

# 전기공학의 현재와 전망

## 연구편 1

# 적응제어의 본질과 현실

양 해 원

한양대학교 전기공학과 조교수

### I. 서론

현대제어이론을 이용하여 제어시스템을 설계하는 종래의 많은 방식은 플랜트의 정확한 수학적 표현이 주어지는 것을 전제로 하고 있다. 그러나 많은 경우에 이것을 정확하게 안다는 것은 기대하기 어렵다. 적응제어는 이와같은 어려움을 해소하기 위한 수단으로 개발된 것이며, 미지의 플랜트 및 그 주위 환경에 적절하게 조정될 수 있는 제어기를 도입함으로써 바람직한 특성을 실현하는 것을 목적으로 하고 있다.

현재까지 적응제어의 방식으로서 수많은 방식들이 제안되어 연구되고 있지만 그중에서 이론적 체계가 확립되고 최근 많은 연구자의 관심을 끌고 있는 실용적인 설계법으로 기준모델형 적응제어와 Self-Tuning Regulator의 두가지를 들 수 있을 것이다.

이들 두방식은 모두 플랜트의 구조와 상대차수(또는 지연시간)는 알고 있지만 그 매개변수가 미지이고 일정한 경우에 대한 설계법이다. 최근의 하드웨어 특히 마이크로프로세서의 급속한 진보에 따라 이들 설계법은 현재 실용화가 시도되고 그 결과가 보고되고 있지만, 적용되는데 있어서 아직 해결되어야 할 많은 제약을 내포하고 있다.

여기에서는 먼저 현재까지 확립된 적응제어의 설계이론 특히 기준모델형 적응제어에 중점을 두고 소개하기

로 한다. 그리고 최근에 활발하게 연구가 진행되고 있는 강인성(robustness)해석 및 개선 즉 위에서 언급한 제약을 풀어 나가기 위한 시도들의 일부에 대하여 기술하고자 한다.

### II. 기준모델형 적응제어

플랜트의 전달함수는 다음과 같이 주어지는 것으로 한다.

$$W_p(s) = h_p^T (sI - A_p)^{-1} b_p = \frac{K_p Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (1)$$

단  $R_p(s)$ 는  $n$ 차 monic다항식이고  $Z_p(s)$ 는  $m(\leq n-1)$ 차 monic다항식이며  $K_p$ 는 상수이득이다.

플랜트에 대한 가정은 다음과 같다.

- 1)  $K_p$ 의 부호
- 2) 시스템의 차수의 상한  $n$
- 3) 시스템의 상대차수  $n^*(=n-m)$ 를 알고 있는 것으로 하며
- 4)  $Z_p(s)$ 는 안정한 다항식이다.

기준모델은 적당한 제어기에 의하여 플랜트에 부여하려고 하는 특성을 나타낸다. 기준모델의 입력  $r(t)$ 는 유계(bounded)이며 출력은  $y_M(t)$ 이다. 기준모델의 전

달함수는

$$W_M(s) = \frac{K_M Z_M(s)}{R_M(s)} \quad (2)$$

이며  $Z_M(s)$ ,  $R_M(s)$ 는 각각  $m_1(\leq m)$ ,  $n$ 차의 monic 안정한 다항식이며  $K_M$ 은 상수이다. 문제는 플랜트에 적절한 유제입력  $u(t)$ 를 발생시켜 플랜트와 기준모델과의 오차

$$\epsilon_1(t) \triangleq y_p(t) - y_m(t) \quad (3)$$

가  $t \rightarrow \infty$ 에 따라 0이 되도록 하는 것이다.

적용시스템의 구조는 그림1과 같다. 제어기는 이득  $k_0$ 와 보조신호 발생기  $F_1$ ,  $F_2$ 로 구성된다.  $F_1$ 은  $(n-1)$ 개의 매개변수  $c_i$ 를 포함하며  $F_2$ 는  $n$ 개의 매개변수  $d_i$ 를 포함하고 있다. 이것들은  $k_0$ 와 함께 제어기의  $2n$ 개의 조정가능한 매개변수가 되며 다음과 같이 벡터  $\theta(t)$ 로 표시된다.

$$\theta(t)^T = [k_0(t), c_1(t), \dots, c_{n-1}(t), d_0(t), \dots, d_{n-1}(t)] \quad (4)$$

$F_1$ 과  $F_2$ 는  $(n-1)$ 차 벡터 미분방정식

$$\dot{v}_{(i)} = \wedge v_{(i)} + b u$$

$$\dot{v}_{(2)} = \wedge v_{(2)} + b y_p \quad (5)$$

으로 기술되며  $\wedge$ 는  $(n-1) \times (n-1)$ 의 안정한 행렬이다.

만일 벡터  $w(t)$ 를

$$\omega^T(t) = [r(t), v_{(1)}^T(t), y_p(t), v_{(2)}^T(t)] \quad (6)$$

와 같이 정의하면 전체 시스템은

$$\begin{cases} \dot{x}_p \\ \dot{v}_{(1)} \\ \dot{v}_{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \wedge & 0 \\ b h_p^T & 0 & \wedge \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ v_{(1)} \\ v_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ b \\ 0 \end{bmatrix} [\theta(t)^T \omega(t)]$$

$$y_p = h p^T x_p \quad (7)$$

으로 쓸 수 있을 것이며  $\theta(t) = \theta^* + \phi(t)$  으로 부터 (7)식은

$$\dot{x} = A_c x + b_c [k_0^* r + \phi(t)^T \omega(t)] \quad (8)$$

단

$$A_c = \begin{bmatrix} A_p + d_0^* b_p h_p^T & b_p c^{*T} & b_p d^{*T} \\ b d_0^* h_p^T & \wedge + b c^{*T} & b d^{*T} \\ b h_p^T & 0 & \wedge \end{bmatrix}$$

와 같이 쓸 수도 있다.  $\phi(t) = 0$  즉  $\theta(t) = \theta^*$ 이면 (8)식

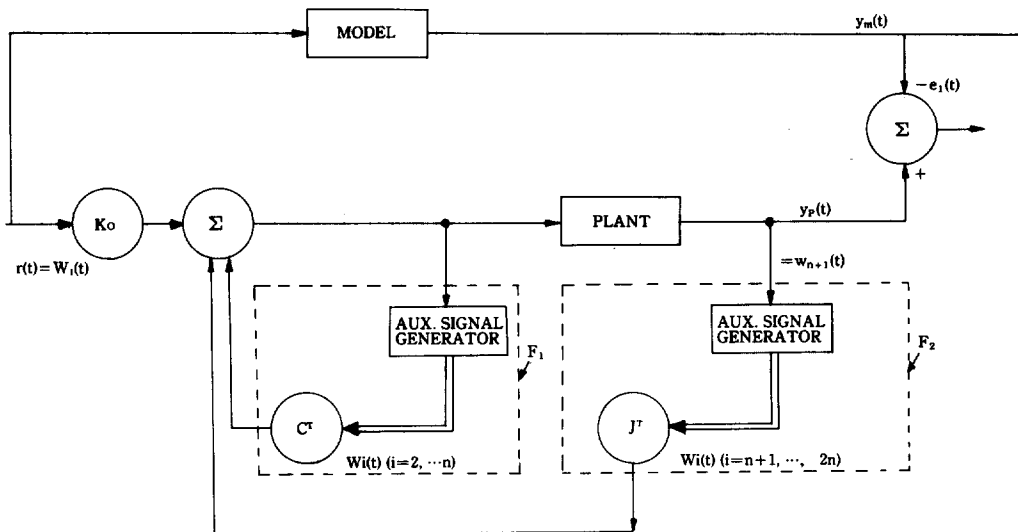


그림1. 적용시스템의 기본 구조  
Fig.1 Basic structure of the adaptive system

이 기준모델을 나타내는 것으로 볼 수 있게 되는  $\theta^*$ 가 존재한다. 따라서 기준모델과 플랜트사이의 출력 오차는

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e + b_c [\phi(t)^T \omega(t)] \\ \varepsilon_1 &= h_c^T e \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 되어  $\phi(t)^T \omega(t)$ 와  $\varepsilon_1(t)$ 와의 관계는 다음의 전달함수로 주어지며 이것은 수렴성 해석에 중요한 역할을 한다.

$$W_e(s) = h_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c = \frac{k_p}{k_m} W_M(s) \quad (10)$$

만일 플랜트의 매개변수를 알고 있다면 제어기의 매개변수  $\theta^*$ 를 쉽게 계산할수 있겠지만 적응제어에서와 같이 플랜트의 매개변수를 모르는 경우에는  $\theta$ 를 추정하여야 할 것이다. 가장 간단한 경우 즉 Kp의 부호가 양이고 상대차수  $n^*$ 가 1이면 (10)식의 전달함수가 strictly positive real (SPR)되도록 선정될 수 있으므로 제어기의 매개변수를

$$\hat{\theta}(t) = -\Gamma \omega(t) \varepsilon_1(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (11)$$

에 의하여 추정하면 Kalman-Yacubovich lemma로부터  $\hat{\theta}(t)$ 와  $\omega(t)$ 가 유계이며  $t \rightarrow \infty$ 에 따라서  $\varepsilon_1(t)$ 가 0으로 수렴하는 것을 쉽게 증명할 수 있다.

지금까지 비록 단순한 경우에 대한 적응제어 방식의 예를 소개하였지만 일반적인 경우에 있어서도 본질적으로는 마찬가지이다.

여기서 우리는 현재의 적응제어이론의 한계점을 지적하고자 한다. 적응제어의 기본목적은 불확실한 주위여건하에서 천천히 변화하는 특성을 갖는 플랜트가 바람직한 제어특성을 갖게 되도록 제어기를 구성하는 것이다. 그러나 지금까지 확립된 이론만으로는 실제로 적용가능한 플랜트의 범위는 극도로 극도로 제한될 수밖에 없을 것이다. 따라서 최근의 연구방향은 기존의 가정의 틀을 얼마만큼 벗어날 수 있는가에 대한 해석에 주안점을 두고 있으며 이것은 이른바 강인한 적응제어 이론의 출현을 의미한다.

### III. 강인한 적응제어

앞에서의 플랜트에 대한 가정(가정4)가 만족되지 않는 경우 즉 비최소 위상 시스템에 대한 적응제어에 관하여는 이미 많은 연구결과가 알려져 있으므로 여기서는 가정1), 2)가 만족되지 못하는 경우와 플랜트에 외란이 가해지는 경우에 대한 대책에 관하여 고찰하기로 한다.

#### 3.1 Kp의 부호를 모르는 경우

Kp의 부호를 알수 없는 때에는 오차의 특성을 나타내는 (10)식의 전달함수  $W_e(s)$ 가 SPR이 되는 것을 보장할 수가 없게 된다.

Morse<sup>3)</sup>는 Nussbaum<sup>4)</sup>의 연구결과를 이용하여 매개변수 적응법칙에 소위 Nussbaum이득을 도입 즉

$$\hat{\theta}(t) = N \omega(t) \varepsilon_1(t) \quad (12)$$

에 의하여 전체 시스템의 안정도를 보여 주고 있다. 여기서 Nussbaum 이득 N은

$$\begin{aligned} \sup_{x>0} N(x) &= \infty \\ \inf_{x>0} N(x) &= -\infty \end{aligned} \quad (13)$$

의 두 조건을 동시에 만족시켜야 하며 한 예로서  $N(x) = x \cos(x)$ 를 들을수 있을 것이다.

#### 3.2 플랜트의 차수의 상한 n을 모르는 경우

플랜트의 차수의 상한을 모른다는 것은 플랜트의 특성중에서 모델화되지 못한 부분이 있는 것을 의미하며 Rohrs<sup>5)</sup> 등에 의하여 그 문제점이 제기되기 시작하였으며 여기서는 Ioannou<sup>6)</sup>의 제어방식을 검토하기로 한다.

플랜트의 특성을 응답이 느린 부분과 빠른 부분의 둘로 나누어

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}z + b_1u \\ \mu \dot{z} &= A_{21}x + A_{22}z + b_2u, \quad R_e \lambda(A_{22}) < 0, \\ y_p &= h_p^T x \end{aligned} \quad (14)$$

으로 하면 상태 z는  $\mu \dot{z} = 0$ 의 해로 정의되며 빠른 과도 현상을 나타낸다. 그러므로 다음과 같은  $\eta$ 를 정의하기로 한다.

$$\eta = z + A_{zz}^{-1}(A_{zx}x + b_z u) \quad (15)$$

이 미지플랜트에 관한 두가지 중요한 제약은 (14)식에서와 같이  $\text{Re } \lambda(A_{zz}) < 0$ 와  $y_p = h_p^T x$ 이다. 전자는 불안정하거나 진동하는 기생(Parasitic)모드를 배제하기 위한 것으로 불가결하다.

후자는 기생모드가 약한 가관측 즉 느린 모드를 통하여서만 가관측인 것을 의미한다. 플랜트의 출력이  $y_p = h_{1x}x + h_{2z}z$ 와 같은 경우에는 출력피이드백은 강인하지 못하며 안정한 플랜트도 불안정하게 만드는 경우가 있을 수 있다.

(15)식을 (14)식에 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + b_0 u + A_{1z} \eta \\ \mu \dot{\eta} &= A_{2z} \eta + \mu (A_1 x + A_2 u + A_3 \eta + A_4 u) \\ y_p &= h_p^T x \end{aligned} \quad (16)$$

와 같이 지배부분과 기생부분으로 확연하게 구별될 수 있다. (16)식의 계수들은 (14)식의 계수들로 부터 유도되어진 것이다.

한편  $\mu=0$ 일때의 저차 플랜트에 대하여( $A_0, b_0, h_p$ )가 가제어, 가관측이라 가정하고 또한 상대차수가 1이며  $K_p = K_w = 1$ 이라 하자. 제어기의 구조를 2절에서와 같은 것으로 하고 플랜트의 입력을

$$\begin{aligned} u &= r + \theta^T(t) \omega(t) \\ \omega^T &= [v_{11}^T, y_p, v_{22}^T], \quad \theta^T = [c^T, d_0, d^T] \end{aligned} \quad (17)$$

으로 한다. 여기에서와 같이 모델화되지 않은 부분이 있는 때에는 (11)식의 적용법칙을 수정하여( $\sigma$ -modification)

$$\dot{\theta} = -\sigma \theta - \Gamma \omega \epsilon, \quad (18)$$

과 같이 하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

정리1<sup>6)</sup>:  $|r(t)| < r_1, |\dot{r}(t)| < r_2$  이라고 하자. 그러면 양의 상수  $\mu^*, \sigma, \alpha < 1/2, c_1 \sim c_4, r_1, t_1$ 이 존재하여 모든  $\mu \in (0, \mu^*)$ 에 대하여  $t=0$ 에서

$$\begin{aligned} D(\mu) &= \{e, \eta, \theta \mid \|e\| + \|\theta\| < c_1 \mu^{-\alpha}, \\ &\|\eta\| < c_2 \mu^{-\alpha-1/2}\} \end{aligned} \quad (19)$$

으로부터 시작된 모든 신호는  $t=t_1$ 에서

$$D_o(\mu) = \left\{ e, \eta, \theta \mid \frac{\lambda_1}{2} \|e\|^2 + \frac{\lambda_2}{2} \|\eta\|^2 + \frac{\sigma}{2} \lambda_2 \right.$$

$$\left. \|\theta - \theta^*\|^2 \leq c_4 \left[ \frac{\sigma \lambda_1^2}{\lambda_2} \|\theta^*\|^2 + \mu^2 r_1 \right] \right\} \quad (20)$$

으로 들어가게 되며 그 후의 모든  $t$ 에 있어서  $D_o$ 에 머문다. 따라서 전체 시스템은 안정하다.

### 3.3 플랜트에 외란이 가해지는 경우<sup>7)</sup>

제어대상플랜트가 다음과 같이 표현되는 경우를 고찰하기로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_p u + d \nu_1 \\ y_p &= h_p^T x_p + \nu_2 \end{aligned} \quad (21)$$

단  $\nu_1, \nu_2$ 는 유제인 외란이다. 문제를 간단하게 하기 위하여  $n^*=1$ 이고  $K_p = K_w = 1$ 이라고 하자. 그러면 전체 시스템을 나타내는 상태방정식은 (8)식에서와 같은 방법에 의하여

$$\dot{x} = A_c x + b_c (\phi^T \omega + r) + b \bar{v}(t) \quad (22)$$

와 같이 되며  $\phi = \theta - \theta^*$ 이고  $\nu$ 는  $\nu_1, \nu_2$ 에 등가인 외란이다.

이제 (11)식의 적용법칙을

$$\theta = -\epsilon_1 \omega - r \mid \epsilon_1 \mid \theta, \quad \tau > 0 \quad (23)$$

와 같이 바꾸어 주면( $\epsilon_1$ -modification),  $V(e, \phi) = e^T P e + \phi^T \phi$ 와 같은 함수에 대하여

i) 외란이 없는 경우에는

$$\dot{V} = -e^T Q e - 2\tau \mid \epsilon_1 \mid \phi^T \theta^* - 2\gamma \mid \epsilon_1 \mid \phi^T \phi$$

와 같이 되어

$$D_s = \left\{ e, \phi \mid \|e\| \leq \frac{\gamma \|\theta^*\|^2}{2\lambda_q}, \|\phi\| \leq \|\theta^*\| \right\} \quad (24)$$

의 보집합  $D_s^c$ 에서  $\dot{V} \leq 0$ 이 되므로 모든 신호가 유제인 것을 알 수 있다. 단  $\lambda_q$ 는 행렬  $Q$ 의 최소고유치이다.

ii) 외란이 있는 경우에는  $|\bar{v}(t)| \leq \nu_0$ 일때  $V$ 의 도함수가

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e_1 \bar{v} - 2\gamma \mid \epsilon_1 \mid \phi^T \theta^* - 2\gamma \mid \epsilon_1 \mid \phi^T \phi$$

이 되므로

$$D_4 = \left\{ e, \phi \left\| \begin{aligned} \|e\| &\leq \frac{\gamma \|\theta^*\|^2}{2\lambda_q} + \frac{2\bar{v}_q}{\lambda_q}, \|\phi\| \leq \\ &\|\theta^*\| + \left(\frac{2\bar{v}_q}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \right\} \quad (25)$$

에 대한  $D_4$ 에서  $\dot{V} \leq 0$ 이므로 외란이 있는 경우에도 모든 신호가 유계인 것을 알수 있다.

#### IV. 결론

이상과 같이 간략하게 적응제어의 기본방식에 대한 소개와 아울러 최근의 연구과제인 강인한 적응제어에 대하여 알아 보았다. 앞에서도 언급한 바와 같이 적응제어 이론이 보다 광범위한 실제의 시스템에 적용가능하게 되려면 현존의 여러가지 제약 혹은 가정이 제거되어야 할 것이며 기존방식에 대한 부분 또는 전면적인 수정이 행해져야 할 것이다.

국내에서의 연구는 주로 대학에서 수행되고 있으며 다른 어느 분야에 지지않을 만큼 충분한 연구인력이 있다고 할 수 있을 것이다. 앞으로는 이론적인 면에서의 새로운 수법의 개발은 물론이고 기존의 방식을 도입하여 실제시스템에의 응용을 시도하므로서 거기에 수반되는 여러 문제점을 파악하고 해결하는데 전력을 기울여야 할 것이다. 산업계에서는 대기업에서 장기적인 연구과제로 채택되어 연구되고 있는 것으로 알고 있으나 보다 적극적으로 도입을 추진하므로서 단순한 이론에 그치지 않고 유용한 기술이 될수 있도록 하여야 한다.

이 줄고가 적응제어에 관심있는 분들에게 적응제어를 이해하게 되는 계기가 된다면 무한한 영광으로 생각한

다. 지면관계로 간략한 소개에 그친 것이므로 상세한 내용은 참고문헌을 참조하기 바란다.

#### 참 고 문 헌

- 1) K.S. Narendra and L.S. Valavani, Stable adaptive controller design-Direct control, IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC-23, pp. 570-583, Aug. 1978.
- 2) K.S. Narendra, Y.H. Lin and L.S. Valavani, "Stable adaptive Controller design, part II: Proof of stability," IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC-25, pp. 440-448, June 1980.
- 3) D.R. Mudgett and A.S. Morse, "Adaptive stabilization of linear systems with unknown high-frequency gains," IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC-30, pp. 549-554, June 1985.
- 4) R.D. Nussbaum, "Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control," Systems and Control Letters, Vol. 3, pp. 243-246, Nov. 1983.
- 5) C.E. Rohrs, L.S. Valavani, M. Athans and G. Stein, "Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics," IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC-30, pp. 881-889, Sep. 1985.
- 6) P.A. Ioannou and P.V. Kokotovich, "Robust redesign of adaptive control," IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC-29, pp. 202-211, March 1984.
- 7) K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, "A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation," IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC-32, pp. 134-145, Feb. 1987.