

<論 文>

車輪과 鐵路의 連成振動에 관한 研究

—계 단진 두께를 갖는 車輪의 動特性—

金 光 植* · 朴 玟 泰**

(1986年 8月 25日 接受)

A Study on the Coupled Vibration of Train Wheel and Rail
—Dynamic Characteristics of Train Wheel with the Stepped Thickness—

Kwang-Sic Kim and Mun-Tae Park

Key Words: Train Wheel(車輪), Rail(鐵路), Coupled Vibration(連成振動), In-Plane Compressive Stress(內平面 壓縮應力), Critical Buckling Load(臨界座屈荷重)

Abstract

This study is a part of the research on the coupled vibration of train wheel with the stepped thickness and rail. The research was conducted for the purpose of examining the dynamic characteristics of train wheel at the running state and preventing the vibrations of the high speed railway.

The stress at the boundary surface of web and rim, σ_c , was analyzed in consideration of the uniform In-plane compressive stress depending on the conditions of rolling and the In-plane compressive stress depending on the rotation of train wheel. Then the equation of transverse vibration of the annular plate with the stepped thickness was analyzed by Rayleigh-Ritz's method.

As a result of study, it was known that the rotational speed increase the natural frequency slightly and the acceleration level highly while the reaction force between train wheel and rail decrease the natural frequency linearly and the critical buckling is generated at $n=1$.

記 號 設 明

a : 環形圓板의 內圓周 半徑
 A_i : 固有振動型 $W_n(r)$ 의 常數
 b : 環形圓板의 外圓周 半徑
 c : 內輪과 外輪의 境界面까지의 半徑

D : 굽힘 剛性(= $Eh^3/12(1-\nu^2)$)
 D_w, D_r : 內輪과 外輪의 굽힘 剛性
 E : 彈性係數
 E_1, E_2 : 內輪과 外輪의 彈性係數
 h : 環形圓板의 均일한 두께
 h_1, h_2 : 內輪과 外輪의 두께
 i : 次數

* 正會員, 漢陽大學校 工科學 精密機械工學科
** 正會員, 漢陽大學校 大學院 精密機械工學科

- M : 굽힘 모우멘트
- n : 結節의 直徑數
- N : 外圓周에 작용하는 內平面 壓縮應力
- P : 단위길이당 集中荷重
- r : 半徑
- R : 車輪과 鐵路의 接觸點에서의 反力
- Rcr : 臨界座屈荷重
- s : 結節의 圓周數
- S : 剪斷力
- t : 時間
- T_w, T_r : 內輪과 外輪의 運動에너지
- u : 半徑方向의 變位
- u_n, u_r : $r=c$ 에서 內輪과 外輪의 變位
- U_n, U_r : 內輪과 外輪의 變형률에너지
- V_n, V_r : 內輪과 外輪의 포텐셜에너지
- w : 環形圓板의 처짐
- $W_n(r)$: 半徑方向의 固有振動型
- ϵ_r : 半徑方向의 변형률
- ϵ_θ : 圓周方向의 변형률
- ν : 프와송 比
- ρ : 環形圓板의 밀도
- ρ_1, ρ_2 : 內輪과 外輪의 밀도
- σ_c, σ_c' : $r=c$ 에서 內輪과 外輪의 應力
- σ_r : 半徑方向의 應力
- σ_θ : 圓周方向의 應力
- σ_{r1}, σ_{r2} : 內輪과 外輪의 半徑方向 應力
- $\sigma_{\theta1}, \sigma_{\theta2}$: 內輪과 外輪의 圓周方向 應力
- $\phi_i(r)$: 許容函數
- ω : 車輪의 振動數
- Ω : 車輪의 회전수
- ∇^4 : 二重調和 演算子

1. 緒 論

고속차량의 개발로 인하여 車輪과 鐵路의 連成振動에 관한 문제가 중요시되고 있는데, 차량의 정상주행時에 소음이 가장 크게 발생하는 부분이 구름장치이고 이때 소음의 주원인은 車輪의 橫振動임이 널리 알려져 있으나^(1,2,3), 복합적인 조건하에서 일어나는 車輪의 振動을 정확히 해석하기에는 어려움이 많아 이에 대한 研究가 계속 進行되고 있다.

A.W. Leissa^(4,5,6)는 여러가지 板의 振動에 대한 개요를 단계적으로 정리하였으며 R.V. Southwell⁽⁷⁾, P. N. Raju⁽⁸⁾, S.M. Vogel and D.W. Skinner⁽⁹⁾ 등은 環

形圓板의 振動을 연구하였다. J. Prescott⁽¹⁰⁾, H.C. Loh and J.F. Carney III⁽¹¹⁾ 등은 圓板의 회전에 의한 內平面(In-plane) 壓縮應力을 받으며 횡방향으로 작은 처짐을 갖는 環形圓板을 解析하였고, A. Losen and A. Libai⁽¹²⁾와 G.K. Ramaiah^(13,14)는 內원주와 外원주에 일정한 壓縮應力을 받는 環形圓板의 座屈과 固有振動數에 대한 研究를 하였다. W.E. Red⁽¹⁵⁾는 外원주에 폭이 좁은 곡선보가 보강된 얇은 環形圓板의 振動應答을 조사하였으며, S. Sato and H. Matsuhisa⁽¹⁶⁾는 外력을 무시한 채 제한된 두께를 갖는 環形圓板의 橫振動을 Mindlin 平板의 理論과 웨브(web)와 림(rim) 사이의 연속조건을 이용하여 해석하였다.

본 논문에서는 車輪을 등방성, 균질 재료라고 가정하였으며 웨브와 림의 두께가 서로 다른 環形圓板으로써 內원주는 고정되고 外원주는 자유라고 가정하였다. 外원주상의 한 점에서 鐵路와의 구름조건에 따라 변하는 반경방향의 반력에 의한 內平面 壓縮應力과 圓板의 회전에 의한 內平面 壓縮應力을 고려하고, 두께가 변하는 웨브와 림의 境界面에서의 연속조건을 이용하여 車輪의 橫振動方程式을 세워서 Rayleigh-Ritz 방법으로 수치해석을 하여 固有振動數와 臨界座屈荷重을 계산하고, 실제 車輪의 1/6 크기로 형상화하여 제작한 連成振動裝置로 실험하여 이론치와 比較, 檢討하였다.

2. 理論 解析

2.1 內平面 應力 解析

일정한 두께의 회전하는 圓板의 平衡方程式은 다음과 같다.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\Omega^2 r = 0 \tag{1}$$

평면응력상태의 Hook 법칙은

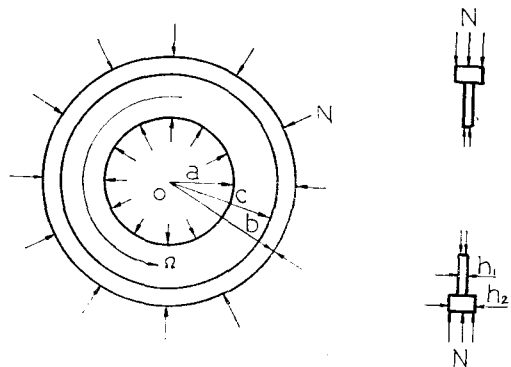


Fig. 1 Annular plate with the stepped thickness

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (2) \quad \cdot \frac{1}{r} \quad (14)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (3)$$

이 되고 應力과 變形率의 관계와 위 식을 이용하면 다음과 같다.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) \quad (5)$$

위 식들을 식 (1)에 대입하면 等次元方程式이

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{-(1-\nu^2)\rho\Omega^2r}{E} \quad (6)$$

되고 이 微分方程式을 풀면 변위 u 에 대한 解를 얻는다.

$$\therefore u = -\frac{(1-\nu^2)\rho\Omega^2r^3}{8E} + A_1r + \frac{A_2}{r} \quad (7)$$

식 (7)을 식 (4)와 식 (5)에 대입하면 반경방향과 원주방향의 應力이 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} & \left[-\frac{(3+\nu)(1-\nu^2)\rho\Omega^2r^2}{8E} \right. \\ & \left. + (1+\nu)A_1 - (1-\nu)\frac{A_2}{r^2} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} & \left[-\frac{(1+3\nu)(1-\nu^2)\rho\Omega^2r^2}{8E} \right. \\ & \left. + (1+\nu)A_1 + (1-\nu)\frac{A_2}{r^2} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

(1) $a \leq r \leq c$ 인 웨브부분

應力分布가 전적으로 회전的影响을 받는다면 境界 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_r|_{r=a} = 0 \quad (10)$$

$$\sigma_r|_{r=c} = \sigma_c \quad (11)$$

식 (8)을 위 식들에 대입하여 A_1, A_2 를 구하고, 이것을 식 (7)~(9)에 대입하면 웨브부분의 應력과 변위를 구하게 된다.

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{r1} = \frac{\sigma_c \cdot c^2}{(c^2 - a^2)} & \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\rho_1 \Omega^2 (3 + \nu)}{8} \\ & \left(c^2 + a^2 - r^2 - \frac{a^2 \cdot c^2}{r^2}\right) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{\theta 1} = \frac{\sigma_c \cdot c^2}{(c^2 - a^2)} & \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\rho_1 \Omega^2 (1 + 3\nu)}{8} r^2 \\ & + \frac{\rho_1 \Omega^2 (3 + \nu)}{8} \left(c^2 + a^2 + \frac{a^2 \cdot c^2}{r^2}\right) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore u_w = -\frac{\rho_1 \Omega^2 (1 - \nu^2) r^3}{8E_1} & + \left[\frac{\sigma_c \cdot c^2 (1 - \nu)}{E_1 (c^2 - a^2)} \right. \\ & \left. + \frac{\rho_1 \Omega^2 (3 + \nu) (1 - \nu) (c^2 + a^2)}{8E_1} \right] \cdot r \\ & + \left[\frac{\sigma_c (1 + \nu) a^2 c^2}{E_1 (c^2 - a^2)} + \frac{(3 + \nu) (1 + \nu) \rho_1 \Omega^2 a^2 \cdot c^2}{8E_1} \right] \end{aligned}$$

(2) $c \leq r \leq b$ 인 림 부분

웨브와 림의 境界面에서는 연속방정식을 만족해야 하고,

$$\sigma_c \cdot h_1 = \sigma_c' \cdot h_2 \quad (15)$$

應力分布가 전적으로 회전의 영향만 받는다면 境界 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_r|_{r=c} = \sigma_c' \quad (16)$$

$$\sigma_r|_{r=b} = -N \quad (17)$$

여기서 웨브와 림의 두께비는 $\bar{h} = \frac{h_2}{h_1}$ 라 한다. 식

(8)을 위 식들에 대입하여 A_1, A_2 를 구하고, 이것을 식 (7)~(9)에 대입하면 림 부분의 應력과 변위를 구하게 된다.

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{r2} = \frac{\sigma_c \cdot c^2}{\bar{h}(b^2 - c^2)} & \left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) + \frac{\rho_2 \Omega^2 (3 + \nu)}{8} \\ & \left(b^2 + c^2 - r^2 - \frac{b^2 \cdot c^2}{r^2}\right) - \frac{N \cdot b^2}{(b^2 - c^2)} \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{\theta 2} = \frac{-\sigma_c \cdot c^2}{\bar{h}(b^2 - c^2)} & \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{\rho_2 \Omega^2 (1 + 3\nu)}{8} r^2 \\ & + \frac{\rho_2 \Omega^2 (3 + \nu)}{8} \left(b^2 + c^2 + \frac{b^2 \cdot c^2}{r^2}\right) - \frac{N \cdot b^2}{(b^2 - c^2)} \\ & \left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right) \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore u_r = -\frac{\rho_2 \Omega^2 (1 - \nu^2) r^3}{8E_2} & + \left[\frac{-\sigma_c (1 - \nu) \cdot c^2}{E_2 \bar{h} (b^2 - c^2)} \right. \\ & + \frac{\rho_2 \Omega^2 (3 + \nu) (1 - \nu) (b^2 + c^2)}{8E_2} \\ & - \frac{N \cdot (1 - \nu) \cdot b^2}{E_2 (b^2 - c^2)} \left. \right] \cdot r + \left[\frac{-\sigma_c \cdot (1 + \nu) b^2 \cdot c^2}{E_2 \bar{h} (b^2 - c^2)} \right. \\ & + \frac{\rho_2 \Omega^2 (3 + \nu) (1 + \nu) \cdot b^2 \cdot c^2}{8E_2} \\ & \left. - \frac{N \cdot (1 + \nu) \cdot b^2 \cdot c^2}{E_2 (b^2 - c^2)} \right] \cdot \frac{1}{r} \quad (20) \end{aligned}$$

$r=c$ 인 境界面에서의 반경방향의 변위는 같아야 하므로 식 (14)와 식 (20)을 이용하여 $u_w = u_r$ 을 풀면, $E_1 = E_2 = E$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 이므로 웨브와 림의 境界面應力은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_c = \frac{\bar{h} \rho \Omega^2 (b^2 - c^2) (c^2 - a^2) (b^2 - a^2) (3 + \nu)}{4[\bar{h} (b^2 - c^2) \{(1 - \nu) c^2 + (1 + \nu) b^2\} + (c^2 - a^2) \{(1 - \nu) c^2 + (1 + \nu) a^2\}]} \quad (21) \end{aligned}$$

2.2 環形圓板의 橫振動方程式

반경방향과 원주방향의 內平面 壓縮應力 σ_r, σ_θ 를 받는 環形圓板의 運動方程式은 다음과 같다.

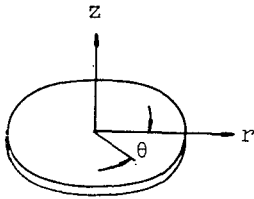


Fig. 2 Cylindrical coordinate

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\sigma_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{22}$$

경계조건은 내원주에서 고정, 외원주에서 자유이므로

(i) $r=a$ 일 때

$$w=0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=0 \tag{24}$$

(ii) $r=b$ 일 때

$$M = -D_r \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} = 0 \tag{25}$$

$$S - P \frac{\partial w}{\partial r} = -D_r \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{(1-\nu)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \right\} - P \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \tag{26}$$

가 된다. 식 (22)을 에너지방정식으로 변환하면^(10,13) 웨브와 림의 각각에 대하여 다음과 같다.

(i) $a \leq r \leq c$ 인 웨브 부분

$$V_w = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) h_1 \int_a^c \left\{ \sigma_{r1} \left(\frac{dW_n}{dr} \right)^2 + \sigma_{\theta 1} \left(\frac{n}{r} W_n \right)^2 \right\} r dr \tag{27}$$

$$U_w = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) D_w \int_a^c \left[\left(-\frac{d^2 W_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{d^2 W_n}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n \right) + 2(1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left(\frac{dW_n}{dr} - \frac{W_n}{r} \right)^2 \right] r dr \tag{28}$$

$$T_w = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) \omega^2 \rho_1 h_1 \int_a^c W_n^2 r dr \tag{29}$$

(ii) $c \leq r \leq b$ 인 림 부분

$$V_r = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) h_2 \int_c^b \left\{ \sigma_{r2} \left(\frac{dW_n}{dr} \right)^2 + \sigma_{\theta 2} \left(\frac{n}{r} W_n \right)^2 \right\} r dr \tag{30}$$

$$U_r = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) D_r \int_c^b \left[\left(-\frac{d^2 W_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{d^2 W_n}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dW_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W_n \right) + 2(1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left(\frac{dW_n}{dr} - \frac{W_n}{r} \right)^2 \right] r dr \tag{31}$$

$$T_r = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) \omega^2 \rho_2 h_2 \int_c^b W_n^2 r dr \tag{32}$$

여기서 δ_{0n} 은 Kronecker delta 로써 $\delta_{0n} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ 이

다. 식 (27)~(32)의 에너지 방정식을 이용하여 식 (22)의 解를 구함으로써 車輪의 橫振動을 解析할 수 있다.

3. 數值 解析

Rayleigh-Ritz 방법을 이용하기 위하여 반경방향의 固有振動型을

$$W_n(r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i(r) \tag{33}$$

과 같이 가정하였고, 경계조건식 (23)~(26)을 만족하는 許容函數는 G.K. Ramaiah and K. Vijayakumar⁽¹⁸⁾에서처럼

$$\phi_i(r) = r^{i-1} (r-a)^2 \tag{34}$$

으로 가정하였다. 식 (33), 식 (34)를 에너지방정식 (27)~(32)에 대입하여 1次 變分 $\delta(V_w + V_r + U_w + U_r - T_w - T_r) = 0$ 을 풀면 特性方程式으로부터 固有振動數를 계산할 수 있고, $\Omega=0$, $\omega=0$ 인 조건하에서 1次 變分 $\delta(V_w + V_r + U_w + U_r) = 0$ 을 풀면 車輪의 臨界座屈荷重을 계산할 수 있다.

1/6크기로 형상화한 車輪과 鐵路의 재료가 구조용강 (S45C)이므로 $E=2.1 \times 10^4 \text{kgf/mm}^2$, $\rho=8.01 \times 10^{-10} \text{kgf} \cdot \text{s}^2/\text{mm}^4$, $\nu=0.3$ 으로 하였고, $a=25\text{mm}$, $c=62.5\text{mm}$, $b=75\text{mm}$ 그리고 $h_1=5\text{mm}$, $h_2=20\text{mm}$ 를 대입한 후 $R=0, 30, 90, 150, 210, 270, 330(\text{kgf})$, $\Omega=0, 800, 1600(\text{rpm})$ 의 각각에 대하여 固有振動數를 구하여 Table 1, 2, 3에 정리하였고, 臨界座屈荷重은 Fig. 3에 나타내었다. $n=6$ 까지 변화시키고 $i \geq 4$ 로 하여 IBM PC/370 XT로 계산하였다. 외원주상에 균일하게 분포되어 작용하는 內平面 壓縮應力 N 은 Hertz의 接觸理論과 點荷重으로 인한 원주상의 분포응력 이론을 이용하여 反力 R 로부터 계산하였다⁽¹⁷⁾.

차량의 속도에 비례하는 車輪의 회전수를 1600rpm (차량속도 271km/hr)까지 증가시킴에 따라 固有振動數는 각 mode에서 1~1.5Hz 정도 증가하였고, 反力

Table 1 Natural frequencies when $\Omega=0$ rpm

n	R		0	30	90	150	210	270	330
	s								
0	0		1534.9	1533.7	1532.8	1532.1	1531.2	1530.6	1529.1
	1		12270.6	12203.4	12133.9	12093.5	12059.5	11954.9	11924.2
	2		114899.4	114801.5	114711.5	114682.6	114682.6	114361.6	114358.3
1	0		1144.7	1144.1	1143.3	1142.2	1141.5	1140.1	1139.3
	1		15452.5	15346.7	15393.7	15322.5	15295.1	15223.3	15186.3
	2		116222.3	116021.3	116010.4	115997.8	115976.1	115732.2	115712.8
2	0		2778.6	2777.8	2777.1	2776.4	2775.1	2774.4	2772.8
	1		22272.6	22326.9	22327.9	22282.7	22252.6	22230.5	22131.7
	2		120576.2	120837.1	120806.8	120796.3	120654.7	120571.0	120236.5
3	0		7205.1	7203.5	7202.4	7201.8	7201.4	7200.3	7199.0
	1		30119.8	30195.1	29927.6	30020.3	30063.7	30118.9	30039.7
	2		128431.6	128596.9	127974.2	128198.0	128330.4	128435.6	128295.7
4	0		13564.2	13563.1	13562.5	13562.0	13561.7	13560.2	13559.8
	1		37864.7	37942.9	37840.4	37965.8	37978.5	37952.4	37960.5
	2		138677.3	138819.7	138639.0	138892.2	138914.5	138881.2	138850.6
5	0		21739.0	21738.4	21736.5	21736.0	21735.1	21734.5	21732.8
	1		46175.8	46220.3	46104.6	46093.2	46004.3	45886.5	45847.2
	2		152479.2	152551.4	152372.5	152316.3	152229.1	152040.1	151892.6
6	0		31699.5	31698.1	31696.9	31695.2	31693.6	31691.7	31690.3
	1		55861.9	55698.3	55544.1	55265.0	55091.7	55025.9	54940.3
	2		169336.0	169123.2	168919.4	168533.7	168308.9	168221.1	168111.6

Table 2 Natural frequencies when $\Omega=800$ rpm

n	R		0	30	90	150	210	270	330
	s								
0	0		1535.6	1534.4	1533.7	1532.5	1531.9	1531.4	1530.1
	1		12279.1	12213.2	12141.8	12100.7	12068.5	11965.2	11933.5
	2		114908.3	114821.8	114720.9	114696.4	114648.2	114375.1	114374.6
1	0		1145.0	1144.7	1143.8	1143.0	1142.4	1140.0	1140.3
	1		15459.8	15447.4	15405.1	15330.2	15302.1	15233.6	15193.9
	2		116240.1	116039.1	116027.3	116018.3	115992.4	115746.7	115728.6
2	0		2779.2	2778.6	2778.1	2776.9	2776.1	2774.9	2773.5
	1		22280.6	22336.4	22336.5	22290.6	22258.9	22239.6	22138.8
	2		120593.6	120850.6	120823.9	120812.4	120669.8	120589.1	120251.2
3	0		7205.6	7204.1	7202.9	7202.4	7101.9	7200.8	7199.8
	1		30127.5	30203.6	29940.1	30026.1	30072.4	30128.6	30048.2
	2		128446.2	128614.2	127990.6	128216.3	128344.5	128451.3	128316.1
4	0		13564.7	13564.0	13562.9	13562.3	13562.0	13560.8	13560.4
	1		37873.6	37952.6	37849.6	37975.1	37986.2	37962.1	37969.7
	2		138693.3	138836.1	138657.6	138914.6	138936.1	138900.5	138870.4

5	0	21739.5	21738.9	21737.2	21737.0	21735.8	21735.2	21733.3
	1	46183.7	46230.2	46113.4	46104.2	46013.6	45896.3	45856.2
	2	152495.3	152569.4	152389.2	152331.8	152245.3	152056.1	151908.6
6	0	31700.6	31698.9	31697.6	31695.8	31694.4	31693.3	31692.0
	1	55869.3	55707.2	55554.1	55265.6	55099.2	55034.6	54949.6
	2	169349.8	169140.3	168931.6	168539.6	168325.6	168232.1	168129.4

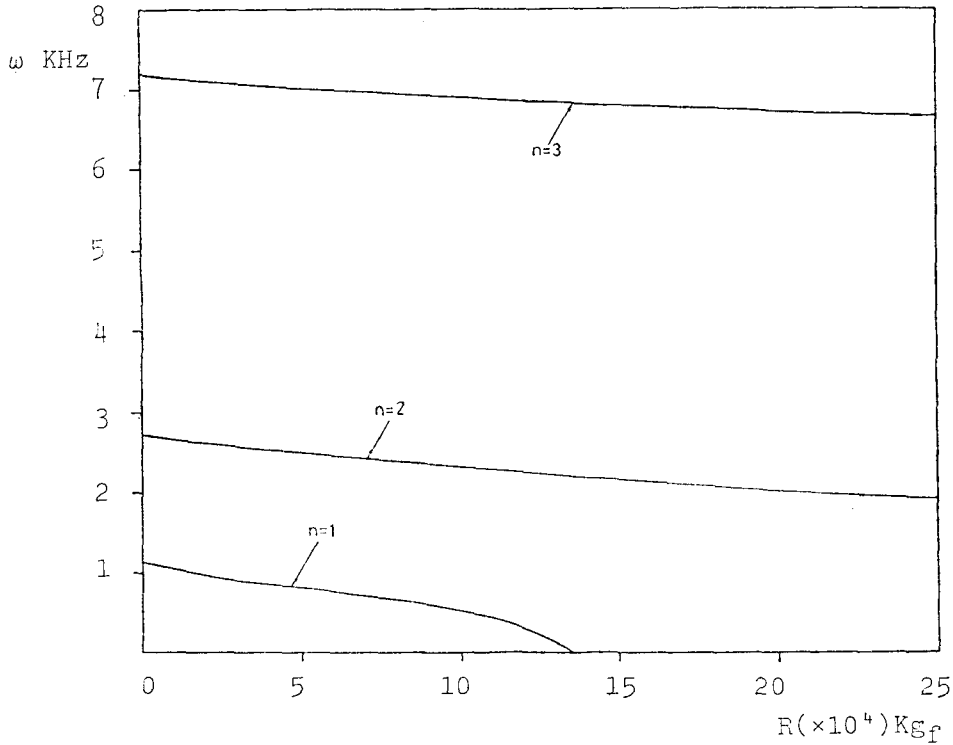


Fig. 3 Variation of buckling load versus frequency with n

Table 3 Natural frequencies when $Q=1600$ rpm

n	s	R						
		0	30	90	150	210	270	330
0	0	1536.4	1535.2	1534.5	1533.2	1532.3	1532.0	1531.3
	1	12289.2	12222.3	12149.3	12109.5	12076.4	11974.2	11944.3
	2	114926.5	114838.6	114736.9	114712.7	114663.8	114394.6	114390.8
1	0	1145.7	1145.6	1144.7	1143.7	1142.9	1141.4	1140.9
	1	15468.4	15456.3	15415.6	15340.1	15314.3	15242.4	15202.3
	2	116257.6	116056.3	116044.2	116036.7	116007.2	115766.1	115741.8
2	0	2779.4	2779.2	2778.8	2777.7	2776.9	2775.4	2774.4
	1	22290.3	22343.8	22348.2	22300.1	22268.6	22248.1	22148.2
	2	120607.4	120875.4	120849.6	120828.5	120688.4	120602.4	120271.3

3	0	7205.9	7204.9	7203.3	7203.2	7102.4	7201.1	7200.4
	1	30136.2	30216.4	29950.5	30035.6	30079.6	30138.6	30061.3
	2	128460.1	128636.1	128004.3	128230.1	128360.9	128472.3	128331.6
4	0	13565.3	13564.6	13563.1	13562.8	13562.4	13561.7	13560.7
	1	37880.1	37964.1	37858.4	37984.6	37997.7	37972.2	37979.2
	2	138712.5	138850.5	138671.9	138932.1	138956.1	138913.6	138884.3
5	0	21740.3	21739.5	21737.7	21736.8	21736.5	21736.0	21734.3
	1	46194.5	46240.5	46124.3	46113.7	46023.2	45902.1	45864.7
	2	152511.7	152886.3	152407.4	152352.9	152267.3	152073.6	151923.1
6	0	31670.9	31669.9	31698.7	31697.0	31695.3	31694.1	31693.2
	1	55880.2	55715.8	55563.1	55272.4	55107.1	55045.2	54959.7
	2	169364.7	169159.6	168955.4	168550.6	168340.9	168249.6	168236.4

R을 330kgf 까지 증가시킴에 따라 固有振動數는 5~10Hz 정도 감소하였다. 臨界座屈荷重은 $n=1$ 에서 $R=134650\text{kgf}$ 가 되었다.

4. 實驗 및 考察

4.1 實驗裝置

Fig. 4 에 보이는 것이 실험에 사용한 車輪의 連成振動裝置이다. 바닥에는 防振을 위하여 콘크리트 구조물을 설치한 후 두께 10mm의 고무판을 깔았고, 3 단계로 나누어진 장치의 하부에는 鐵路의 加振을 고려하여 캠 구동장치를 설치하였다. 중앙부에는 鐵路를 형상화하여 두께 20mm의 平板위에 外徑 35mm, 두께 10mm

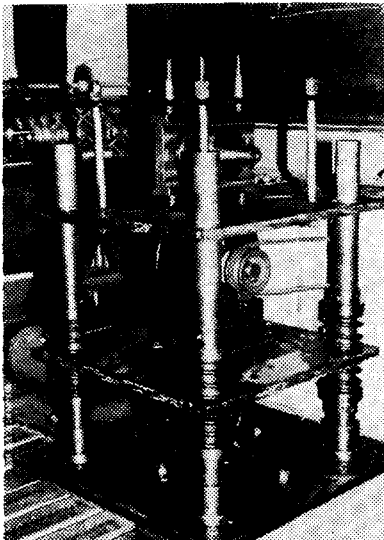


Fig. 4 Experimental apparatus

의 圓板을 장치하여 그 회전축을 連成振動裝置와 분리하여 설치한 D.C $\frac{1}{2}$ HP 변속모터와 A형 V벨트 2개로 연결하였다. 상부에는 두께 20mm의 平板위에 Fig. 1 과 같이 車輪을 형상화한 계단진 두께를 갖는 環形圓板을 설치하였다. 反力을 변화시키기 위하여 車輪을 지지하는 平板위에 直徑 20mm의 기둥을 4개 세우고 그 위에 두께 10mm의 平板을 얹었다. 車輪과 環形圓板으로 형상화한 鐵路는 內徑이 35mm인 볼 베어링(KBC 6307Z)과 베어링 덮개로 지지하였으며 각 부는 直徑 50mm의 원기둥 4개를 따라 上下運動만 가능하게 하였다. 圓板들은 구조용강으로 가공한 후 고주파 표면처리를 하여 硬度를 높이고 원통연삭으로 표면을 다듬었다. 車輪의 베어링 덮개 연결봉에는 스프링(Sup 7)을 설치하여 車輪과 鐵路間의 접촉을 원활하게 하였으며 Fig. 5에서 처럼 車輪이 구르는 경우와 구르지 않는 경우로 구분하여 실험하였다.

4.2 實驗結果

荷重이 없고 구르지 않는 상태의 車輪에 대한 振動數 분포는 Fig. 6에서처럼 1050, 1200, 1750, 2650, 6300, 11350, 17250(Hz)가 되어 理論値와 약간의 오차를 발생하는데, 이것은 內平面 應力을 받는 環形圓板을 解析하기 위하여 두꺼운 림 부분을 얇은 平板理論에다 적용하였기 때문이며 Mindlin 平板理論에 적용하게 되면 오차를 2% 이내로 줄일 수 있다⁽¹⁶⁾. 1750 Hz의 振動數는 車輪의 내원주에 결합된 회전축에서 발생하는 것으로 저차진동에서는 회전축의 영향을 크게 받는 것으로 생각된다. 圓板으로 형상화한 鐵路의 振動數 분포는 473, 680, 1385, 2450, 3675, 5150(Hz)가 되었다.

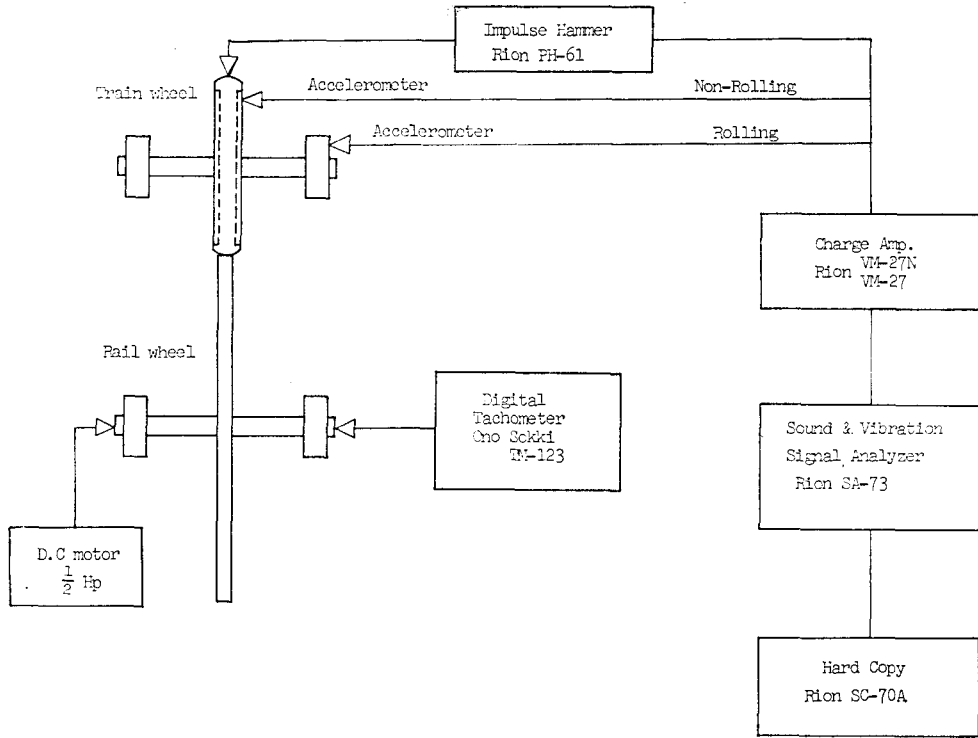


Fig. 5 Block diagram of measuring system

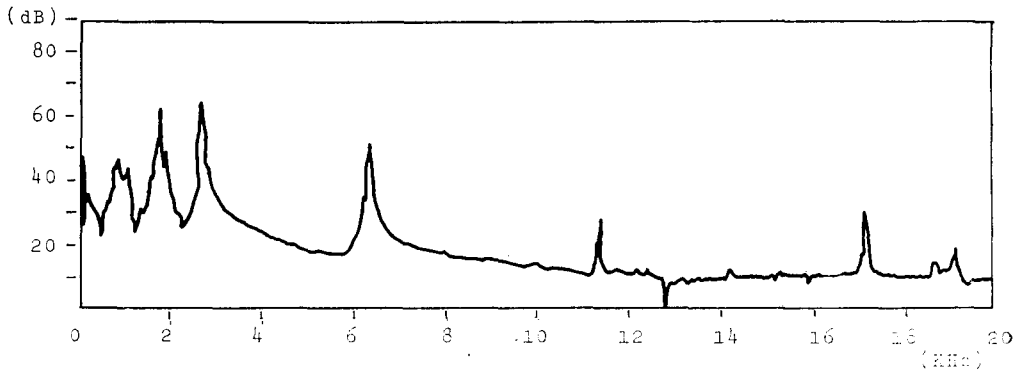


Fig. 6 Frequency distributions of vibrational acceleration of the stationary separated train wheel

Fig. 7 은 $R=30\text{kgf}$ 일 때의 振動數 분포인데 車輪의 회전수를 400, 800, 1200(rpm)으로 변화시킬 때 振動數는 거의 변화가 없으나 가속도 레벨은 약 3~15dB 정도 높아진다. Fig. 8 은 $R=90\text{kgf}$ 일 때인데 역시 振動數 변화는 거의 없지만 가속도 레벨은 약 5~18dB 정도 높아지고 있다. Fig. 7 의 (a)와 Fig. 8 의 (a)를

비교하면 荷重을 증가시키기에 의하여 振動數는 미소하게 감소함을 알 수 있다. 荷重을 받으며 구르는 상태의 振動數 분포가 Fig. 6 에 비하여 다소 차이가 생기는 것은 裝置를 垂直으로 설치하기 위해서 첨가된 원기둥, 平板들 그리고 두꺼운 베어링 덮개들에 의한 구조물의 복합진동으로 인한 것이라고 생각된다.

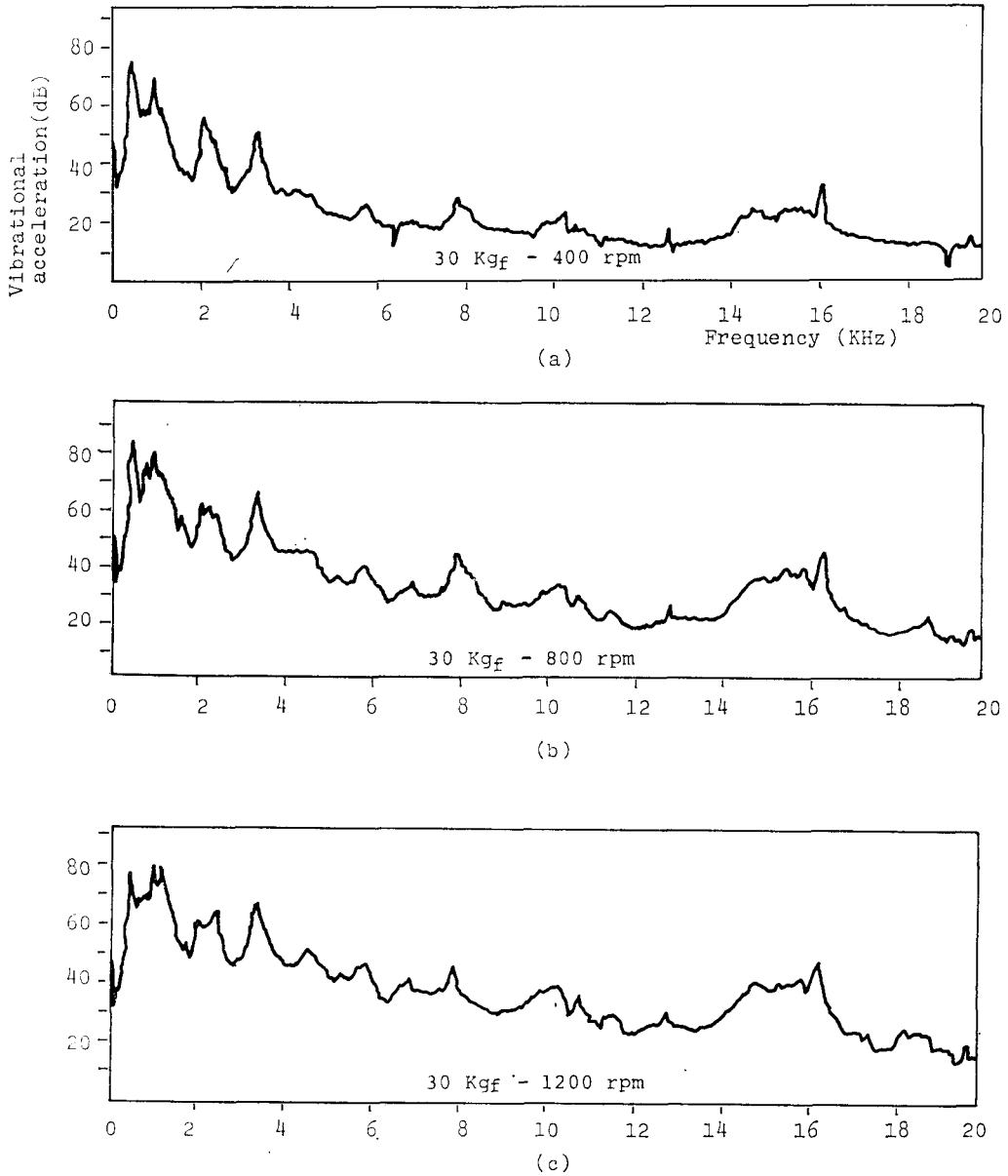


Fig. 7 Frequency distributions of the vibrational acceleration when $R=30$ kgf.
 (a) $\Omega=400$ rpm; (b) $\Omega=800$ rpm; (c) $\Omega=1200$ rpm

5. 結 論

고속차량의 정상적인 주행시에 車輪과 鐵路의 구름 조건에 따라 변하는 反力を 外圓周土에 均일하게 分布된 內平面 壓縮應力으로 유도하고 차량의 速度에 비례하는 車輪의 회전수를 고려하여 계단진 두계를 갖는

車輪의 橫振動을 解析하고 實驗해 본 결과 다음과 같은 結論들을 얻었다.

(1) 車輪의 회전수를 1600rpm(차량속도 271km/hr) 까지 증가시킬 때 振動數는 各各의 mode에서 1~1.5 Hz 정도 증가하지만 加速度레벨은 약 15dB 정도 증가하게 되므로 차량의 騒音問題는 차량속도의 증가에 의하여 큰 영향을 받게 됨을 알 수 있다.

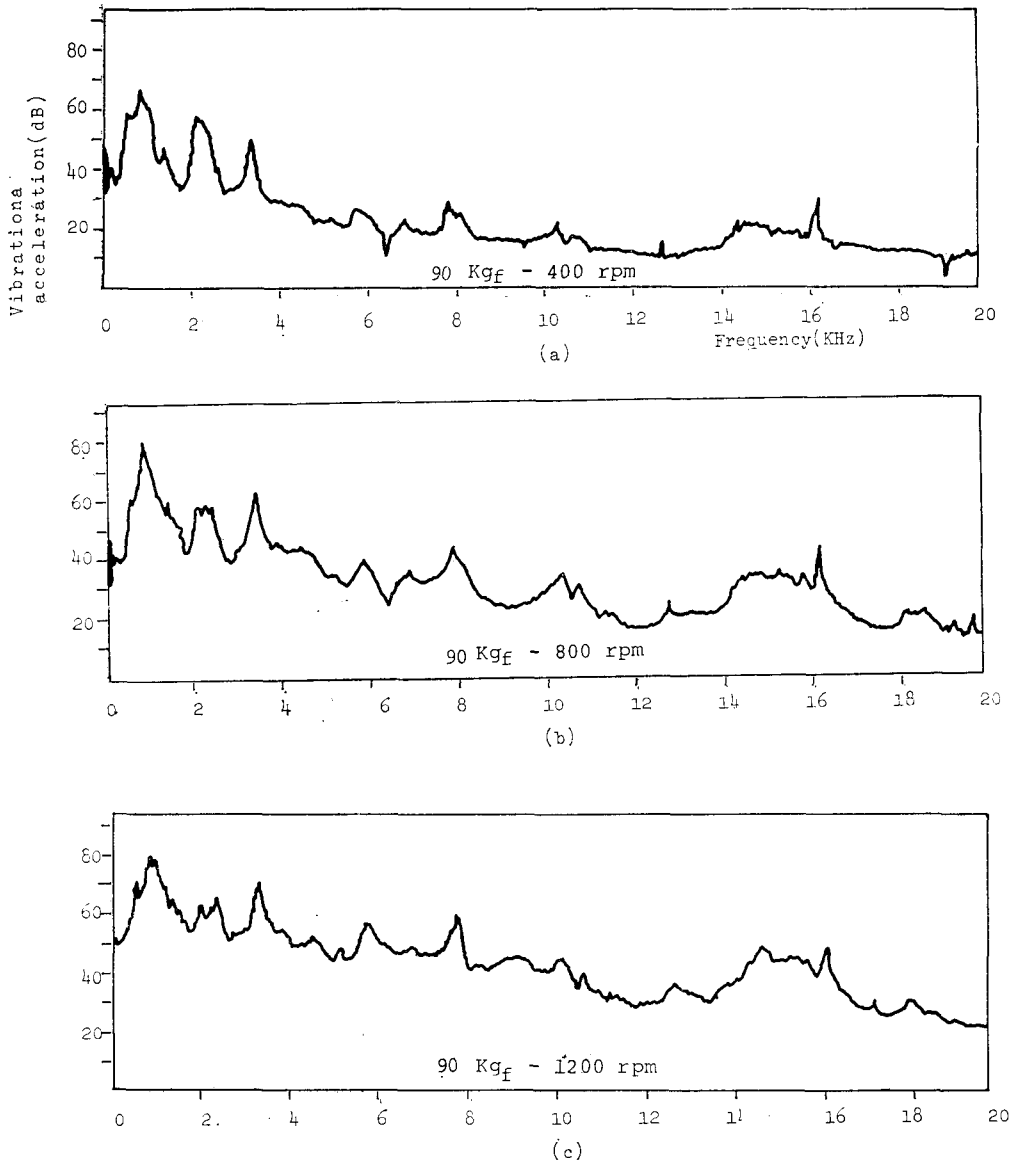


Fig. 8 Frequency distributions of the vibrational acceleration when $R=90$ kgf.

(a) $\Omega=400$ rpm; (b) $\Omega=800$ rpm; (c) $\Omega=1200$ rpm

(2) 車輪과 鐵路의 구름조건에 따라 변하는 反力を 증가시키면 振動數는 감소하게 되며, 1/6 크기의 車輪에서 $R=330$ kgf 까지 증가시킬 때 各 mode의 振動數는 5~10Hz 정도 감소한다. 그리고 臨界座屈荷重은 $n=1$ 에서 $R_{cr}=134650$ kgf가 됨을 알 수 있다.

(3) 車輪設計의 자료가 되는 웨브와 립 사이의 境界

面 應力 σ_r 를 연속조건을 이용하여 해석하였다.

(4) ν , $\frac{h_2}{h_1}$ 그리고 c 의 값을 적절히 조합하여 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하면 車輪設計의 參考가 되는 振動數 解析을 할 수 있다.

參 考 文 獻

- (1) P.J. Remington, "Wheel/Rail Noise-Part I : Characterization of the Wheel/Rail Dynamic System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 46, No. 3, pp. 359~379, 1976
- (2) M.J. Rudd, "Wheel/Rail Noise-Part II : Wheel Squeal", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 46, No. 3, pp. 381~394, 1976
- (3) P.J. Remington, "Wheel/Rail Noise-Part IV : Rolling Noise", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 46, No. 3, pp. 419~436, 1976
- (4) A.W. Leissa, "Vibrations Plates", NASA SP-160, 1960
- (5) A.W. Leissa, "Recent Research in Plate Vibrations, 1973~1976 : Classical Theory", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 9, pp. 13~34, 1977
- (6) A.W. Leissa, "Plate Vibration Research, 1976~1980 : Complicated Effects", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, pp. 19~36, 1981
- (7) R.V. Southwell, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at its Center", *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 101, p. 133, 1922
- (8) P.N. Raju, "Vibrations of Annular Plates", *Journal of the Aeronautical Society of India*, Vol. 14, p. 37, 1962
- (9) S.M. Vogel and D.W. Skinner, "Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates", *Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 926~931, 1965
- (10) J. Prescott, "Applied Elasticity", Dover Publications, Inc., 1961
- (11) H.C. Loh and J.F. Carney III, "Vibrations and Stability of Spinning Annular Plates Reinforced with Edge Beams", *Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, pp. 499~501, 1979
- (12) A. Losen and A. Libai, "Transverse Vibrations of Compressed Annular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 40, pp. 149~153, 1975
- (13) G.K. Ramaiah, "Flexular Vibration of Annular Plates under Uniform In-Plane Compressive Stress", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, pp. 11~131, 1980
- (14) G.K. Ramaiah, "Flexular Vibrations and Elastic Stability of Annular Plates under Uniform In-Plane Tensile Forces along the Inner Edge", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, pp. 11~23, 1980
- (15) W.E. Red, "Examination of the Response of a Flexible Circular Rotor Subjected to Specified Gyroscopic Rates", *Trans. of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 1297~1306, Nov. 1974
- (16) S. Sato and H. Matsuhisa, "Study on the Mechanism of Train Noise and its Countermeasure Part III", *Bulletin of JSME*, Vol. 24, No. 191, pp. 849~853, 1981
- (17) 金光植, 朴政泰, "車輪과 鐵路의 連成振動에 관한 研究 : 車輪의 動特性," 漢陽大學校 産業科學 論文集, No. 23, 1986
- (18) G.K. Ramaiah and K. Vijayakumar, "Buckling of Polar Orthotropic Annular Plates under Uniform Internal Pressure", *Journal of AIAA*, Vol. 12, pp. 1045~1050, 1974
- (19) S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, Inc., 3rd Ed., 1970
- (20) A.C. Ugural and S.K. Fenster, "Advanced Strength and Applied Elasticity", Elsevier North Holland, Inc., 1981