論 文
36〜6〜9

L 샘플의 制御늦음을 갖는 디지탈 最適 線型 Regulator의 Robust 安定性

On the Robust Stability of the Optimal Digital Linear Regulator Having L Sample Controlling Delays.

李 東 喆* · 鄭 享 煥**
(Dong－Cheol Lee · Hung－Hwan Jung)

Abstract

Due to the recent development of microprocessor, the digital control is now in use for the practical structure of the control systems, but it leaves the problem of controlling delays caused by computation time when it is applied to the realization problems, such as application method of the control law and controlling effect of continuous control, etc.

This paper deals with robust stability of the digital regulator which compensates for the controlling delays by applying prediction values of state.

1. 緖 論

近年, microprocessor의 普及에 따라 制御系의 digital化가 發達하고 있지만, 여기에 수반하여 새로 고려할 문제점도 생기고 있다. 이와 같은 문제점의 하나는 演算時間 때문에 일어나는 制御늦음이 있다. 이 制御늦음은 制御對象에 영향을 미치는 지연시간(dead time) 要素로써 model化되며 이 model에 기인하는 여러가지 앨고리즘을 構成하는 것이 可能하다. 美多[1] 는 이와 같은 model에 기인하는 digital 最適 regulator의 設計法에 對하여 考察하였고, 制御늦음이 없는 경우의 最適 歸還利得行列(feedback gain matrix)과 狀態의 豫測値를 이용한 制御則(control law)이 最適이 되는 것을 나타낼 때 制御늦음에 의한 評価函數値의 劣化量(deterioration quantity)을 求하였고 이 結果를 이용한 最適 Servo系의 設計法을 제안하고 있다.[2,3]

본 연구에서는 이와 같은 狀態의 豫測値를 利用하여 演算時間 때문에 일어나는 制御늦음을 補償하는 digital regulator의 robust 安定性에 관한 考察을 첨가 하였다. 우선 對象으로 하는 系를 명확히 하고 還送差行列(return difference matrix)의 最小特異値(minimum singular value)를 利用하여 얻어지는 安定餘裕에 對하여 制御늦음의 영향을 명확히 하고 狀態方程式의 시스템行列, 驅動行列 要素의 不確實함에 착안 한 Robust Stability[7] 에 관해서 考察하고, 폐루우프系의 安定性을 保證하는 各 行列의 許容變動 範囲를 求하는 2가지 다른 방법을 提案하였다.

*正 會 員 : 釜山開放大學 電氣工學科 助教授
**正 會 員 : 東亞大 電氣工學科 副教授 · 工博
接受日字 : 1986년 10月 30日 年
1次修正 : 1987年 3月 10日

2. 시스템의 記述

制御對象을 다음과 같은 離散時間系의 表現으로 나타내자.

$$X(t+1)=AX(t)+BU(t) \tag{1}$$

여기서 $X(t)\in R^n$, $U(t)\in R^m$이며 操作量의 算出에는 L샘플링時間을 要하는 것 이라고 하자. 이 制御늦음을 고려하여 $V(t)=U(t+L)$을 새로운 制御入力으로 $U(t)$, $V_1(t)=U(t+1)$, $V_2(t)=U(t+2)$, ……, $V_{L-1}(t)=U(t+L-1)$을 狀態變數로 넣은 狀態백터로 되는 다음과 같은 擴大系를 생각하자.

$$X(t+1)=A_LX_L(t)+B_LV(t) \tag{2}$$

여기서

$$X_L(t)=[X'(t)U'(t)V_1'(t)\cdots\cdots V_{L-1}'(t)]' \tag{3}$$

$$A_L=\begin{bmatrix} A & B & I_m & & 0 \\ 0 & & \ddots & & I_m \\ & & L-1\text{個} & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$B_L=[0\cdots\cdots\cdots 0\ I_m]' \tag{5}$$

F를 적당한 歸還利得行列이라고 할 때 式 (2)로 주어지는 系에 對하여 다음과 같은 制御則을 고려하자.

$$V(t)=-F[A^LX(t)+A^{L-1}BU(t)+\cdots\cdots+BV_{L-1}(t)] \tag{6}$$

이 式을 $U(\cdot)$에 對하여 나타내면 다음과 같다. 여기서 $U(\cdot)$은 不確定值(uncertainty value)를 나타낸다.

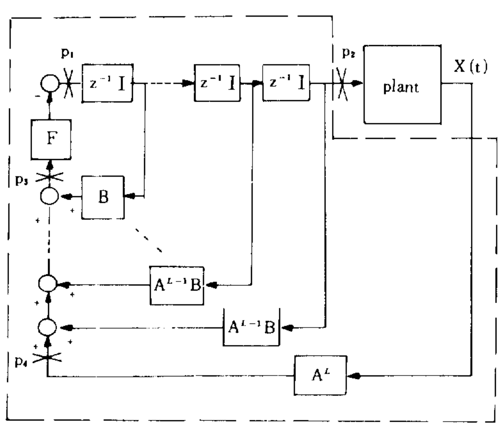

그림 1. 豫測制御器의 構造

Fig.1. Structure of predictor-based controller

$$U(t)=-F\hat{X}(t\mid t-L) \tag{7}$$

$$\hat{X}(t\mid t-L)=A^LX(t-L)+A^{L-1}BU(t-L)+\cdots\cdots+BU(t-1)] \tag{8}$$

式(8)에서 $\hat{X}(t\mid t-L)$을 $t-L$ 샘플까지의 入出力 data에 의한 $X(t)$의 豫測値이다. 이 制御則을 利用할 때 폐루우프系의 極은 mL個의 0과 $A-BF$의 固有値로부터 成立되는 것은 알려져 있다.[1] 따라서, 이와 같은 L샘플의 制御늦음을 수반하는 系에 對하여는 $n+mL$次의 擴大系 式(2)에 對한 最適制御問題 혹은 極配置問題를 求할 필요는 없고, 制御늦음이 없는 n次의 系에 對한 問題를 구하면 충분하다. 式(6)에 의한 制御系의 블록線図를 그림 1에 나타내었고 다음은 이 制御系의 Robust stability에 對하여 考察하자.

3. 安定餘裕(Stability margin)

連續時間 最適 regulator에 對하여는 還送差行列의 最小特異值를 求하므로써 各 入力 채널(channel)은 모두 減少利得餘裕(gain margin)는 1/2, 增加利得餘裕는 無限大, 立相餘裕(phase margin) ±60°가 保證되는 것은 알려져 있다.[4] 離散時間 最適 regulator에서는 이런 큰 安定餘裕는 일반적으로 保證되지 않지만 連續時間系의 경우와 같이 還送差行列의 最小特異值를 求하므로써 利得餘裕 및 位相餘裕를 求할 수 있다.[5] 즉 폐루우프 制御系의 어느 點에 對한 安定餘裕는 이 點에 對한 還送差行列을 $I+G(Z)$라 할 때 이 最小特異值의 單位圓($|Z|=1$)上에서의 값이 $\underline{\sigma}[I+G(Z)]\geq\alpha$ ($\alpha\leq1$)의 關係를 滿足할 때 利得餘裕 $1/(1\pm\alpha)$, 位相餘裕 $\pm\cos^{-1}[1-(\alpha^2/2)]$로 주어진다. 이 結果는 最適regulator 뿐만 아니라 폐루우프系를 安定化하는 任意의 歸還行列 F에 對하여 成立된다.

그림 1에서 주어진 制御系의 還送差行列에 對하여 다음의 定理가 얻어진다. 여기서 $\underline{\sigma}(\cdot)$은 最小特異值(minimum singular value)를 나타낸다.

《定理 1》

그림 1의 點 P_1, P_2에 對한 還送差行列을 각각 $D_1(Z)$, $D_2(Z)$ 制御늦음이 없는 경우의 regulator의 入力에 對한 還送差行列을 $D_0(Z)$라 할 때 다음의 關係가 成立한다.

$$D_1(Z)=D_0(Z) \tag{9}$$

$$D_2(Z)=Z^{L}W_L^{-1}(Z)D_0(Z) \tag{10}$$

여기서

$$D_0(Z)=I_m+F(ZI_n-A)^{-1}B \quad (11)$$

$$W_L(Z)=Z^L I_m+Z^{L-1}FB+\cdots\cdots\cdots+FA^{L-1}B \quad (12)$$

이다.

(證 明)

그림 1에서 點 P_1에 對한 還送差行列 $D_1(Z)$ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$D_1(Z)=I_m+FH_1(Z)B \quad (13)$$

여기서 $H_1(Z)B$는 그림 1에서 點 P_1에서 點 P_3 까지의 伝達函數行列이고

$$H_1(Z)=Z^{-1}I_n+Z^{-2}A+\cdots\cdots\cdots+Z^{-L}A^{L-1}+Z^{-L}A^L(ZI_n-A)^{-1} \quad (14)$$

이며 式(14)는 아래와 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}H_1(Z)&=\{[Z^{-1}I_n+Z^{-2}A+\cdots\cdots\cdots+Z^{-L}A^{L-1}](ZI_n-A)+Z^{-L}A^L\}(ZI_n-A)^{-1}\\&=\{[I_n+Z^{-1}A+\cdots\cdots\cdots+Z^{-(L-1)}A^{L-1}]-[Z^{-1}A+Z^{-2}A^2+\cdots\cdots\cdots+Z^{-L}A^L]\\&\quad+Z^{-L}A^L\}(ZI_n-A)^{-1}=(ZI_n-A)^{-1}\end{aligned} \quad (15)$$

따라서 式(13), (15)로부터 $D_1(Z)=D_0(Z)$가 된다.

點 P_2에 對한 還送差行列 $D_2(Z)$는 그림 1에서 다음과 같이 된다.

$$D_2(Z)=I_m+H_2(Z)A^L(ZI_n-A)^{-1}B \quad (16)$$

여기서 $H_2(Z)$는 點 P_4에서 點 P_2까지의 伝達函數行列이고 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}H_2(Z)&=[Z^L I_m+Z^{L-1}FB+\cdots\cdots\cdots+FA^{L-1}B]^{-1}F\\&=W_L^{-1}(Z)F\end{aligned} \quad (17)$$

式(16)은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}D_2(Z)&=W_L^{-1}(Z)[W_L(Z)+FA^L(ZI_n-A)^{-1}B]\\&=W_L^{-1}(Z)\{(Z^L I_m+F[Z^{L-1}I_n+Z^{L-2}A+\cdots\cdots\cdots+A^{L-1})(ZI_n-A)+A^L]\\&\quad(ZI_n-A)^{-1}B\}\\&=W_L^{-1}(Z)\{Z^L I_m+F[(Z^L I_n+Z^{L-1}A+\cdots\cdots+ZA^{L-1}-Z^{L-1}A-\cdots\cdots\cdots-ZA^{L-1}-\\&\quad A^L+A^L](ZI_n-A)^{-1}B\}\\&=W_L^{-1}(Z)\{Z^L I_m+Z^L F(ZI_n-A)^{-1}B\}\\&=Z^L W_L^{-1}(Z)D_0(Z)\end{aligned} \quad (18)$$

따라서 式(9), (10)이 成立한다.

위의 定理에서 나타낸 바와 같이, 그림 1의 點 P_1에서의 還送差行列은 늦음이 없는 regulator의 還送差行列과 일치한다. 따라서, 이 點에 영향을 미치는 不確定性에 對하여서는 늦음이 없는 regulator와 같은 安定餘裕가 保證된다. 그러나 이 點은 Controller의 内에 있고, 不確定性은 거의 存在하지 않는다고 생각된다. 한편 點 P_2는 Controller의 外部에 있고, 制御對象의 어떤 種類의 不確定性은 이 點에 삽입된 直列要素로서 나타낸다. 따라서 이 制御系의 安定餘裕는 點 P_2에 관해서 評価할 必要가 있다.

"定理 1"에서, 點 P_2에 대한 還送差行列 $D_2(Z)$와 늦음이 없는 regulator의 還送差行列 $D_0(Z)$ 의 最小特異値의 單位圓상에서의 값 사이에는 다음의 関係가 成立되는 것을 容易하게 確認할 수 있다.

《定理 2》

單位圓($|Z|=1$)상에서 $\underline{\sigma}[D_0(Z)]\geq\alpha_0$라고 할 때 다음의 関係가 成立한다.

$$\underline{\sigma}[D_2(Z)]\geq\alpha_L \quad (|Z|=1) \quad (19)$$

여기서

$$\alpha_L=\alpha_0/\{1+\bar{\sigma}(F)\,\bar{\sigma}(B)[1+\underline{\sigma}(A)+\cdots\cdots\cdots\cdots+\bar{\sigma}^{L-1}(F)]\} \quad (20)$$

이다. 여기서, $\bar{\sigma}(\cdot)$은 最大特異値(maximum singular value)를 나타낸다.

(證明 略)

위의 定理에서, $\alpha_L<\alpha_0$이고, α_L은 L의 增加와 함께 減小함을 알 수 있다. 이런 것은 式(20)에서 주어진 最小特異値의 下限을 이용하여 求하여 지는 安定餘裕는 制御늦음이 커짐에 따라서 작게 되는 것을 나타내고 있다.

(注) Shaked[5]는 2次型式 評価函數

$$J=\sum_{t=0}^{\infty}[X'(t)QX(t)+U'(t)RU(t)] \quad (21)$$

을 最小化하는 制御늦음이 없는 最適regultor에 對한 還送差行列의 最小特異値의 單位圓상에서의 값 下限 α_0가 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_0=\{[\underline{\sigma}(R)+\underline{\sigma}^2(B)\,\underline{\sigma}(Q)(1+\bar{\sigma}(A))^{-2}][\bar{\sigma}(R)+\bar{\sigma}^2(B)\,\bar{\sigma}(P)]^{-1}\}^{1/2} \quad (22)$$

여기서 行列 P는 式(1), (21)에 對한 Riccati 方程式의 解이다.

〔數値 例〕

Franklin等의 "Digital Control of Dynamic Systems"[6]에서 취급하고 있는 Pressurized FLow Box의 例題를 생각하자.

連續時間系를 샘플링周期 T=0.5에서 離散化하면 다음과 같이 離散時間 시스템行列, 驅動行列이 얻어진다.

$$A=\begin{bmatrix} 0.904 & 0.048 & 0.373 \\ -0.024 & 0.999 & -0.005 \\ 0 & 0 & 0.607 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0.103 & -0.001 & 0.393 \\ 0.484 & 0.344 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

式(21)로 주어지는 評価函數에서 荷重行列(weighting matrix)을 $R=rI_m$, $Q=I_n$로 주어지는 最適regulator의 歸還利得行列을 이용한 경우 利得餘裕를 式(20), (22)를 이용하여 구한 結果를 그림 2에 나타내었다.

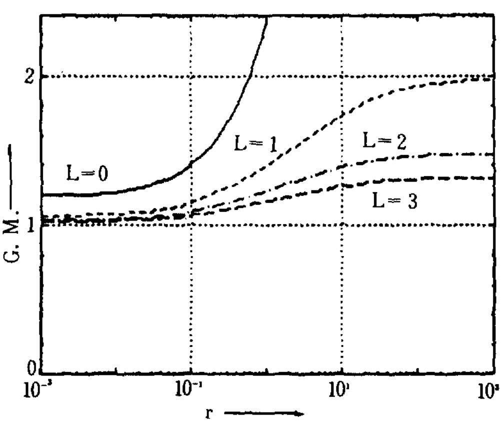

그림 2. 上限利得餘裕 $1/(1-\alpha_L)$
Fig. 2. Upward gain margin $1/(1-\alpha_L)$

4. 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範囲

Patel 等[7]은 連續時間 最適regulator에 對한 安定餘裕는 다른 Robust stability에 関한 硏究로서 安定性이 保證되는 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範囲를 Lyapunov函數를 이용하여 求하고 있다. 여기서는 우선 制御늦음을 포함하지 않는 離散時間 最適regulator에 對하여 Lyapunov函數를 이용하여 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範囲를 求하여 다시 한번 L샘플의 制御늦음을 수반하는 最適regulator에 擴張한다. L샘플의 制御늦음을 수반하는 regulator에 對하여 폐루우프系의 特性方程式의 간결한 表現式을 誘導하고 이 表現式을 이용하여 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範囲를 求한다.

制御늦음이 없는 離散時間 最適regulator에 對하여 Lyapunov函數를 이용한 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範囲는 다음과 같이 求한다.

《定理 3》

시스템行列 A, 驅動行列 B로서 設計된 評価函數 式(21)에 對한 最適 歸還利得行列을 F라고 하자. 이 歸還利得行列의 순수한 시스템行列이 $A+\delta A$, 驅動行列이 $B+\delta B$로 주어지는 系에 이용한 경우 다음의 不等式이 成立하면 폐루우프系는 安定하다.

$$\bar{\sigma}(\delta A-\delta BF)<\Delta(A,\ B,\ Q,\ R) \tag{25}$$

여기서

$$\Delta(A,\ B,\ Q,\ R)=-\bar{\sigma}(A-BF)+\left[\bar{\sigma}^2(A-BF)+\underline{\sigma}(Q+F'RF)/\bar{\sigma}(P)\right]^{1/2} \tag{26}$$

이고 P는 A, B 및 評価函數 式(21)에 對한 Riccati 方程式의 解이다.

(證 明)

$\varepsilon=\delta A-\delta BF$라고 할 때 폐루우프系의 方程式은 다음과 같이 나타낸다.

$$X(t+1)=(A-BF+\varepsilon)X(t) \tag{27}$$

이 系에 對하여 다음과 같은 Lyapunov函數를 생각하자.

$$V(t)=X'(t)PX(t) \tag{28}$$

이 때

$$V(t+1)-V(t)=X'(t)\{[\varepsilon'P\varepsilon+\varepsilon'P(A-BF)+(A-BF)'P\varepsilon]-(Q+F'RF)\}X(t) \tag{29}$$

로 나타낸다.

여기서

$$\bar{\sigma}[\varepsilon'P\varepsilon+\varepsilon'P(A-BF)+(A-BF)'P\varepsilon] \le \bar{\sigma}^2(\varepsilon)\bar{\sigma}(P)+2\bar{\sigma}(\varepsilon)\bar{\sigma}(A-BF)\bar{\sigma}(P) \tag{30}$$

이 成立되는 것에 注意하여 不等式

$$\bar{\sigma}^2(\varepsilon)\bar{\sigma}(P)+2\bar{\sigma}(\varepsilon)\bar{\sigma}(A-BF)\bar{\sigma}(P)<\underline{\sigma}(Q+F'RF) \tag{31}$$

이 成立하면 式(29)에서 $V(t+1)<V(t)$가 되며 폐루

우프系의 安定性이 保證된다. 式(31)을 $\bar{\sigma}(\varepsilon)$에 對하여 풀면 式(25), (26)이 얻어진다.

式(26)으로 주어지는 $\triangle(A, B, Q, R)$와 $A-BF$의 固有値 사이에 다음의 關係가 成立한다.

《定理 4》

行列 $A-BF$의 固有値 중에서 絶對値가 最大인 것을 $\bar{\lambda}$로 표시하면 이때 다음의 不等式이 成立한다.

$$\triangle(A, B, Q, R) \leq 1-|\bar{\lambda}| \tag{32}$$

(證明 略)

다음에 式(2)—(8)에서 記述된 L샘플의 制御늦음을 수반하는 最適regulator에 對하여 생각한다. 式(6)의 歸還利得行列 F는 行列 A, B 및 評価亟數에서 決定된 最適 歸還利得行列 이라고 한다. 行列 A, B가 각각 δA, δB만 變動된 경우 擴大系에 對한 폐루우프系의 方程式은 다음과 같이 나타낸다.

$$X(t+1)=[A_L+\delta A_L-B_LF_L]X(t) \tag{33}$$

여기서

$$\delta A_L=\begin{bmatrix} \delta A & \delta B & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$F_L=[FA^L FA^{L-1} \cdots\cdots FAB \; FB] \tag{35}$$

이며, 歸還利得行列 F_L는 擴大系 式(2)에 對한 다음의 評価亟數를 最小化하는 最適歸還利得行列이다.

$$J_L=\sum_{t=0}^{\infty} [X'(t)Q_LX(t)+V'(t)RV(t)] \tag{36}$$

여기서

$$Q_L=\mathrm{diag}[Q \; 0 \cdots\cdots 0] \tag{37}$$

이다.

이때 擴大系 式(2) 및 評価亟數 式(36)에 對한 Riccati方程式의 解 P_L는 行列 A, B 및 評価亟數 式(21)에 對한 Riccati方程式의 解 P를 이용하여 다음과 같이 나타내는 것은 美多[1]에 의하여 표현 되었다.

$$P_L=C'_L\mathrm{diag}[Q \cdots\cdots Q \; P]C_L \tag{38}$$

여기서

$$C_L=\begin{bmatrix} I_n & \cdots\cdots\cdots & & 0 \\ A & B & 0 \cdots\cdots & 0 \\ A^2 & AB & B \; 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^L & A^{L-1}B & \cdots AB & B \end{bmatrix} \tag{39}$$

이다. 以의 것을 고려해서 擴大系 式(33)—(35)에 對하여 "定理 3"을 이용하면 다음의 定理가 곧 얻어진다.

《定理 5》

L샘플의 制御늦음을 수반하는 系 式(33)—(35)에 對하여 行列 A, B 및 評価亟數 式(21)에서 決定된 最適歸還利得行列 F를 이용한 경우, 不等式

$$\bar{\sigma}(\delta A_L) < \triangle(A_L, B_L, Q_L, R) \tag{40}$$

이 만족된다면 폐루우프系는 安定하다.

다음 式(33)의 特性方程式을 이용하여 各 行列의 許容變動 範囲를 求하는 것을 생각한다. 式(33)의 特性方程式 $\Psi_L(Z)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi_L(Z)=\det\begin{bmatrix} ZI_n-(A+\delta A) & \Gamma_L \\ \theta_L & \phi_L(Z) \end{bmatrix} \tag{41}$$

여기서

$$\Gamma_L=[-(B+\delta B) \quad 0 \cdots\cdots 0] \tag{42}$$

$$\theta_L=[0 \cdots\cdots 0 \quad (FA^L)']' \tag{43}$$

$$\phi_L(Z)=\begin{bmatrix} ZI_m & -I_m & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & ZI_m & -I_m \; 0 \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots\cdots & \cdots\cdots & ZI_m & -I_m \\ FA^{L-1}B & \cdots\cdots & FAB & ZI_m+FB \end{bmatrix} \tag{44}$$

이다. 이때, 特性方程式 $\Psi_L(Z)$는 다음과 같이 표현된다.

《定理 6》

行列 A는 正則(nonsingular)이라고 假定한다.

$$\text{이때, } \Psi_L(Z)=Z^{L(m-n)}\det\{[ZI_n-A^L(A+\delta A)A^{-L}]V_L(Z) + A^L(B+\delta B)F\} \tag{45}$$

여기서

$$V_L(Z)=Z^LI_n+Z^{L-1}BF+\cdots\cdots+A^{L-1}BF \tag{46}$$

이다.

(證 明)

式(41)에서 $\Psi_L(Z)$는 다음과 같이 나타낸다.

$$\Psi_L(Z)=\det\phi_L(Z)\det[ZI_n-(A+\delta A)+\Gamma_L\phi_L^{-1}(Z)\theta^L] \tag{47}$$

간단히 計算하면

$$\det\phi_L(Z)=\det W_L(Z) \tag{48}$$

$$\Gamma_L\phi_L^{-1}(Z)\theta_L=(B+\delta B)W_L^{-1}(Z)FA^L \tag{49}$$

인 것이 확실하게 된다. 여기서 $W_L(Z)$는 式(12) 에

서 定義된 行列이며, $W_L(Z)$와 式(46)에서 定義된 $V_L(Z)$ 사이에는 분명히 $FV_L(Z)=W_L(Z)F$의 關係가 成立하므로

$$W_L^{-1}(Z)F=FV_L^{-1}(Z) \tag{50}$$

이다. 또

$$\det V_L(Z)=Z^{L(n-m)}\det W_L(Z) \tag{51}$$

인 것이 容易하게 표현된다. 式(48)—(51)을 式(47)에 이용하면

$$\begin{aligned}\Psi_L(Z)&=\det W_L(Z)\det[ZI_n-(A+\delta A)+(B+\delta B)W_L^{-1}(Z)FA^L]\\&=Z^{L(m-n)}\det V_L(Z)\det[ZI_n-(A+\delta A)+(B+\delta B)FV_L^{-1}(Z)A^L]\\&=Z^{L(m-n)}\det V_L(Z)\det\{[ZI_n-(A+\delta A)]A^{-L}V_L(Z)+(B+\delta B)F\}\det A^L\\&=Z^{L(m-n)}\det\{[ZI_n-A^L(A+\delta A)A^{-L}]V_L(Z)+A^L(B+\delta B)F\}\end{aligned} \tag{52}$$

즉 式(45)가 成立한다.

위의 結果를 이용하면 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範囲가 다음과 같이 구하여 진다.

《定理 7》

行列 A는 正則으로 假定하여 $\bar{\sigma}(A-BF)<1$이라고 假定한다. 이때 다음의 어느 조건이 만족된다면 폐루우프系는 安定하다.

(a) $\delta_B=0$일 때

$$\bar{\sigma}(\delta A)<[\underline{\sigma}(A)/\bar{\sigma}(A)]^L[1-\bar{\sigma}(A-BF)]/\{1+\bar{\sigma}(B)\bar{\sigma}(F)[1+\bar{\sigma}(A)+\cdots\cdots+\bar{\sigma}^{L-1}(A)]\}=\delta_{LA} \tag{53}$$

(b) $\delta A=0$일 때

$$\bar{\sigma}(\delta B)<[1-\bar{\sigma}(A-BF)]/\bar{\sigma}^L(A)\bar{\sigma}(F)=\delta_{LB} \tag{54}$$

(證 明)

(a) $\delta B=0$일 때 "定理 6"에서, 行列

$$\Psi_{LA}(Z)=[ZI_n-A^L(A+\delta A)A^{-L}]V_L(Z)+A^LBF \tag{55}$$

이 $|Z|\geq1$로서 正則이면 폐루우프系는 安定하고 $\Psi_{LA}(Z)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi_{LA}(Z)=\Omega_L(Z)-A^L\delta AA^{-L}V_L(Z) \tag{56}$$

여기서

$$\begin{aligned}\Omega_L(Z)&=(ZI_n-A)V_L(Z)+A^LBF\\&=Z^L(ZI_n-A+BF)\end{aligned} \tag{57}$$

이다. 따라서 $|Z|\geq1$에서

$$\underline{\sigma}[\Omega_L(Z)]>\bar{\sigma}[A^L\delta AA^{-L}V_L(Z)] \tag{58}$$

이면 폐루우프系는 安定하다.

여기서 $|Z|\geq$에서

$$\underline{\sigma}[\Omega_L(Z)]>1-\bar{\sigma}(A-BF) \tag{59}$$

$$\bar{\sigma}[A^L\delta AA^{-L}V_L(Z)]<\bar{\sigma}^L(A)\underline{\sigma}^{-L}(A)\bar{\sigma}[\Omega_L(Z)]\cdot\bar{\sigma}(\delta A) \tag{60}$$

$$\bar{\sigma}[\Omega_L(Z)]<1+\bar{\sigma}(B)\bar{\sigma}(F)[1+\bar{\sigma}(A)+\cdots\cdots+\bar{\sigma}^{L-1}(A)] \tag{61}$$

이 成立하는 것에 注意하면,

$$1-\bar{\sigma}(A-BF)>\bar{\sigma}^L(A)\underline{\sigma}^{-L}(A)\bar{\sigma}(\delta A)\{1+\bar{\sigma}(B)\bar{\sigma}(F)[1+\bar{\sigma}(A)+\cdots\cdots+\bar{\sigma}^{L-1}(A)]\} \tag{62}$$

이면 式(58)이 만족되고 폐루우프系의 安定性이 保證된다. 式(62)를 $\bar{\sigma}(\delta A)$에 對하여 풀면 式(53)이 얻어진다.

(b) $\delta A=0$일 때

$$\begin{aligned}\Psi_{LB}(Z)&=[ZI_n-A]V_L(Z)+A^L(B+\delta B)F\\&=\Omega_L(Z)+A^L\delta BF\end{aligned} \tag{63}$$

이 $|Z|\geq1$에서 正則이면 폐루우프系는 安定하다. 따라서 $|Z|\geq1$에서

$$\underline{\sigma}[\Omega_L(Z)]>\bar{\sigma}[A^L\delta BF] \tag{64}$$

이면 폐루우프系는 安定하다. 여기서

$$\bar{\sigma}[A^L\delta BF]<\bar{\sigma}^L(A)\bar{\sigma}(F)\bar{\sigma}(\delta B) \tag{65}$$

인 것과 式(59)에 注意하면,

$$1-\bar{\sigma}(A-BF)>\bar{\sigma}^L(A)\bar{\sigma}(F)\bar{\sigma}(\delta B) \tag{66}$$

이면 式(64)가 만족되고 폐루우프系의 安定性이 保證된다. 式(66)을 $\bar{\sigma}(\delta B)$에 對하여 풀면 式(54)가 얻어진다.

(注) "定理 7"로 주어지는 許容變動 範圍는 式(36)의 評價函數에 對한 最適regulator에 對해서만 成立하는 "定理 5"와 다르고 $\bar{\sigma}(A-BF)<1$을 만족하는 任意의 歸還 行列 F에 對하여 구해진다. $\bar{\sigma}$

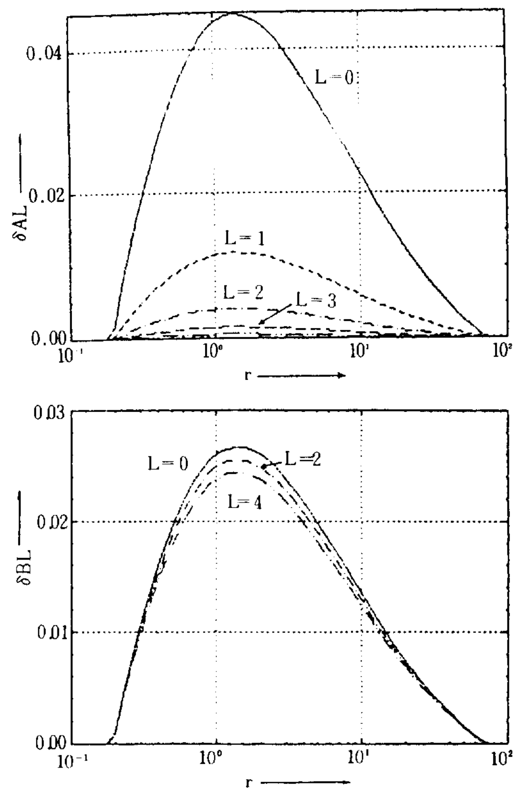

그림 3. 許容誤差 限度
Fig.3. Admissible error bound

(A－BF)＜1이 되는 조건은 반드시 緩慢(slowness)하지 않지만 式(53), (54)로 주어진 許容變動 範圍의 上限은 制御늦음의 영향 등이 陽으로 나타나 있는 點이 特徵이다.

〔數値 例〕

3章에서 취급한 Pressurized flowbox의 例題에 對한 最適regulator를 이용한 경우의 許容變動 範圍를 "定理 7"을 이용하여 求한 結果를 그림 3에 나타내었다. 이 結果는 매우 保守的(conservative)이라고 생각되지만 制御늦음이 있는 경우의 許容變動 範圍를 "定理 5"를 이용하여 求하면 10^{-8}程度되어 保守的인 것이 된다.

5. 結 論

演算時間 때문에 일어나는 制御늦음을 狀態의 豫測値를 이용하여 補償하는 digital 線型regulator 의 Robust安定性에 對하여 考察하였다. 여기서 얻어진 結果는 全体 폐루우프系가 安定하기 위한 充分條件에서 얻어졌고, 매우 保守的인 것이다.

今後, 보다 實用的인 安定餘裕, 시스템行列, 驅動行列의 許容變動 範圍 等의 評価法에 關하여 考察할 必要가 있다.

References

1) 美多: Lサンプルの制御遲れを持つディジタル 最適レギュレータとその特性, 計測自動制御學會論文集, 19-2, pp. 176-178(1983)
2) 美多, 向田: ディジタル制御系における最適サーボ系の設計, 計測自動制御學會論文集, 19-2, PP.193-199(1983)
3) 美多: 演質時間を考慮したディジタル制御系の 設計, 計測と制御, Vol. 22-7, pp. 614-619(1983)
4) N. Lehtomaki, N. Sandell, Jr and M. Athans: Robustness of Liner-Quadratic-Gaussian Based Multivariable Control Dessigns, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26-1, pp. 75-92(1981)
5) U. Shaked: Guaranteed Stability Margins for the Discrete-Time Linear quadratic and LQG Regulators, Submitted for Publication.
6) G. Franklin and J. Powell: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley(1980)
7) R. Patel, M. Toda and B. Sridhanr: Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22-6, pp. 945-949(1979)