論 文
36～4～10

일반화된 상태모델로 주어진 싱귤라 시스템의 최적제어문제 해석

The Analysis of the optimal Control Problem for the Singular System with the Generalized State Space Model

李 夬 熙
(Kwae-Hi Lee)

Abstract

The Optimal Control Problems for the singular system with the Generalized state space model are considered. It is shown that when the system is singular, the dimension can be reduced by coordinate transformation and the equivalent nonsingular system is got. After we have nonsingular system, the solution for the optimal control problem can be got by Riccati equation.

1. 서 론

지금까지 상태방정식으로 주어진 시스템의 최적제어 문제들에 대한 연구는 수없이 많았다.[1)~4)] 그러한 문제들의 대부분의 경우, 주어진 시스템이 표준형의 상태방정식으로 가정했다. 본 논문에서는 다음과 같은 일반화된 상태방정식(Generalized state space differential equation)으로 주어진 시스템의 최적제어 문제를 해석하고자 한다.

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\ :\ x(o)=x_0 \tag{1.1}$$

여기서 $x(\cdot)\in\mathbf{R}^n$은 상태벡터
$u(\cdot)\in\mathbf{R}^m$은 입력벡터이고

$A\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $E\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $B\in\mathbf{R}^{n\times m}$인 행열이다.

만약 E 행열이 논싱귤라(nonsingular)인 경우 (1.1)식은 다음과 같은 표준형의 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t)=\hat{A}x(t)+\hat{B}u(t)\ :\ x(o)=x_0 \tag{1.2}$$

여기서 $\hat{A}=E^{-1}A$, $\hat{B}=E^{-1}B$이다.

그러나 표준형의 상태방정식으로 해석하는 것보다 일반화된 상태방정식을 직접 해석해야 하는 경우가 많다. 예를 들면 대규모 시스템을 해석하거나 perturbation 방정식을 다룰 경우 E 행열이 싱귤라가 되어 E^{-1}가 존재하지 않게되는 경우가 많이 있다. 또한 기타 여러가지 경우에도 일반화된 상태방정식을 이용해야 하는 경우가 있게 된다.[5),6)]

이미 참고문헌 7)에서 E가 논싱귤라인 경우의 최적제어 문제를 다루었으므로 본 논문에서는 E가 싱귤라인 경우의 문제만을 다루고자 한다.

2. 본 론

일반화된 상태방정식으로 주어진 싱귤라 시스템의 최적제어 문제를 다룬다.

(3.1)식과 같이 선형 시불변 시스템으로 주어진 경우 입력벡터 $u^*(t)$를 구해서 (3.2)식으로 주어진 비용함수(cost function)을 최소화하고자 한다.

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\ :\ x(o)=x_0 \tag{3.1}$$

正 會 員 : 西江大 理工大 電子工學科 副敎授
接受日字 : 1986年 11月 5日
1次修正 : 1986年 12月 5日
2次修正 : 1987年 3月 3日

$$J(u)=\frac{1}{2}x^T(T)\Gamma x(T)+\frac{1}{2}\int_0^T(x^TQx+u^TRu)dt \tag{3.2}$$

여기서 $Q\in\mathbf{R}^{n\times n}$이고, $Q=Q^T\geq 0$,
$R\in\mathbf{R}^{m\times m}$이고, $R=R^T>0$
또 E행열의 계수는 r이다.

본 논문에서는 좌표 변환에 의해 축소된 논싱귤라 시스템을 얻은 후 Riccati 방정식을 세워서 해석하고자 한다.

행열을 간단한 형태로 변환 시키는 방법은 여러가지가 있으나 여기서는 가우스 소거법[8]을 사용한다.

먼저 E 행열에 대해 가우스 소거법을 적용시킨다. 피보트(pivot) 선정을 위해 E 행열의 행을 바꿀 때는 A행열과 B 행열의 행을 같이 바꾸고 E행열의 열을 바꿀 때는 A의 열과 x의 행을 바꾼다. E 행열의 계수가 r이므로 결국 [E A B]가

$\begin{bmatrix} I_r & 0 & \vdots & \check{A}_{11} & \check{A}_{12} & \vdots & \check{B}_1 \\ 0 & 0 & \vdots & \check{A}_{21} & \check{A}_{22} & \vdots & \check{B}_2 \end{bmatrix}$로 변환된다.

따라서 식 (3.1)은

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \check{B}_1 \\ \check{B}_2 \end{bmatrix}u \tag{3.3}$$

이 된다.

일반적으로 A_{22}는 싱귤라일 수도 있으므로 논싱귤라가 되도록 가우스소거법을 $[\check{A}_{21}\ \check{A}_{22}]$에 적용한다. $[\check{A}_{21}\ \check{A}_{22}]$의 행을 바꿀 때는 $\check{B}_2$의 행을 바꾸고 $\check{A}_{22}$의 열을 바꿀 때는 $\begin{bmatrix} \check{A}_{12} \\ \check{A}_{22} \end{bmatrix}$의 열과 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$의 열을 바꾸고 $\check{x}$의 행을 바꾼다. 결국 식 (3.3)은

$$\begin{bmatrix} \widehat{E}_{11} & \widehat{E}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{11} & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_2 \end{bmatrix}u \tag{3.4}$$

로 된다.

또는

$$\widehat{E}_{11}\dot{\hat{x}}_1+\widehat{E}_{12}\dot{\hat{x}}_2=\widehat{A}_{11}x_1+\widehat{A}_{12}x_2+B_1u \tag{3.5}$$
$$\widehat{A}_{21}\hat{x}_1+\hat{x}_2+\widehat{B}_2u=0 \tag{3.6}$$

식 (3.6)으로부터

$$\hat{x}_2=-\widehat{A}_{21}\hat{x}_1-\widehat{B}_2u \tag{3.7}$$

식 (3.5)와 식 (3.7)로부터

$$(\widehat{E}_{11}-\widehat{E}_{12}\widehat{A}_{21})\dot{\hat{x}}_1=(\widehat{A}_{11}-\widehat{A}_{12}\widehat{A}_{21})\hat{x}_1+(\widehat{B}_1-\widehat{A}_{12}\widehat{B}_2)u+\widehat{E}_{12}\widehat{B}_2\dot{u} \tag{3.8}$$

을 얻는다. $(\widehat{E}_{11}-\widehat{E}_{12}\widehat{A}_{21})$의 계수가 r보다 적을 경우 (3.8)식과 (3.6)식으로부터 행을 얻을 수 없게 된다. 따라서 $(\widehat{E}_{11}-\widehat{E}_{12}\widehat{A}_{21})$는 논싱귤라이며 식(3.8)은

$$\dot{\hat{x}}_1=\widetilde{A}\hat{x}_1+\widetilde{B}u+\widetilde{F}\dot{u} \tag{3.9}$$

로 된다. 여기서

$$\widetilde{A}=(\widehat{E}_{11}-\widehat{E}_{12}\widehat{A}_{21})^{-1}(\widehat{A}_{11}-\widehat{A}_{12}\widehat{A}_{21}) \tag{3.10}$$
$$\widetilde{B}=(\widehat{E}_{11}-\widehat{E}_{12}\widehat{A}_{21})^{-1}(\widehat{B}_1-\widehat{A}_{12}\widehat{B}_2) \tag{3.11}$$
$$\widetilde{F}=(\widehat{E}_{11}-\widehat{E}_{12}\widehat{A}_{21})^{-1}\widehat{B}_2 \tag{3.12}$$

식 (3.9)를 Laplace 변환하고 정리하면 다음과 같다.

$$X_1(s)=(SI-\widetilde{A})^{-1}(\widetilde{B}+S\widetilde{F})U(s) \tag{3.13}$$

여기서 $X_1(s)=L[\hat{x}_1(t)]$, $U(s)=L[u(t)]$이다.
가상적인 출력벡터 $y(t)$를

$$y(t)=\hat{x}_1(t) \tag{3.14}$$

로 두면 입력벡터 $u(t)$와 출력벡터 $y(t)$사이의 전달함수 행열 $\widehat{G}(s)$는 다음과 같다.

$$\widehat{G}(s)=(SI-\widetilde{A})^{-1}(\widetilde{B}+S\widetilde{F}) \tag{3.15}$$

식 (3.15)를 변형시키면

$$\widehat{G}(s)=(SI-\widetilde{A})^{-1}[\widetilde{B}+(SI-\widetilde{A})\widetilde{F}+\widetilde{A}\widetilde{F}]=(SI-\widetilde{A})^{-1}[\widetilde{B}+\widetilde{A}\widetilde{F}]+\widetilde{F} \tag{3.16}$$

따라서 다음과 같은 새로운 시스템으로 변환시킬 수 있다.

$$\tilde{x}(t)=\widehat{A}\tilde{x}(t)+\widehat{B}u(t) \tag{3.17}$$
$$y(t)=\tilde{x}(t)+\widehat{D}u(t) \tag{3.18}$$

여기서 $\tilde{x}(\cdot)\in\mathbf{R}^r$, $y(\cdot)\in\mathbf{R}^r$, $\widehat{A}=\widetilde{A}$, $\widehat{B}=\widetilde{B}+\widetilde{A}\widetilde{F}$, $\widehat{D}=\widetilde{F}$이다.

따라서 (3.1)식의 $x(t)$를 구하는 문제는 축소된 시스템의 출력벡터 $y(t)$를 구하는 문제를 귀착된다.

이제 본래의 최적제어 문제를 새로운 축소된 시스템에 대해 변환시킨다.

(3.4)식의 $\hat{x}$는 (3.1)식의 x의 행을 바꾼 것이므로 Z^T를 I_n의 열을 바꾼 행열(Column permutation matrix) 이라면

$$\hat{x}(t)=Z^Tx(t) \tag{3.19}$$

가 된다.

(3.7식과 (3.19)식으로부터

$$x^T\Gamma x=(\hat{x}_1^T\hat{x}_2^T)Z^T\Gamma Z\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$
$$=[\hat{x}_1^T(-\hat{A}_{21}\hat{x}_1-\hat{B}_2u)^T]Z^T\Gamma Z\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ -\hat{A}_{21}x_1-\hat{B}_2u\end{bmatrix} \quad (3.20)$$

여기서 $$Z^T\Gamma Z=\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}_{11} & \hat{\Gamma}_{12}\\ \hat{\Gamma}_{12}^T & \hat{\Gamma}_{22}\end{bmatrix} \quad (3.21)$$

로 두면

$$x^T\Gamma x=\hat{x}_1^T(\hat{\Gamma}_{11}-\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{12}^T-\hat{\Gamma}_{12}\hat{A}_{21}+\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{A}_{21})\hat{x}_1+2\hat{x}_1^T(\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{B}_2-\hat{\Gamma}_{12}\hat{B}_2)u+u^T\hat{B}_2^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{B}_2u \quad (3.22)$$

(3.14) 식과 (3.18) 식으로부터

$$x^T\Gamma x=\tilde{x}^T\tilde{\Gamma}_{11}\tilde{x}+2\tilde{x}^T\tilde{\Gamma}_{12}u+u^T\tilde{\Gamma}_{22}u \quad (3.23)$$

여기서 $$\tilde{\Gamma}_{11}=\hat{\Gamma}_{11}-\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{12}^T-\hat{\Gamma}_{12}\hat{A}_{21}+\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{A}_{21} \quad (3.24)$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}=\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{B}_2-\hat{\Gamma}_{12}\hat{B}_2+\hat{\Gamma}_{11}\hat{D}-\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{12}^T\hat{D}-\hat{\Gamma}_{12}\hat{A}_{21}\hat{D}+\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{A}_{21}\hat{D} \quad (3.25)$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}=\hat{B}_2^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{B}_2+\hat{D}^T\hat{\Gamma}_{11}\hat{D}-\hat{D}^T\hat{A}_{21}^T\hat{\Gamma}_{12}^T\hat{D}-\hat{D}^T\hat{\Gamma}_{12}\hat{A}_{21}\hat{D}+\hat{D}^T\hat{A}_{21}^T\Gamma_{22}B_2+\hat{B}_2^T\Gamma_{22}\hat{A}_{21}\hat{D}-\hat{D}^T\hat{\Gamma}_{22}\hat{B}_2-\hat{B}_2^T\hat{\Gamma}_{12}^T\hat{D} \quad (3.26)$$

이다.

마찬가지로 x^TQx를 변환하면

$$x^TQx=\tilde{x}^T\tilde{Q}_{11}\tilde{x}+2\tilde{x}^T\tilde{Q}_{12}u+u^T\tilde{Q}_{22}u \quad (3.27)$$

여기서 $\tilde{Q}_{11}$, $\tilde{Q}_{12}$, $\tilde{Q}_{22}$는 각각 식(3.24), (3.25) (3.26) 식에 $\hat{\Gamma}_{11}$대신 $\hat{Q}_{11}$, $\hat{\Gamma}_{12}$대신 $\hat{Q}_{12}$, $\hat{\Gamma}_{22}$대신 $\hat{Q}_{22}$ 를 대입한 결과이다.

따라서 (3.1), (3.2) 식의 최적제어문제는 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\hat{A}\tilde{x}(t)+\hat{B}u(t) \quad (3.28)$$

$$J(u)=\frac{1}{2}[\tilde{x}^T(T)\tilde{\Gamma}_{11}\tilde{x}(T)+2\tilde{x}^T(T)\tilde{\Gamma}_{12}u(T)+u^T(T)\cdot\tilde{\Gamma}_{22}u(T)]+\frac{1}{2}\int_0^T(\tilde{x}^T\tilde{Q}_{11}\tilde{x}+2\tilde{x}^T\tilde{Q}_{12}u+u^T(\tilde{Q}_{22}+R)u)dt \quad (3.29)$$

이것은 전형적인 최적제어 문제이므로 쉽게 해를 구할 수 있다.

Hamilton-Jacoby 이론[4]을 적용하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\dot{\tilde{x}}=\hat{A}\tilde{x}+\hat{B}u \quad (3.30)$$
$$\dot{p}=-\tilde{Q}_{11}-\hat{A}^Tp-\tilde{Q}_{12}u \quad (3.31)$$
$$0=\tilde{Q}_{12}^T\tilde{x}+(R+\tilde{Q}_{22})u+\hat{B}^Tp \quad (3.32)$$

여기서 $p(\cdot)\in\mathbf{R}_r$은 adjoint 벡터이다.

$(R+\tilde{Q}_{22})$가 싱귤라인 경우에는 참고문헌[7]에서와 같이 해를 구할 수 있다.

여기서는 $\tilde{R}\equiv R+\tilde{Q}_{22}$가 논싱귤라로 가정한다.

(3.30) 식으로

$$u=-\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T\tilde{x}-\tilde{R}^{-1}\hat{B}_1^Tp \quad (3.33)$$

(3.33) 식을 (3.30) 식과 (3.31) 식에 대입하면

$$\dot{\tilde{x}}=(\hat{A}-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)\tilde{x}-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\hat{B}^{-1}p \quad (3.34)$$
$$\dot{p}=-(\tilde{Q}_{11}-\tilde{Q}_{12}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)\tilde{x}-(\hat{A}-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)^Tp \quad (3.35)$$

$p(t)=\Pi(t)x(t)$로 정의하면

$$\dot{p}=\dot{\Pi}x+\Pi\dot{x} \quad (3.36)$$

(3.36) 식을 (3.35) 식에 대입하면

$$(-\dot{\Pi}-\Pi(\hat{A}-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\hat{B}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)+\Pi\hat{B}\tilde{R}^{-1}\hat{B}^T\Pi-(\hat{A}-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)\Pi+(\tilde{Q}_{12}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T-\tilde{Q}_{11})]\tilde{x}=0 \quad (3.37)$$

을 얻는다. (3.37) 식은 모든 $\tilde{x}$에 대해 만족해야 하므로 우리는 다음과 같은 Riccati 방정식을 얻는다.

$$-\dot{\Pi}=-\Pi\hat{B}\tilde{R}^{-1}\hat{B}^T\Pi+\Pi(\hat{A}-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)+(A-\hat{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T)\Pi+(\tilde{Q}_{11}-\tilde{Q}_{12}\tilde{R}^{-1}\tilde{Q}_{12}^T) \quad (3.38)$$

이제 위의 Riccati 방정식의 경계치를 구한다.

(3.33) 식과 $p(t)=\Pi(t)x(t)$의 관계식으로 부터 (3.29) 식의 터미널 관계식을 구한다.

즉 $$\frac{1}{2}x^T(T)\Gamma x(T)=\frac{1}{2}\{\tilde{x}^T(T)\tilde{\Gamma}_{11}\tilde{x}(T)+2\tilde{x}^T(T)\tilde{\Gamma}_{11}[-\tilde{R}^{-1}(\tilde{Q}_{12}+\hat{B}^T\Pi(T)]\tilde{x}(T)+\tilde{x}^T(T)[-\tilde{R}^{-1}(\tilde{Q}_{12}^T+\hat{B}^T\Pi(T))]^T\tilde{\Gamma}_{22}[-\tilde{R}^{-1}(\tilde{Q}_{12}^T+\hat{B}^T\Pi(T))]\tilde{x}(T)\} \quad (3.39)$$

따라서 transversality 조건[4]

$$P(T)=\Pi(T)\tilde{x}(T)=\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left[\frac{1}{2}x^T(T)\Gamma x(T)\right] \quad (3.40)$$

으로 부터

$$\Pi(T)\tilde{x}(T)=\tilde{\Gamma}_{11}\tilde{x}(T)-[\tilde{\Gamma}_{11}\tilde{R}^{-1}(\tilde{Q}_{12}+\hat{B}^T\Pi(T))+(\tilde{Q}_{12}+\hat{B}^T\Pi(T))^T\tilde{R}^{-1}\tilde{\Gamma}_{11}]\tilde{x}(T)+[\tilde{R}^{-1}(\tilde{Q}_{12}^T+\hat{B}\Pi(T))]^T\tilde{\Gamma}_{22}[\tilde{R}^{-1}(\tilde{Q}_{12}^T+\hat{B}\Pi(T))]\tilde{x}(T) \quad (3.41)$$

따라서 $\Pi(T)$는 다음과 같은 Riccati 대수 방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi(T) = [\,&\widetilde{\Gamma}_{11} - (\widetilde{\Gamma}_{11}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{Q}_{12} + \widetilde{Q}_{12}^{T}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{\Gamma}_{11}) + \widetilde{Q}_{12}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{\Gamma}_{22}\widetilde{R}^{-1}\\ &Q_{12}^{T}] - (\widetilde{\Gamma}_{11}\widetilde{R}^{-1}\widehat{B}^{T} - \widetilde{Q}_{12}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{\Gamma}_{22}\widetilde{R}^{-1}\widehat{B})\,\Pi(T) -\\ &\Pi^{T}(T)\,[\widehat{B}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{\Gamma}_{11} - \widehat{B}^{T}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{\Gamma}_{22}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{Q}_{12}^{T}] + \Pi^{T}(T)\\ &B^{T}\widetilde{R}^{-1}\Gamma_{22}\widetilde{R}^{-1}\widehat{B}\,\Pi(T)\end{aligned} \tag{3.42}$$

(3.42) 식은 대칭이므로 $\Pi^T(T) = \Pi(T)$ 이어야 한다.

일단 $\Pi(T)$를 구하면 (3.38) 식은 backward 초기치 문제가 된다. $\Pi(t)$를 구하면 $\tilde{x}(t)$를 구하게 되고 다시 $u^*(t)$를 구할 수 있다. 끝으로 $\tilde{x}(t)$를 구하기 위한 초기치 $x(0)$를 구한다.

(3.19) 식으로 부터

$\hat{x}(o) = Z^T x_0$ 이므로 $\hat{x}_1(o)$를 구할 수 있다. (3.14) 식과 (3.1) 식으로 부터

$$\hat{x}_1(o) = \tilde{x}(o) - \widehat{D}(\widetilde{R}^{-1}\widehat{B}^T\Pi(o) + \widetilde{R}^{-1}\widetilde{Q}_{12}^{T})\,\tilde{x}(o) \tag{3.43}$$

따라서

$\tilde{x}(o) = [I - \widehat{D}(\widetilde{R}^{-1}\widehat{B}^T\Pi(o) + \widetilde{R}^{-1}\widetilde{Q}_{12}^{T})]^{-1}\hat{x}_1(o)$ 가 된다.

3. 결 론

본 논문에서는 일반화된 상태방정식으로 주어진 싱귤라 시스템의 최적제어 문제를 다루었다. 식 (1.1)의 E 행열이 싱귤라인 경우 좌표변환에 의해 축소된 논싱귤라 시스템을 얻은 후 Riccati 방정식을 세워서 해를 얻었다.

좌표변환은 가우스 소거법을 이용했으므로 수치해석상 다른 변환을 사용한 보다 안정성이 높을 것으로 생각된다.

끝으로 본 연구는 서강대학교 학술연구 조성비에 의해 수행되었음을 밝힌다.

참 고 문 헌

1) B.D.O. Anderson and J.B. Moore: "Linear Optimal Control", rentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.
2) M. Athams and P.L. Fa16: "Optimal Control", McGraw-Hill, New York, 1966.
3) H. Kwakernaak and R.Sivan: "Linear Optimal Control Systems", Wiley, New York, 1972.
4) A.P. Sage: "Optimal System Control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.
5) D.G. Luenberger: "Dynamic Equations in Descriptor Form", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. Ac-22, pp312-321, 1977.
6) R.F. Sincovec. et al: "Analysis of Descriptor Systems Using Numerical Algorithms", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol.Ac-26, pp139-147, 1981.
7) 이 쾌희: "일반화된 상태모델로 주어진 시스템의 최적제어문제 해석", 대한전기학회 논문지, 제83권 12호, pp25-30, 1984.
8) G.W. Stewart: "Introduction To Matrix Computations", Academic Press, New York, 1973.
9) A.J. Laub: "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations", IEEE Trans., Automat Contr., Vol.Ac-23, pp913-921, 1978.　BG3