본 논문의 계산에서는 의력 Potential energy 에 미치는 원주 방향 변위 성분 $(\frac{1}{2}v, 2)$ 을 무시하였는데 이는 그로 인한 오차는 작은 반면, 이 항을 무시함으로써 위에 지적한 바와 같이 matrix 크기를 줄여 계산 시간을 대폭 감소시킬 수 있기 때문에 후자의 길을 택하였다. 한 예로 길이 500mm 보강재 높이 15mm 인 경우, 원주 방향 변위 성분을 고려한 좌굴 응력은 9.1416kg/mm^2 이며 원주 방향 변위 성분을 고려하지 않은 경우의 좌굴 응력은 9.1423kg/mm^2 이었다. Kunoo [10]도 이 점에 대하여 언급한 바 있다.

3.2. 계산 결과의 비교

본 해석법을 이용한 계산결과와의 정도를 검증하기 위하여 아래의 해석 model에 대해 축압축 좌굴강도 계산 결과를 이미 발표된 다른 논문의 값들과 비교해 보면 Table 1과 같이 거의 일치함을 알 수 있다.

[해석 model] $E=E_s=10 \times 10^6\text{psi}$ $\nu=0.3$
 $L=4\text{in}$. $R=4.00158\text{in}$. $t=0.00774\text{in}$.
 $N_s=80$ $t_s=0.06607\text{in}$. $ds=0.01873\text{in}$.

3.3. 계산결과

지금까지 유도된 계산 방법에 따라 아래와 같은 해석 model을 선택하여, 양단 단순지지의 경계조건을 가하였다.

[model] $E=E_s=7521.6\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.3$, $r=500\text{mm}$
 $t=1\text{mm}$, $n_s=12$, $t_s=3\text{mm}$

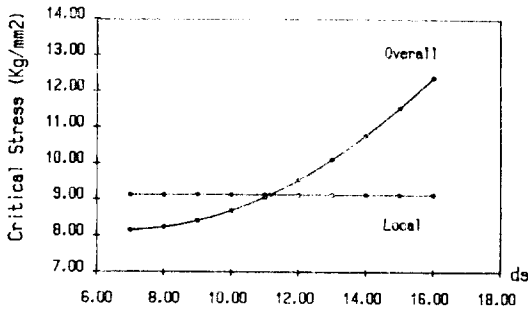


Fig. 4 Buckling stress vs. stiffener size curve for shell ($L=400\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

이 model에 대하여 보강재의 크기 및 셸의 길이의 변화에 따른 좌굴응력을 계산한 결과를 Fig. 4~10에 도시하였다.

Table 1 Sample calculation

| | 좌굴하중 (lb/in) | mode | 좌굴형태 |
|---------|--------------|--------------|------|
| Ref.[5] | 134.4 | $m=1$ $n=11$ | 전체좌굴 |
| 본 논문 | 134.36 | $m=1$ $n=11$ | 전체좌굴 |

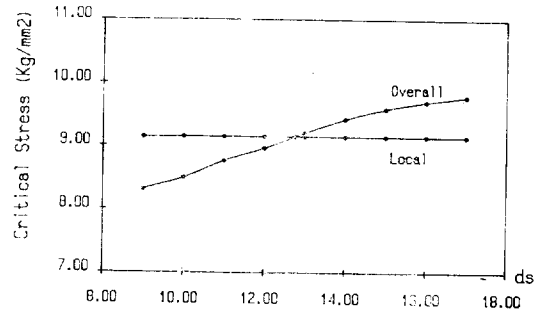


Fig. 5 Buckling stress vs. stiffener size curve for shell ($L=450\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

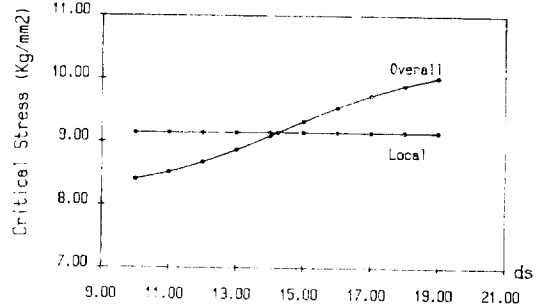


Fig. 6 Buckling stress vs. stiffener size curve for shell ($L=500\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

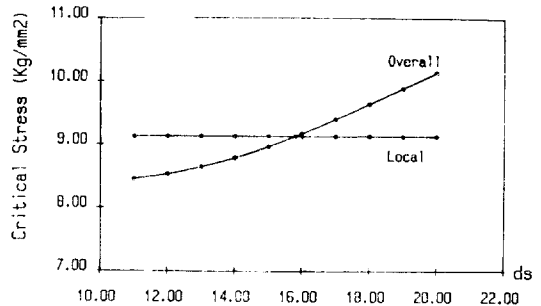


Fig. 7 Buckling stress vs. stiffener size curve for shell ($L=550$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

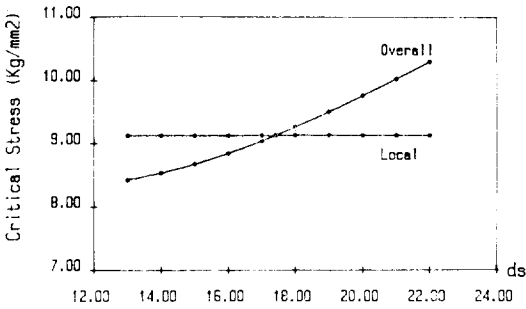


Fig. 8 Buckling stress vs. stiffener size curve for shell ($L=600\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

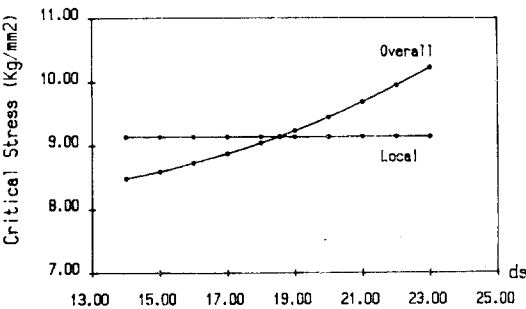


Fig. 9 Buckling stress vs. stiffener size curve for shell ($L=650\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

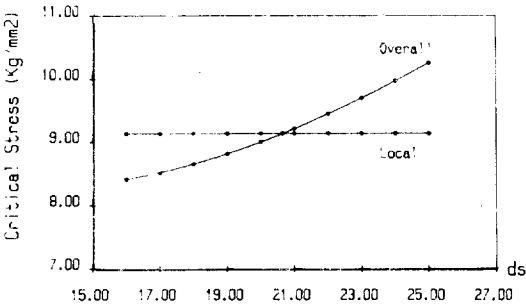


Fig. 10 Buckling Stress vs. stiffener size curve for shell ($L=700\text{mm}$ $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

3.4. 최소강비(γ_{min})에 대한 고찰

보강재의 크기 증가에 따른 좌굴응력의 변화를 보면 Fig. 4~10과 같이 보강재가 작을 때 전체 좌굴이 발생하며, 보강재의 크기가 커짐에 따라 전체 좌굴응력의 크기가 증가하게 된다. 그러나 어느 정도 이상 보강재가 커질때 국부좌굴이 발생하게 되며 국부좌굴응력은 보강재의 크기가 커져도 더 이상 증가하지 않게

된다. 따라서 국부좌굴이 발생하는 보강재 크기 이상으로 보강해 주어도 좌굴하중의 큰 증가는 기대할 수 없기 때문에 그 이상으로 보강한다는 것은 효율적인 보강이라 할 수 없을 것이다. 이러한 현상은 보강 평판에서 사용되는 최소강비(γ_{min})라는 개념이 보강 shell에서도 존재함을 말해주는 것이며, 이 개념은 최적 보강에 상당히 유용하게 쓰일 수 있을 것이다. 따라서 본 논문에서는 stringer로 보강된 원통셸의 최소강비(最小剛比: min. stiffness ratio)를 보강재의 개수 및 강성, 셸의 반경 및 강성 등을 이용하여 (13)식과 같이 정의하였다.

$$\gamma_{min} = \frac{n_s \cdot E_s I_s}{D(2\pi r)} \tag{13}$$

여기서 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 로서 셸의 굽힘강성을 나타낸다.

이 γ_{min} 의 값은 원통셸의 좌굴강도의 전지에서 보강재의 최적 치수를 설계하기 위한 하나의 기준이 될 수 있을 것이다.

본 논문에서 계산의 대상이 된 모델의 최소강비(γ_{min})의 값은 아래와 같다.

Table 2 The values of minimum stiffness ratios

| L/R | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
|----------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| γ_{min} | 65.95 | 97.02 | 133.58 | 180.64 | 239.22 | 288.36 | 394.62 |

3.5. 좌굴 mode 및 계산 결과에 대한 고찰

대표적인 전체좌굴 mode와 국부좌굴 mode가 Fig.11 a, b에 각각 나타나 있다.

위 그림에서 보듯이 전체 좌굴 mode는 보강재의 위치에 구애받지 않는 형태를 갖게되며 국부좌굴 mode는 보강재의 강성이 크기 때문에 보강재 사이로 좌굴 mode가 형성된다. 본 논문의 계산에서는 보강재의 비틀림강성을 고려했기 때문에 국부좌굴에서의 같이 보강재의 크기가 큰 경우 Fig. 11b와 같이 보강재의 비틀림이 억제된 현상이 나오게 된다. 그리고 전체 좌굴과 국부좌굴이 같이 일어나는 보강재의 일체 높이는 Fig. 12에서 보듯이 shell 길이의 증가에 따라 거의 선형적으로 증가함을 볼 수 있다.

그리고 일정한 보강재의 크기에 shell의 길이가 변할 때 좌굴응력의 변화를 보면 Fig. 13에 보이는 것과 같이 전체 좌굴응력은 길이의 증가에 따라 감소하나 국부 좌굴응력은 거의 일정함을 볼 수 있다. 그러므로 어느 길이 이상으로 shell의 길이가 늘어나면 좌굴하중이 감소하며 그 길이 이하로 짧아지면 국부좌굴로 좌굴하

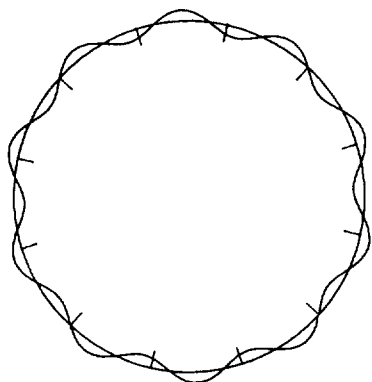


Fig. 11. a Overall buckling mode ($L=600\text{mm}$
 $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$
 $d_s=14\text{mm}$)

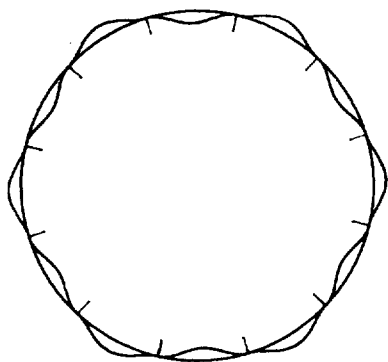


Fig. 11. b Local buckling mode ($L=600\text{mm}$
 $r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$
 $d_s=20\text{mm}$)

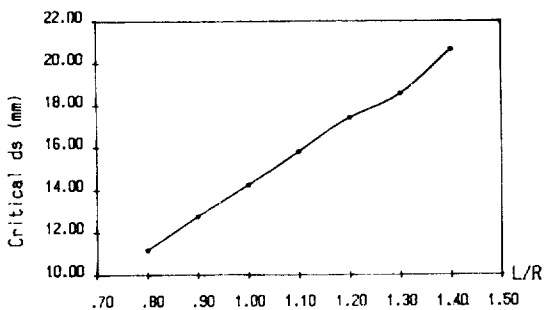


Fig. 12 Critical stiffener depth vs. shell length curve for shell ($r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$)

중이 거의 일정하게 되는 임계 L/R (長徑比)가 존재함을 알 수 있다. 따라서 이 점은 보강 원통 shell에 설계시 고려해야 할 중요한 사항이라고 할 수 있을 것이다.

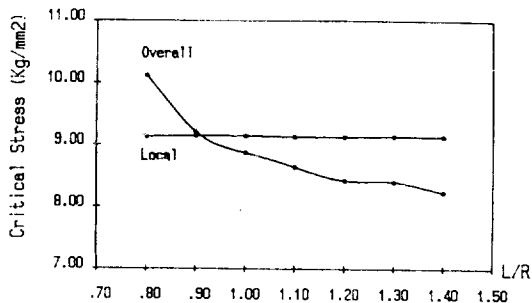


Fig. 13 Buckling stress vs. shell length curve for shell ($r=500\text{mm}$ $t=1\text{mm}$ $n_s=12$ $t_s=3\text{mm}$ $d_s=13\text{mm}$)

4. 결 론

보강재의 이산성을 고려한 본 해석법을 이용하여 stringer로 보강된 원통 shell의 좌굴 거동을 원통의 길이, 보강재의 치수 등을 변화시키며 조사한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

(1) 좌굴변형을 나타내는 변위함수를 종래와 달리 급수형태로 취하고 좌굴하중에 주된 영향을 미치는 항들만을 취하며 해석하므로써 계산의 자유도 및 시간의 대폭 단축과 정도의 향상이 가능함을 보였다.

(2) Stringer로 보강된 shell의 경우 길이방향 변위함수는 하나의 항만으로 이루어질 수 있으며, 전체 좌굴인 경우 길이 방향 좌굴 mode의 wave 수는 1이며, 국부좌굴인 경우 길이 방향 좌굴 mode의 wave 수는 Fig. 2에서와 같이 두번째 최소값을 갖는 m_s 가 된다.

(3) 외력 포텐셜에너지에 미치는 원주방향 변위성분 ($\frac{1}{2}v_x^2$)을 무시함으로써 전체 행렬을 1/3로 축소하여 계산시간의 대폭적인 절감이 가능하며, 이로 인한 오차는 1%이내 임을 규명하였다.

(4) 주어진 model에서 보강재의 높이를 증가시켜 주면 전체 좌굴응력은 급격히 증가하나 국부 좌굴응력은 거의 일정하여 어느 보강재 높이에서 국부좌굴과 전체 좌굴이 함께 발생하는 분기점이 발견되었다. 이 분기점을 기준으로 더 낮은 보강재 높이에서는 전체 좌굴이 발생하며, 이 보다 높은 보강재 높이에서는 국부 좌굴이 발생하게 된다. 이러한 좌굴 거동특성을 볼 때 보강평판의 최소좌굴비(γ_{min}) 개념이 보강 shell에도 존재함을 밝히고 이를 정의하였다($\gamma_{min} = \frac{n_s \cdot E_s I_s}{2\pi r \cdot D}$)

(5) Shell 길이 증가에 따라 국부좌굴, 전체 좌굴의 분기점이 되는 임계 보강재 높이는 선형적으로 증가하는 경향을 갖는다.

(6) 일정한 보강재 높이에서 長徑比(L/R) 증가에 따른 전체 좌굴응력 변화와 국부 좌굴응력의 변화를 보면 전체 좌굴응력은 급격히 감소하나 국부 좌굴응력은 거의 일정함을 알 수 있다. 이 두 좌굴응력곡선이 만나는 長徑比(L/R) 이하로의 설계가 합리적일 것이며 長徑比를 이 보다 크게 할 경우 급격한 좌굴응력의 감소를 감수해야 할 것이다.

끝으로 본 연구는 86년도 문교부 학술연구조성비 지원연구의 일환으로 수행되었으며 ring 및 stringer로 보강된 원통셸에 대하여도 연구를 수행중에 있음을 부기한다.

참 고 문 헌

[1] C.T. Wang, "Applied Elasticity", McGraw Hill, New York, 1953.
 [2] S.P. Timoshenko and Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, Kogakusha, 1961.
 [3] D.O. Brush, and B.O. Almroth, "Buckling of Bars, Plates, and Shells", McGraw Hill, 1975.
 [4] R.M. Jones, "Buckling of Circular Cylindrical Shell with Multiple Orthotropic Layers and Eccen-

tric Stiffeners", *AIAA Jour.* Vol. 6 No. 12, Dec. 1968.
 [5] J. Arbocz and E.E. Sechler, "On the Buckling of Stiffened Imperfect Cylindrical Shells", *AIAA Jour.* Vol. 14, No. 11, Nov. 1976.
 [6] M.I. Baig and T.Y. Yang, "Buckling Analysis of Orthogonally Stiffened Waffle Cylinders", *Jour. of Spacecraft and Rockets.* Vol. 11, No. 12, Dec. 1974.
 [7] E. Byskov and J.W. Hutchinson, "Mode Interaction in Axially Stiffened Cylindrical Shells", *AIAA Jour.* Vol. 15, No. 17, July 1977.
 [8] T.Y. Yang and Kazuo Kunoo, "Buckling of Cylindrical Shells with Smeared-Out and Discrete Orthogonal Stiffeners", *AIAA Jour.* Vol. 15, No. 12, Dec. 1977.
 [9] K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall, 1982.
 [10] K. Kunoo "Minimum Weight Design of Cylindrical Shell with Multiple Stiffener Size under buckling Bonstraints", Ph.D. Thesis Purdue Univ. 1976.

부 록

탄성 상태의 변형 energy는 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\epsilon}_x + \bar{\sigma}_\theta \bar{\epsilon}_\theta + \bar{\tau}_{x\theta} \bar{\gamma}_{x\theta}) dV \tag{A.1}$$

여기에 (1), (2), (6)식을 대입하면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 V = & \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[u_{1,x}^2 + \frac{1}{r^2} (v_{1,\theta}^2 + w_1^2 + 2v_{1,\theta} w_1) \right. \\ & + \frac{2\nu}{r} (u_{1,x} v_{1,\theta} + u_{1,x} w_1) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{r^2} u_{1,\theta}^2 + \frac{2}{r} u_{1,\theta} v_{1,x} + v_{1,x}^2 \right) \Big] dx d\theta \\ & + \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[N_{x\theta} w_{1,x}^2 + N_{\theta\theta} \left(\frac{v_{1,\theta} + w_1}{r} \right)^2 + 2N_{x\theta\theta} \left(\frac{1}{r} w_{1,x} w_{1,\theta} - \frac{1}{r} v_{1,x} w_{1,\theta} \right) \right] dx d\theta \\ & + \frac{rD}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[w_{1,xx}^2 + \frac{1}{r^4} (v_{1,\theta}^2 - 2v_{1,\theta} w_{1,\theta\theta} + w_{1,\theta\theta}^2) \right. \\ & + \frac{2\nu}{r^2} (w_{1,xx} \cdot w_{1,\theta\theta} - v_{1,\theta} w_{1,xx}) + \frac{1-\nu}{2r^2} (v_{1,x}^2 - 4v_{1,x} w_{1,x\theta} + 4w_{1,x\theta}^2) \Big] dx d\theta \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} \int_0^L (E_s A_s u_{1,x}^2 + E_s I_s w_{1,xx}^2 - 2E_s Z_s u_{1,x} w_{1,xx} + \frac{1}{r^2} G_s J_s w_{1,x\theta}^2)_{\theta=\theta_k} dx \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} \int_0^L t_s \cdot N_{x\theta} w_{1,x}^2 dx |_{\theta=\theta_k} \end{aligned} \tag{A.2}$$

여기서 $A_s = \int_{A_s} dA = t_s d_s$

$$\begin{aligned}
 Z_s &= \int_{\Lambda_s} z dA = \frac{1}{2} t_s d_s (t + d_s) \\
 I_s &= \int_{\Lambda_s} z^2 dA = t_s d_s \left(\frac{d_s^2}{3} + \frac{t d_s}{2} + \frac{t^2}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

(7)식을 (A.2)식에 대입하여 (9)식을 적용시키면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial U_{mn}} &= \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot L\pi r + \frac{1-\nu^2}{2r^2} \cdot n^2 \cdot L\pi r \right] \right\} U_{mn} \\
 &+ \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} E_s A_s \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot L \cdot \cos n\theta \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^l \cos q\theta_k \cdot U_{mq} \right] \right\} \\
 &+ \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[-\frac{2\nu}{r} \cdot \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} - \frac{1-\nu}{r} \cdot \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] \right\} V_{mn} \\
 &+ \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{2\nu}{r} \cdot \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] \right\} W_{mn} \\
 &+ \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} (-2E_s \cdot Z_s) \cdot \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos n\theta_k \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^l \cos q\theta_k \cdot W_{mq} \right] \right\} = 0 \\
 \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial V_{mn}} &= \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[-\frac{2\nu}{r} \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} - \frac{1-\nu}{r} \cdot \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] \right\} U_{mn} \\
 &+ \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \cdot n^2 \cdot L\pi r + \frac{1-\nu}{2} \cdot \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot L\pi r \right] + \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^4} \cdot n^2 \cdot L\pi r + \frac{1-\nu}{2r^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot L\pi r \right] \right\} V_{mn} \\
 &+ \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[-\frac{2}{r^2} \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] + \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \left[-\frac{2}{r^4} \cdot n^3 \cdot \frac{L\pi r}{2} - \frac{2\nu}{r^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \cdot \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] \right\} W_{mn} = 0 \\
 \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial W_{mn}} &= \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{2\nu}{r} \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] \right\} U_{mn} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} (-2) E_s Z_s \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cos n\theta_k \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^l \cos q\theta_k \cdot U_{mq} \right] \\
 &+ \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[-\frac{2}{r^2} \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] + \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \left[-\frac{1}{r^4} \cdot n^3 \cdot \frac{L\pi r}{2} - \frac{2\nu}{r^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n \cdot \frac{L\pi r}{2} \right] \right\} V_{mn} \\
 &+ \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \cdot L\pi r \right] + \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \cdot L\pi r + \frac{1}{r^4} \cdot n^4 \cdot L\pi r + \frac{2\nu}{r^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n^2 \cdot L\pi r \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n^2 \cdot L\pi r \right] \right\} W_{mn} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} E_s I_s \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \cdot L \cdot \cos n\theta_k \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^l \cos q\theta_k \cdot W_{mq} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{r^2} G_s J_s \left[2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot n \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin n\theta_k \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^l q \cdot \sin q\theta_k \cdot W_{mq} \right] \\
 &- \frac{1}{2} \sigma_x h \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot L\pi r \right] W_{mn} - \frac{1}{2} \sigma_{x_s} A_s \sum_{k=1}^{n_s} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot L \cos n\theta_k \right] \cdot \left[\sum_{q=1}^l \cos q\theta_k \cdot W_{mq} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{A.4}$$