技術解說

컴퓨터 발생 Lyapunov 함수에 의한 動特性 시스템의 安定度 解析

南 副 熙
(江原大 工大 教授)

차 례

1. 서 론
2. Brayton-Tong 알고리즘
3. 연속시간 시스템의 안정도
 3.1 안정영역
 3.2 대규모 시스템의 완전안정도
 3.3 대규모 시스템의 안정영역
 3.4 전력계통의 안정도
4. 이산시간 시스템의 안정도
5. 디지탈 필터의 안정도
6. 결 론
 참고문헌

1. 서 론

安定度는 제어시스템의 해석과 설계에서 그 목적함수가 무엇이든간에 반드시 고려되어야하는 성질이다.

만약에 어떤 시스템이 최초에 평형점에 있었다면, 시스템은 그 이후에도 계속 평형점에 머므른다. Lyapunov안정도[1),2),3)]는 시스템의 초기상태가 평형점 근방에 있을 때 시스템의 궤적을 정성적으로 다루는 이론이다. 공학의 관점에서 볼 때 이것은 매우 중요하다. 왜냐하면, 신호의 잡음이나 부품의 변형과 같은 외부교란은 실제에 있어 항상 존재하기 때문이다. Lyapunov안정도는 안정, 漸近안정, 完全안정의 셋으로 나뉘며, 물리역학에 비유하면, 강체를 평형점에서 약간 이동시켰을 때 그 후에 원래의 위치에 가까이 머므르면 그 강체는 안정하다고하며, 원래의 평형점으로 결국 돌아오면 점근안정하다고하며, 초기의 위치에 관계없이 점근안정하면 그 평형점은 완전안정하다고 한다.

여기에서는 Brayton-Tong알고리즘에 의한 컴퓨터발생 Lyapunov함수에 의한 동특성 시스템의 안정도를 해석한다.

2. Brayton-Tong 알고리즘[4),5),6)]

Brayton과 Tong은 컴퓨터발생 Lyapunov 함수를 이용하여 다음 시스템

$$\dot{x}=f(x) \tag{E}$$

의 평형점 $x=0$의 안정과 완전안정을 판별하는 알고리즘을 개발하였다.

시스템(E)를 $\dot{x}=M(x)x$의 형태로 바꾸어 Euler공식을 적용하면

$$x_{K+1}=x_K+h_K M(x_K)x_K \tag{1}$$

가 되고, $h_K=t_{K+1}-t_K$, $k=0,1,2,\cdots$이다. $x_K\in R^n$의 모든 값을 변화시켜 얻은 행렬집합을 S라

하면 (1)은 등가로 다음과 같다 :

$$x_{k+1} = (I_n + h_k M_k) x_k, \quad M_k \in S. \tag{2}$$

I_n은 $n \times n$단위 행렬이며, 만일 (2)의 평형점 $x = 0$가 모든 $\{h_k\}$에 대하여 안정 (완전안정) 하면 (E)의 평형점 $x = 0$는 안정(완전안정)함이 증명되었다. 위의 결과는 행렬집합의 안정성을 이용하여 등가로 다음과 같이 말할 수 있다 : 모든 $x \in R^n$에 대하여 $f(x) = Mx$, $M \in S$가 되는 모든 $n \times n$실수 행렬 M의 집합을 S라 하고 $A = \{I_n + hS\}$로 주어지는 행렬집합A가 어떤 $h > 0$에 대하여 안정(점근안정) 하다고 하면, (E)의 평형점 $x = 0$는 안정(완전안정) 하다.

원점포함한 모든 영역 $U \subset R^n$에 대하여 $MV \subseteq U$, $M \in A'$이 성립하는 또 다른 원점 포함하는 영역 $V \subset R^n$이 존재할 때, 실수 행렬A를 안정하다고 한다(여기서 A'은 A에 의해 발생되는 multiplicative semigroup).

행렬A가 안정하면, 모든 $M \in A$에 대하여 $MW \subseteq W$가 성립하는 원점포함 유한 영역 $W \subset R^n$가 존재하며, $\| Mx \|_W \leq \| x \|_W$가 성립하는 벡터 norm $\| \cdot \|_W$이 존재하여, $\alpha \in R$, $\alpha W = \{u \in R^n : u = \alpha w, w \in W\}$라 하면,

$$\| x \|_W = \inf \{\alpha : \alpha \geq 0, x \in \alpha W\} \tag{3}$$

이므로, $\| x \|_W$는 행렬집합A에 대한 Lyapunov 함수가 된다. 즉, 모든 $M \in A$, $x \in R^n$에 대하여 $v(Mx) \leq v(x)$의 성질을 갖는 함수 $v = \| x \|_W$가 된다. ρA가 행렬안정하게되는 $\rho > 1$이 존재하면, 행렬A는 점근안정하다고 한다.

행렬집합 $A = \{M_0, \cdots, M_{m-1}\}$의 안정여부를 판별하기 위하여, 원점 포함한 초기의 볼록 영역 W_0에서부터 다음영역 W_{k+1}을 결정한다 : $W_{k+1} = H[\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{k'}^i W_k]$, $k' = (k-1) \bmod m$, 여기서 $H[W]$은 W의 convex hull이다. 행렬A가 안정할 필요 충분조건은 $W^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$의 유한이다.

3. 연속시간 시스템의 안정도

3.1 안정영역

동특성 비선형 시스템의 (점근)안정영역을 구하는 문제는 이론과 응용의 관점에서 안정도 연구의 가장 흥미있는 분야중의 하나이다[1),2),3)]. 여기서는 Brayton-Tong의 컴퓨터 발생 Lyapunov 함수를 이용하여 안정 영역을 구한다[7)].

시스템(E) : $\dot{x} = f(x)$를 평형점 $x = 0$에서 선형화하면, 선형시스템 $\dot{x} = Jx$를 얻는다(J는 Jacobi 행렬). 여기에 Euler 방법을 적용시키면

$$x_{k+1} = (I + h_k J) x_k \tag{4}$$

의 차분방정식이 되며, 여기서 h_k는 계산 간격 시간이다. 무한 행렬집합 $A = \{I + h_k J : 0 < h_k \leq h\}$에 대하여, A의 외각행렬 $\{I + hJ\}$를 얻는다.

2장의 알고리즘을 이용하여, 초기 볼록영역 W_0로부터 최종의 볼록영역을 안정행렬A로부터 얻는다. (E)의 $x = 0$의 안정영역을 추정하기 위하여 Lyapunov함수로 $v(x) = \| x \|_{W^*} = \| x \|_*$를 선정하여, $v(x)$의 gradient $\nabla v(x)$를 $v(x) = \| x \|_* = C$로 결정되는 측면 L_i에 수직하게 구한다. (E)의 해를 따라 v의 시간도함수

$$Dv_E(x) = [\nabla v(c_i x)]^T_{L_i} \cdot f(c_i x) < 0 \tag{5}$$

의 조건을 만족시키는 상수 c_i의 최소치 c_i^*를 구하면 점근안정영역은 $c_i^* W^*$가 된다.

3.2 대규모 시스템의 완전안정도

Brayton-Tong의 알고리즘이 2차원 시스템에는 효율적으로 적용이 되지만, 차수가 높아지면 분할및 합성방법으로 안정도를 해석하는 것이 편리하다.

$$\dot{z}_i = F_i(z_i) + G_i(x) \qquad (\Sigma_i)$$

$i = 1, \cdots l$, $z_i \in R^{n_i}$, $x^T = (z_1^T, \cdots z_l^T)$, $\sum_{i=1}^{l} n_i$로 주어지는 대규모 시스템을 (S)라 하고, 자유시스템 (S_i) : $\dot{z}_i = F_i(z_i)$에 대하여 Brayton-Tong알고리즘에 의하여 W_i^*를 얻었다고 가정하면 Lyapunov함수 $v_i(z_i) = \| z_i \|_i$가 얻어진다.

$$\text{경계집합 } \partial W_i^* = \{z_i \in R^{n_i} : \| z_i \|_i = 1\} \tag{6}$$

임에 주의하면, W_i^*는 볼록이므로, $y_i \in R^{n_i}$에 대하여 $y_i = \alpha z_i$ $(\alpha \geq 0)$가 되는 $z_i \in \partial W_i^*$가 존재한다. 또 $v_i(z_i) = \| z_i \|_i$는 Lipschitz 상수가

1인 연속함수이다.

정리 1[8] : 시스템 (E) : $\dot{x}=f(x)=M(x)x$에 대하여

$$\text{집합 } \{\rho(I+h_1M(x)) : x\in R^n\} \quad (7)$$

이 안정하도록 $h_1>0$와 $\rho>1$이 존재한다고 가정한다. 집합(7)에 대하여 Brayton-Tong 알고리즘에 의해 발생된 볼록집합을 W*라하고, $v(x)=\|x\|_*$를 이에 상응하는 Lyapunov 함수라고하면, (E)의 해를 따라 다음이 성립한다.

$$Dv_{(E)}(x)\le-\mu v(x),\quad \mu=(1-\frac{1}{\rho})\frac{1}{h_1}.$$

정리 2[8] : 대규모 시스템 (S)는 다음조건이 만족될 때 완전안정하다 :

(A-1) 자유시스템 (S_i)가 정리 1을 만족시킨다. 즉, (S_i)의 Lyapunov함수에 의해

$$Dv_{i(S_i)}(z_i)\le-\mu_i v_i(z_i)$$

되는 $\mu_i>0$가 존재하고

(A-2) $\|G_i(x)\|_i\le\sum_{j=1}^{l}g_{ij}\|z_j\|_j$되는 $g_{ij}\ge0$가 존재하고,

(A-3) $d_{ij}=\begin{cases}\mu_i-g_{ii} & i=j\\ -g_{ij} & i\neq j\end{cases}$

로 주어지는 $l\times l$행렬 $D=[d_{ij}]$가 Minkowski 행렬[3]이다.

시스템 (Σ_i)가 특히 선형 연결구조를 다음과 같이 가지면

$$G_i(x)=\sum_{j=1}^{l}A_{ij}z_j,\quad A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$$

$g_{ij}=\|A_{ij}\|_{ij}$가 된다. 참고문헌[8]에서는 정리 2를 비선형 대규모시스템에 적용하여 기존의 방법보다 개선된 결과를 얻었다.

3.3 대규모 시스템의 안정영역

자유시스템(S_i)가 점근안정한 경우[9~11]의 결과를 이용하여 대규모 시스템의 안정영역을 구한다.

$$\dot{z}_i=F_i(z_i)+G_i(x)\qquad(\Sigma_i)$$

에 대하여, 3.1절의 알고리즘을 이용하여 각 자유 시스템 (S_i) : $\dot{z}_i=F_i(z_i)$의 Lyapunov 함수 $v_i(z_i)=\|z_i\|_i$를 발생시키고, 안정영역을 구한다.

$$R_i=\{z_i\in R^{n_i} : v_i(z_i)=\|z_i\|_i<V_i^0\}. \quad (8)$$

전체시스템 (S)의 안정영역을 추정하기 위하여 $v(x)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i v_i(z_i)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\|z_i\|_i$, $\alpha_i>0$,를 (S)의 Lyapunov함수로 하고, 9)에서와 같이, 다음 영역

$$\Omega=\{x\in R^n : v(x)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\|z_i\|_i<V^0\}$$

에서 정리 2의 가정 (A-1)~(A-3)가 만족되면, Ω는 (S)의 평형점 $x=0$의 안정영역의 부분집합이 되며, $V^0=\min\{\alpha_iV_i^0\}$이다. 최상의 α_i를 얻기위하여 11)의 다음 방법을 사용한다 :

방법 1 : 정리 2의 시험행렬D의 대각선의 合 $z=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i|\mu_i-g_{ii}|$가 최소화가 되도록 d_i를 선정한다. 여기서 제약조건은

$$\alpha_i|\mu_i-g_{ii}|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l}\alpha_jg_{ij}>0,\quad i=1,\ \cdots,\ l, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i=1.$$

방법 2 : 식(8)의 가중치 合 $Z=\sum_{i=1}^{l}\alpha_iV_i^0$가 최대화되도록 α_i를 선정한다. 제약조건은 식(9)이다.

3.4 전력계통의 안정도

전력계통의 과도안정해석은 외부교란에 따른 시스템의 同期유지능력에 관한 것이다. 송전계획에서, 과도안정은 수치simulation해석에 의한다. 그러나 계산시간이 많이 걸리므로 on-line 해석을 하기는 어렵다. 따라서 관심의 촛점이 Lyapunov의 직접방법에 의한 안정도 해석으로 옮겨져 많은 연구가 있어왔다[11~19]. n개의 동기발전기를 가진 전력계통의 고전모델에 대하여, 앞의 3.3절의 결과를 적용하여 안정도 해석과 안정영역을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}&M_i\dot{\omega}_i+D_i\omega_i=P_{mi}-P_{ei}\\ &\dot{\delta}_i=\omega_i\end{aligned}\qquad(10)$$

여기서

$$P_{mi}=\sum_{j=1}^{n}E_iE_jY_{ij}\cos(\delta_{ij}^0-\theta_{ij})$$

$$P_{ei}=\sum_{j=1}^{n}E_iE_jY_{ij}\cos(\delta_{ij}-\theta_{ij})$$

로 주어지는 swing 방정식에 대하여 11)과 같이 $\frac{D_i}{M_i}=\frac{D_j}{M_j}$, $i=1, \cdots, n$, 라 가정하고, n번째 발전기를 기준으로 하여

$$\delta_{in}=\delta_i-\delta_n \quad \omega_{in}=\omega_i-\omega_n$$
$$z_i^T=(\delta_{in}-\delta_{in}^o \quad \omega_{in})$$

와 같이 정의하면, 대규모 시스템 (Σ_i)의 형태를 얻는다 :

$$\dot{z}_i=F_i(z_i)+G_i(x), \quad i=1, \cdots n-1. \quad (11)$$

따라서 전력시스템이 위와 같은 상태 방정식으로 표시되면, 과도안정도를 3.3절과 같이 컴퓨터 발생Lyapunov함수로 해석가능하며, 참고문헌 16)에서는 4개의 발전기 시스템에 적용하여 점근안정 영역을 구하였고, 또한 이 시스템에 고장이 있는 경우 critical clearing time을 추정하는데도 유용함을 보였다, 참고문헌 13)의 전력시스템에 적용하여도 보다 개선된 결과를 얻을 수 있다.

4. 이산시간 시스템의 안정도

Brayton-Tong의 알고리즘은 그 성질상 이산시간 시스템에 직접 적용된다.

$$x(k+1)=g[x(k)], \quad k=0, 1, 2, \cdots \quad (N)$$

로 표시되는 이산시간 시스템에서 $x_e=g(x_e)$가 성립하는 $x_e\in R^n$을 (N)의 평형점이라하며, 영이 아닌 모든 주기해를 Limit cycle이라 부른다. 디지탈 필터에서는 영이 아닌 모든 평형점을 limit cycle로 간주한다. (N)의 解를 따라 함수 v에 대하여

$$Dv_{(N)}(x)=v[g(x(k))]-v[x(k)] \quad (12)$$

를 정의하면, 모든 $x\in R^n$에 대하여, v가 방사무한하고 $Dv_{(N)}(x)$가 음의 정수가 되는 함수 $v : R^n \to R$가 존재하면, (N)의 $x=0$는 완전안정하다.

특히, 컴퓨터 발생 Lyapunov함수 $v(x)=\|x\|_*$를 사용할 때 $Dv_{(N)}(x)\le\sigma\|x\|_*$, $\sigma=1-\frac{1}{\rho}<0$가 성립하면 평형점 $x=0$는 완전안정하다. 이 때 (N) : $x(k+1)=Ax(k)$의 형태일 때 $\rho>1$은 ρA가 안정하도록 선택된다. 대규모 시스템의 경우, [3, p. 101]에서는 자유 시스템의 Lyapunov함수로 Euclidean norm을 사용하는데, 이 때 $\|A\|=[\lambda_M(A^TA)]^{\frac{1}{2}}<1$의 조건이 성립하여야 한다. ($\lambda_M(A)$는 A의 최대 고유치). 그러나, A가 $\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ -1.5 & 0\end{bmatrix}$일 때 $\lambda(A)=0.5\pm j0.707$이 되어 안정행렬이지만, $\|A\|=1.825>1$가 되어 곤란하게 되지만, 컴퓨터 발생 Lyapunov함수를 사용한 경우에는 문제가 되지 않는다. 참고문헌 20)의 예제에 적용하면 보다 개선된 결과를 얻을 수 있다.

5. 디지탈 필터의 안정도

반도체기술의 발달로 디지탈 신호처리에 많은 관심이 있어왔다. 거의 모든 디지탈 시스템의 기본 소자는 디지탈 필터이다. 이러한 디지탈 필터는 유한 소숫점 산술을 사용하는 마이크로프로세서로 실현이 되는데, 신호 어장의 유한성 때문에 비선형이 되어, 디지탈 필터의 출력은 원하는 값을 벗어나게 된다. 따라서 디지탈 필터의 설계에서 이러한 효과에 대한 안정도 문제가 고려되어야 한다.[21,22]

23)~25)에서는 컴퓨터 발생Lyapunov 함수를 사용하여 디지탈 필터(직접형, 결합형, 격자형, 파동형)의 안정도 해석을 하였으며, 26)에서는 변형 결합계수 디지탈 필터의 안정도 해석을 하였다. 여기서는 단일 계수 격자형 디지탈 필터를 예로들어 필터의 계수공간에서 완정안정할 조건을 구한다.

고정 소숫점 산술에서 각 숫자는 부호와 크기로 표시된다. 따라서, B비트의 두 수를 곱하면 그 결과는 2B비트의 수가 되는데 신호어장B비트로 감소시킬때 양자화 비선형(quantization nonlinearity)이 된다. 덧셈도 두 수의 합이 표시가능한 범위를 넘을 때 어장으로 수정할 경우

잉여(overflow)비선형이 나타난다.

이 비선형 현상 $f(x)$는 다음과 같이 기울기 구간 sector$[\alpha, \beta]$에 속한다고 볼 수 있다 :

$$\alpha \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta, \quad x \in R, \quad x \neq 0.$$

양자화 비선형은 sector$[0, \beta]$에 속한다 :

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{끊어버림 (magnitude truncation quantizer)} \\ 2 & \text{반올림 (roundoff quantizer).} \end{cases}$$

잉여처리 비선형은 sector$[\alpha, 1]$에 속한다 :

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{포화 또는 영점처리 (saturation or zeroing overflow)} \\ -\frac{1}{3} & \text{삼각형처리 (triangular overflow)} \\ -1 & \text{2의보수처리 (two's complement overflow).} \end{cases}$$

예로 그림 1의 구조[27]에 대한 상태방정식은

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= P_1[-Q_1[k_1 P_3[x_1(k) - Q_2(k_2 x_2(k))]] - Q_2[k_2 x_2(k)]] \\ x_2(k+1) &= P_2[x_1(k) + Q_1[k_1 P_3[x_1(k) - Q_2(k_2 x_2(k))]]] \end{aligned} \tag{13}$$

이 되고, 여기서 Q_i, $i=1, 2$,는 양자기(quantizer), P_i, $i=1, 2, 3$,는 잉여처리 비선형을 나타낸다. 식(13)에 대하여 외각 행렬집합 E(M)이 구해진다.

$$E[M] = \left\{ \begin{bmatrix} -k_1 a_i & k_2 e_j \\ f_m & -k_1 k_2 d_n \end{bmatrix}, i, j, m, n = 1, 2 \right\} \tag{14}$$

여기서, $a_1 = b_1 = c_1 = \alpha\beta$

$a_2 = b_2 = c_2 = \beta$

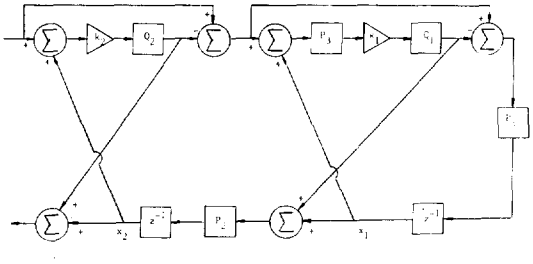

그림 1. 단일 계수 격자형 디지탈 필터

$r_1 = \alpha$, $r_2 = 1$, $d_1 = \alpha\beta^2$, $d_2 = \beta^2$

$\{b_i(k_1 c_j - 1)$, $i, j = 1, 2\}$의 최소치 $= e_1$, 최대치 $= e_2$

$\{r_i(1 + k_1 c_j)$, $i, j = 1, 2\}$의 최소치 $= f_1$, 최대치 $= f_2$.

이 경우에 (k_1, k_2) 계수평면의 각 점에 대하여 16개의 외각행렬이 발생된다.

Brayton-Tong의 알고리즘을 적용하여 주어진 디지탈 필터의 안정도 해석을 할 수 있고, 끊어버림 양자화와 2의 보수 잉여비선형을 가진 격자형 필터의 안정영역이 그림 2에 나타나 있다. 양자기만이 있는 경우는 Jury-Lee[28]의 절대 안정도 방법에 의해 구해지고, Brayton-Tong의 결과와 비교될 수 있다. (그림 2에서 안정영역은 k_2-축에 대하여 대칭이므로 반쪽만 표시됨)

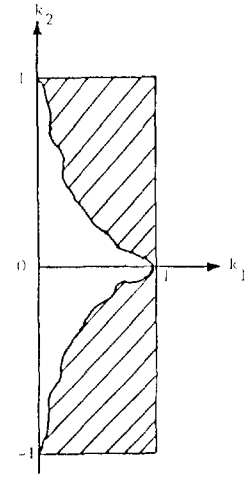

그림 2. 완전안정한 계수영역

6. 결 론

Lyapunov함수로 특히 컴퓨터 발생 Lyapunov 함수를 사용하여, 연속 시스템의 안정영역을 구하고, 대규모 시스템의 안정도를 판별하였으며, 디지탈 필터의 limit cycle이 없을 조건을 그 계수 공간에서 구할 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

1) W. Hahn, Theory and Applications of Lyapunov's Direct Method. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.

2) M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1978.

3) A.N. Michel and R.K. Miller, Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. N.Y.: Academic Press, 1977.

4) R.K. Brayton and C.H. Tong, "Stability of dynamical systems: a constructive approach," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-26, pp.224-234, 1979.

5) _____, "Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-27, pp.1121-1130, 1980.

6) J.H. Tsitsikis, "Conditions for finiteness of a constructive algorithm for determining stability," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-29, No.6, pp.400-402, June 1982.

7) A.N. Michel, N.R. Sarabudla, and R.K. Miller, "Stability analysis of complex dynamical systems. Some computational methods," Cir. Syst. Signal Processing, Vol.1, pp.171-202, 1982.

8) A.N. Michel, R.K. Miller, and B.H. Nam, "Stability analysis of interconnected systems using computer-generated Lyapunov functions," IEEE Trans. Circuits and systems, Vol. CAS-29, No.7, pp.431-440, July 1982.

9) S. Weissenenberger, "Stability regions of large scale systems." Automatika, Vol.9, pp.653-663, 1973.

10) M. Saeki and M. Araki, "A new estimate of the stability regions of large scale systems," Int. J. Contr., Vol.32, No.2, pp.257-269, 1980.

11) Y.K. Chen and R. Schinzinger, "Lyapunov stability of multimachine power systems using decomposition-aggregation method," Paper A-80-036-4, IEEE Winter PES Meeting, New York, Feb. 1980.

12) A.H. El-Abiad and K. Nagappan, "Transient stability region of multimachine power systems," IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-85, No.2, p.169, 178, 1966.

13) L.B. Jocic, M. Ribbens-Pavella, and D.D. Siljak, "Multimachine power systems: stability, decomposition, and aggregation," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-23, No.2, pp.325-332. Apr. 1978.

14) M. Araki, M. Saeki, and B. Kondo, "Application of a new stability criterion of composite systems to multimachine power systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-25, No.3, pp.480-483, June 1980.

15) J. Bijik, D. Mudroncik, and J. Murgas, "Stability and stability region estimation of large scale power systems," Electric Power Systems Reserach, 4, pp.225-233. 1981.

16) A.N. Michel, B.H. Nam, and V. Vittal, "Computer generated Lyapunov functions for interconnected systems: improved results with applications to power systems," IEEE Trans. Circuits and systems, Vol.CAS-31, No.2, pp.189-198, Feb. 1984.

17) H. Miyagi, "Transient stability of the power system with the effect of the automatic voltage regulator," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-29, No.12, pp.1120-1122, Dec. 1984.

18) H.R. Pota and P.J. Moylan, "Lyapunov function for power system with transfer conductances," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-30, No.2, pp.155-158, Feb. 1985.

19) P. Varaiya, F.F. Wu, and R-L. Chen, "Direct methods for transient stability analysis of power systems: recent results." Proceedings of the IEEE, pp.1703-1715, Dec. 1985.

20) LJ. T. Grujic and D.D. Siljak, "Exponential stability of large scale discrete systems," Int. J. Control, Vol.19, No.3, pp.481-491, 1974.

21) T.A.C. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker and J.B.H. Peek, "Effects of quantization and overflow in recursive digital filters," IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.ASSP-24, pp.517-529, 1976.

22) B. Liu, "Effects of finite wordlength on the accuracy of digital filters-a review," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol.CT-18, pp.670-677,

1971.

23) A.N. Michel and R.K. Miller, "Stability analysis of discrete time interconnected systems via computer-ganerated Lyapunov functions with applications to digital filters," IEEE Trans. Circuits Syst., Vol.CAS-32, No.8, pp.737-753, Aug. 1985.

24) K.T Erickson and A.N. Michel, "Stability analysis of fixed-point digital filters using computer-generated Lyapunov functions-Part I: direct form and coupled form filters," IEEE trans. Circuits Systems, Vol.CAS-32, No.2, pp.113-132, Feb. 1985.

25) _____ , "Stability analysis of fixed-point digital filters using computer-generated Lyapunov functions—Part II: wave digital filters and lattice digital filters," IEEE Trans. Circuits Systems, Vol. CAS—32, No.2, pp. 132—142, Feb. 1986.

26) B.H. Nam and N.H. Kim, "Stability analysis of modified coupled form digital filters using a constructive algorithm," the Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers, Vol.34, No.11, pp.430-439, Nov. 1985.

27) E.I. Jury and B.W. Lee, "The absolute stability of systems with many nonlinearities," Automat. Remote Control, Vol.26, pp.943-961, 1965.