

<論 文>

갑자기 출발하는 가열된 원통 주위의 비정상 층류  
경계층 유동에 관한 수치적 연구

김 재 수\* · 장 근 식\*\*

(1986년 10월 20일 접수)

Unsteady Laminar Boundary Layer over a Heated Circular  
Cylinder Started Impulsively from Rest

Jae-Soo Kim and Keun-Shik Chang

**Key Words:** Unsteady Laminar Boundary Layer(비정상 층류 경계층), Thermal Effect(온도영향), Singularity(특이점), Non-Iterative Finite Difference Method(비축차적 유한차분법)

Abstract

A numerical method is presented which can solve the unsteady momentum and thermal boundary layers, coupled through the agency of buoyancy force, over a heated circular cylinder impulsively started from rest. By linearizing the nonlinear finite difference equations without sacrificing accuracy, numerical solutions are obtained at each time step without iteration. To get rid of the requirement of excessive number of grid points in the region of reversed flow, special form of transformed variables are used, by which the computational boundary layer thickness is maintained almost constant. These numerical properties enable the method to easily handle the region of reversed flow and how the singularity develops in the interior of the boundary layer. In order to investigated the thermal effects on the skin friction, heat flux, displacement thickness and on the separation, we have successfully solved three different cases of the buoyancy parameter  $\alpha(=Gr/Re^2)$ .

기 호 설 명

$Cp$  : 정압비열

$f$  : 무차원 유동함수

$g$  : 무차원 온도,  $(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$

$\hat{g}$  : 중력 가속도

$Gr$  : Grashof 수,  $\hat{g}\beta Lc^2 Tc/\nu^2$

$\kappa$  : 열전달율

$Lc$  : 특성 길이,  $\pi R$

$Pr$  : Prandtl 수,  $\mu Cp/\kappa=1.0$

$R$  : 반지름

$Re$  : Reynolds 수,  $UeLc/\nu$

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

- $T$  : 무차원 온도,  $T^*/T_c$
- $T^*$  : 온도
- $t$  : 무차원 시간,  $t^*/t_c$
- $T_c$  : 특성 온도,  $T_w^* - T_\infty^*$
- $t_c$  : 특성 시간,  $L_c/U_c$
- $u$  : 무차원 흐름방향 속도,  $u^*/U_c$
- $u^*$  : 흐름방향 속도
- $U_c$  : 특성 속도,  $2\pi U_\infty^*$
- $U_e$  : 국소 자유흐름 속도,  $\frac{1}{\pi} \sin \pi x$
- $U_\infty^*$  : 자유흐름 속도
- $v$  : 무차원 수직방향 속도,  $v^* \sqrt{Re}/U_c$
- $v^*$  : 수직방향 속도
- $X$  : 무차원 흐름방향 좌표축  $X^*/\pi R$
- $X^*$  : 흐름방향 좌표축
- $y$  : 무차원 수직방향 좌표축,  $y^* \sqrt{Re}/\pi R$
- $y^*$  : 수직방향 좌표축
- $\alpha$  : 무차원 매개변수,  $Gr/Re^2$
- $\beta$  : 체적팽창계수
- $\eta$  : 무차원 길이변수
- $\theta$  : 원통의 원주각
- $\mu$  : 점성계수
- $\nu$  : 동점성계수
- $\rho$  : 밀도
- $\tau$  : 무차원 시간,  $t/2$
- $\psi$  : 무차원 유동함수
- $\delta$  : 무차원 변위두께,  $\int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_e}) dy$

참 자

- $W$  : 벽면의 상태
- $\infty$  : 주위 유동의 상태
- $*$  : 차원 변수

1. 서 론

비정상 점성유동과 박리는, 양력면에서의 역동적실속(dynamic stall), 엔진압축기의 회전실속 등에 관련된 순간적인 출발과 진동, 그리고 이동하는 벽면문제 등으로 나뉘어 연구되어 왔다. 일반적으로, 이와 같은 비정상 유동에 관한 자세한 정보, 즉 표면마찰, 열전달량, 박리등을 알기 위해서는 포텐셜 유동 또는 준-정상(quasi-steady) 점성유동 모델로는 충분하지 못하므로, 비정상 경계층 또는 Navier-Stokes 방정식을 풀어야 한다.

본 논문에서는 중력방향에 수직한 가열된(또는 냉가

된) 원통이 정지상태에서 지구중력 방향으로 갑자기 출발할 때 원통 주위에 발생하는 비정상 층류 경계층의 성장과 박리, 그리고 이들에 대한 온도 및 부력의 영향을 연구할 수 있도록, 종래의 방법보다 더 효과적인 수치적 방법을 개발하고 그의 응용을 보였다. 온도 영향이 없는 이와 같은 유동에 대해서, Tellionis & Tsahalis<sup>(1)</sup>는 최초로 수치적인 계산을 수행하여 특이점이 앞정체점으로부터  $\theta=140^\circ$ 인 곳에서  $R/U_\infty^*$ 로 무차원화된 시간  $\tau$ 가 0.65일 때 발생한다고 보고하였다. Cebeci<sup>(2)</sup>는, 처음에는 이런 특이점이 시간  $\tau$ 가 1.0일 때까지 발생되지 않는 것을 보이고, 이 결과로부터 비정상 경계층 유동의 해는 그 경계층 두께가 뒷정체점 부근에서 시간이 지남에 따라 지수적으로 커질지라도, 유한한 시간에 대해서는 특이점, 즉 수치적 파괴가 나타나지 않는다고 주장하였다. 이와는 다르게 Van Dommelen & Shen<sup>(3)</sup>은 Lagrangian 좌표축을 이용하여, 시간  $\tau=1.5$ 일 때  $\theta=110^\circ$ 에서 특이점이 발생하는 것을 보였다. 후에 Cebeci<sup>(4)</sup>는 다시 1.0 이상의 시간에서 계산해 본 결과로, 경계층 변위두께에서 수치적인 험프(hump)가 발생하는 것을 발견하고, Van Dommelen & Shen<sup>(3)</sup>의 결과와 비교하여 이 험프를 특이점 또는 비정상 박리라고 정의하였다. Wang<sup>(5)</sup>도 한계유선이론(limiting streamline theory)을 이용하여 앞서의 결과들과 비슷한 특이점을 구하였다.

본 논문에서는, Eulerian 좌표축에서 온도 경계층과 혼합된 비정상 경계층 유동을 효과적으로 다룰 수 있는 좌표변환 방법과 수치해석 방법을 도입하였다. 이전의 수치적 방법들은 축차적이며, 뒷정체점 부근의 경계층 두께가 시간과 더불어 지수적으로 증가하므로, 격자점의 수를 경계층 두께의 증가에 따라 상당히 늘려 주어야 된다. 그러나 여기에서는, 격자점의 수를 무리하게 늘릴 필요가 없으며 일반적인 비선형 차분방정식을 정확도를 떨어뜨리지 않고 선형화시킴으로써 비축차적인 수치해들이 허용된다. 이런 선형화 방법은 Beam & Warming<sup>(7)</sup>에 의해 최초로 압축성 Navier-Stokes 방정식에 사용되었고; Orlandi & Ferziger<sup>(8)</sup>, Kim & Chang<sup>(9,10)</sup>에 의해 경계층 유동에 확장되었다. 또한 뒷정체점 부근에서 경계층 두께의 증가로 인한, 격자점 증가의 필요를 피하기 위하여, 몇 가지 서로 다른 종류의 변환변수들을 시간과 공간에 따라 선별적으로 사용하여 수치적인 경계층 두께가 거의 일정하도록 만들었다. 이와 같은 변환변수들은 또한 쌍-포물선형인 현 지배방정식의 초기조건들을 쉽게 구할 수 있도록 허용해 준다.

2. 지배방정식과 수치적 방법

원통이 정지상태에서 지구중력 방향으로 갑자기 출발하는 문제는, 유동이 지구중력과 반대 방향으로 갑자기 흐를 때의 정지된 원통 주위의 유동과 같다. Boussinesq 가정과 경계층 가정을 이용하면, 정지된 원통 주위의 비정상 유동의 무차원화된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = Ue \frac{\partial Ue}{\partial x} + \frac{Gr}{Re^2} (T - T_\infty) \sin \pi x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

경계조건은

$$y=0 ; u=0, v=0, T=T_w$$

$$y \rightarrow \infty ; u \rightarrow Ue, T \rightarrow T_\infty$$

지배방정식이 시간과  $x$ -좌표에 관한 쌍-포물선형(biparabolic) 방정식이므로 이들 변수에 관한 초기조건들이 필요하게 된다. 이에 관해서는 나중에 논의하기로 하겠다. 변환변수를 사용하는데 있어서, 시간에 따른 경계층 성장의 여러 가지 양상과, 뒷정체점 부근의 역류영역에서 지수적으로 증가하는 경계층 두께 때문에, Table 1에서 보인 바와 같은 세 종류의 변환들을 시간  $t$ 와  $x$ 의 위치에 따라 사용한다. 출발 초기에는 경계층이 급격히 성장하므로 이에 적합한 첫번째 변수를 사용하고, 어느정도 경계층이 성장한 후에는 일반적인 경계층 변환변수인 두번째 변수를 사용하고, 뒷정체점 부근에서 역류로 인하여 경계층이 지수적으로 증가할 때는 앞부분은 두번째 변수로, 뒷부분은 세번째 변수를 사용하므로써, 격자점의 수를 경계층의 성장과 관계없이 적은 수로 문제를 다룰 수 있다. 이와 같은 세 개의 변환변수들을 바꾸어 주는 시간  $t_1, t_2$ 와 위치  $x_1$ 은  $\alpha$  값과 역류영역등과 관련한 경계층의 성장을 보아 선택한다. 이에 관한 기본원리는 하나의 변환변수로 경계층 두께가 충분히 자라면 다음의 변환변수로 바꾸어 주는 데에 있어 그러나, 이 값들에 관한 다소의 변화가 계산 결과에 예민한 영향을 주지는 않는다.

세 개의 편미분 방정식 (1)~(3)을 Table 1의 변환 변수를 이용하여 변환시키면 아래와 같은 모델을 갖는 두 개의 편미분 방정식이 된다('은  $\eta$ 에 관한 미분을 나타냄).

Table 1 Transformed variables

	$\eta =$	$\phi =$	
$0 \leq t < t_1$	$\frac{1}{\sqrt{t}}y$	$\sqrt{t}Uef$	1st type
$t_1 \leq t < t_2$	$y$	$Uef$	2nd type
$t_2 \leq t$	$0 \leq x < x_1$	$Uef$	2nd type
	$x_1 \leq x \leq 1.0$	$e^{-t}y$	$Uee^{-t}f$

$$f''' + m_1 f f'' + m_2 f'^2 + m_3 \eta f''' + m_4 g + m_5 = m_6 \frac{\partial f'}{\partial t} + m_7 \left( f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \tag{4}$$

$$\frac{1}{Pr} g'' + m_1 f g' + m_3 \eta g' = m_6 \frac{\partial g}{\partial t} + m_7 \left( f' \frac{\partial g}{\partial x} - g' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \tag{5}$$

경계조건들은 다음과 같다.

$$\eta=0 ; f=0, f'=0, g=1$$

$$\eta \rightarrow \infty ; f' \rightarrow 1, g \rightarrow 0$$

식 (4)와 식 (5)에서 계수  $m_1, m_2, \dots, m_7$ 은 각각의 변환 변수에 의해서 결정되는  $x$ 와  $t$ 만의 함수로써 Table 2와 같이 주어진다. 또한  $f$ 와  $g$ 는 각각 Table 1과 기호설명에 주어지는 것과 같은 무차원 유동함수와 무차원 온도를 나타낸다.

시간에 대한 초기 조건으로서 방정식 (4)~(5)에  $t=0$ 을 대입하면 다음과 같은 상미분 방정식을 얻는다.

$$f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

$$\frac{1}{Pr} g'' + \frac{\eta}{2} g' = 0 \tag{6}$$

이 식들의 엄밀 해는 다음과 같다.

$$f = \eta \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2} \right) + 2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} \right) - 1 \right)$$

Table 2 Coefficients of transformed equations

	1st type	2nd type	3rd type
$m_1$	$t \frac{\partial Ue}{\partial x}$	$\frac{\partial Ue}{\partial x}$	$e^{2t} \frac{\partial Ue}{\partial x}$
$m_2$	$-t \frac{\partial Ue}{\partial x}$	$-\frac{\partial Ue}{\partial x}$	$-e^{2t} \frac{\partial Ue}{\partial x}$
$m_3$	$\frac{1}{2}$	0	$e^{2t}$
$m_4$	$\frac{t}{Ue} a \sin \pi x$	$\frac{\alpha}{Ue} \sin \pi x$	$\frac{\alpha e^{2t}}{Ue} \sin \pi x$
$m_5$	$t \frac{\partial Ue}{\partial x}$	$\frac{\partial Ue}{\partial x}$	$e^{2t} \frac{\partial Ue}{\partial x}$
$m_6$	$t$	1	$e^{2t}$
$m_7$	$t Ue$	$Ue$	$e^{2t} Ue$

$$\begin{aligned}
 f' &= \operatorname{erf} \frac{\eta}{2} \\
 f'' &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \\
 g &= \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{Pr}\right) \\
 g' &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pr} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4} Pr\right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

유동 방향에 대한 초기조건은, 변환된 방정식들에  $x=0.0$ 을 대입하여 비슷한 방법으로 얻은 단-포물선형 (mono-parabolic) 편미분 방정식으로부터 구한다.

변환된 식들을 유한차분식으로 변화시키기 전에, 먼저, 새로운 변수  $u, v, h$ 를 도입하여 미분 방정식의 계수 (order)를 낮추어, 5개의 1차 편미분 방정식으로 만든다(단,  $u, v, h$ 는 새로운 정의에 의해 사용됨).

$$f' = u \quad (8)$$

$$u' = v \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 v' + m_1 f v + m_2 u^2 + m_3 \eta v + m_4 g + m_5 \\
 = m_6 \frac{\partial u}{\partial t} + m_7 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$g' = h \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Pr} h' + m_1 h f + m_3 \eta h = m_6 \frac{\partial g}{\partial t} + m_7 \left( u \frac{\partial g}{\partial x} \right. \\
 \left. - h \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (12)
 \end{aligned}$$

경계조건은

$$\eta=0 ; f=0, u=0, g=1$$

$$\eta \rightarrow \infty ; u \rightarrow 1, g \rightarrow 0$$

방정식 (8)~(12)는 시간과  $x$  축에 대한 포물선형 편미분 방정식이므로 각 방향을 따라가며 계산을 동시에 수행하며, 그 순서는 중요하지 않다.

먼저, 시간에 대한 차분을 위하여 아래와 같은 증분량  $\Delta t$ 를 사용한다.

$$W^{n+1} = W^n + \Delta W^{n+1} \quad (13)$$

여기서,  $W$ 는  $f, u, v, g, h, t$ 를 나타낸다.

방정식들 중에 비선형항을 포함하고 시간에 대한 미분항이 있는 식 (10)과 (12)를 선형화 하기 위하여, Beam & Warming<sup>(7)</sup>의 방법을 따라 변수  $q$ (방정식에서  $v$  또는  $h$ 을 의미함)에 대한 차분 scheme을 아래와 같이 도입한다.

$$\begin{aligned}
 \Delta q^{n+1} &= \frac{\phi \Delta t^{n+1}}{1+\zeta} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta q^{n+1}) + \frac{\Delta t^{n+1}}{1+\zeta} \frac{\partial q^n}{\partial t} \\
 &+ \frac{\zeta}{1+\zeta} \Delta q^n + O\left[\left(\frac{1}{2}-\phi+\zeta\right)(\Delta t^{n+1})^2\right. \\
 &\left. + (\Delta t^{n+1})^3\right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

이 식을 방정식 (10)과 (12)에 대입하여 다음식을 얻

는다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta t^{n+1}}{1+\zeta} [\phi \Delta R^{n+1} + R^n] &= \Delta q^{n+1} - \frac{\zeta}{1+\zeta} \Delta q^n \\
 &+ O\left[\left(\frac{1}{2}-\phi+\zeta\right)(\Delta t^{n+1})^2\right. \\
 &\left. + (\Delta t^{n+1})^3\right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서,  $R$ 은  $\frac{\partial q}{\partial t}$ 에 대응하는 여러 항의 집단을 나타낸다.

이 식에서 두개의 매개변수  $\zeta$ 와  $\phi$ 의 선택에 의해 택할 수 있는 방법들 중에서,  $\zeta=1/2$ 과  $\phi=1$ 을 택하므로써, 시간에 대해 2차 정확성을 갖는 three point backward implicit finite difference scheme을 얻는다.  $\Delta R^{n+1}$ 에 포함된 비선형항은 Kim & Chang<sup>(9,10)</sup>과 같은 방법으로 정확성을 떨어뜨리지 않고 선형화시킨다.

공간에 대한 미분항을 차분시키는데에 벽면에 격자 점이 밀집되는 격자제를 사용한다.  $x$ 에 관한 미분항이 포함된 식 (10)과 (12)는, 후류의 영향이 없는 곳에서는 점  $(i-1/2, j-1/2)$ 에 대해 중앙차분을 한다. 후류의 영향이 있는 곳에서는 점  $(i, j-1/2)$ 에 대해서, 증분량에 관한  $x$  미분항은 후방차분을 하고, 나머지는 중앙차분을 한다. 이와 같은 방법은 zig-zag 형태의 방법<sup>(2,4,5)</sup>으로 후류의 영향을 고려하는 것보다 훨씬 간편하고 효과적이다.  $\eta$ 에 관한 미분만 있는 식 (8), (9), (11)은 점  $(i, j-1/2)$ 에 대해 중앙차분을 한다.

그 최종식들은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\Delta f_{ij} - \Delta f_{i,j-1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_j (\Delta u_{ij} + \Delta u_{i,j-1}) = a_i \quad (16)$$

$$\Delta u_{ij} - \Delta u_{i,j-1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_j (\Delta v_{ij} + \Delta v_{i,j-1}) = b_{j-1} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 (S_1)_i \Delta v_{ij} + (S_2)_i \Delta v_{i,j-1} + (S_3)_i \Delta f_{ij} + (S_4)_i \Delta f_{i,j-1} \\
 + (S_5)_i \Delta u_{ij} + (S_6)_i \Delta u_{i,j-1} + (S_7)_i \Delta g_{ij} \\
 + (S_8)_i \Delta g_{i,j-1} = C_i \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\Delta g_{ij} - \Delta g_{i,j-1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_j (\Delta h_{ij} + \Delta h_{i,j-1}) = d_{j-1} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 (p_1)_i \Delta h_{ij} + (p_2)_i \Delta h_{i,j-1} + (p_3)_i \Delta f_{ij} + (p_4)_i \Delta f_{i,j-1} \\
 + (p_5)_i \Delta g_{ij} + (p_6)_i \Delta g_{i,j-1} + (p_7)_i \Delta u_{ij} \\
 + (p_8)_i \Delta u_{i,j-1} + (p_9)_i \Delta v_{ij} + (p_{10})_i \Delta v_{i,j-1} \\
 = e_j \quad (20)
 \end{aligned}$$

이 유한차분식들에서 source term이나 계수인  $a, b, c, d, e, S, P$ 들은 이미 계산되어진 시간에서의 값들을 이용하고 있다. 이 식들을 합해서 쓰면 계수가  $5 \times 5$ 인 블록 세걸 대각선형인 행렬식 (block tri-diagonal matrix equations)이 되고, 이 식을 블록 소거법에 의해 푼다.

계산에서, 격자간격은  $\Delta x=0.025$  ( $\Delta \theta=4.5^\circ$ ),  $\Delta t=0.05$ ,  $\Delta \eta=0.0001 \sim 1.5$ 를 사용하였다. 뒷정체점 부근

의 역류영역에서 경계층 두께가 시간에 따라 지수적으로 증가하지만 현재의 변환 방법에서는 수치적인 경계층 두께가 거의 일정하므로  $\eta$  방향의 격자점 수는 추가적으로 증가시킬 필요가 없으며 약 50개 정도면 충분하다.

### 3. 결과 및 토론

#### 3.1 부력의 영향이 없는 경우(비정상 강제 대류)

벽면온도의 영향이 없을 때, 정지상태에서 출발한 원통 주위의 유동에 대해서, Navier-Stokes 방정식 또는 경계층 방정식을 사용하여 연구한 결과들이 Cebeci<sup>(2)</sup>의 논문에 잘 정리되어 있다. 여기서는 시간에 따라 표면 마찰이 영이 되는 위치, 경계층 변위두께(displacement thickness)의 분포, 시간에 따른 표면마찰, 특이점의 출현등에 관한 현재의 결과의 일부를 다른 논문들의 그것과 비교하였다.

뒷정체점에서 표면마찰이 0이 되는 시간  $\tau$ 는 본 논문의 계산에서 0.321이다. 이 결과는 참고문헌 (1)에서의  $\tau=0.35$ , 참고문헌 (2)에서의 0.32와 잘 부합된다. 시간에 따른 표면마찰이 영인 위치를 Fig. 1에 나타내었다. 부력매개변수 ( $=Gr/Re^2$ )가 영일 때, Cebeci<sup>(2)</sup>의 결과와 아주 잘 일치함을 볼 수 있다. Fig. 2에는 무차원 경계층 변위두께의 분포를  $\tau$ 와  $\theta$ 의 함수로 나타내어 Cebeci<sup>(2)</sup>와 Wang<sup>(5)</sup>의 결과와 비교하였다. 본 논문의 결과는 Wang<sup>(5)</sup>의 결과보다 Cebeci<sup>(2)</sup>의 결과에 좀 더 가까운데, 이는 Wang<sup>(5)</sup>의 경우에는 경계층 두께가 급격히 커지는 뒷정체점 부근에서 근사식을 사용했기 때문인 것으로 간주된다. 표면마찰에 대해 Fig. 3에 Cebeci<sup>(2)</sup>의 결과와 비교하여 그렸는데, 이 역시 잘 맞는 것을 볼 수 있다. 또한 그림으로부터 역류영역이 아닌 원통의 앞부분에서는 표면마찰이 정

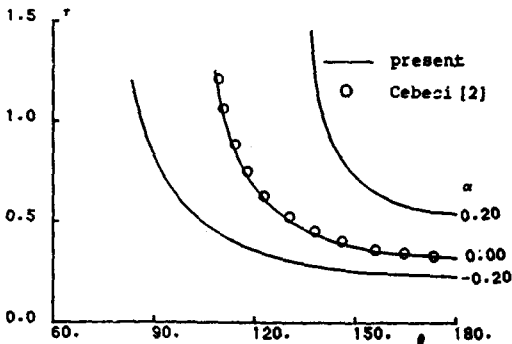


Fig. 1 Position of zero skin friction point

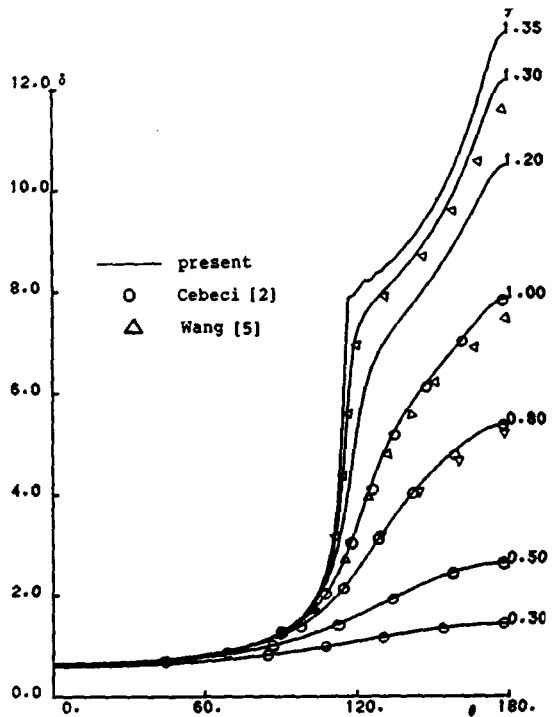


Fig. 2 Dimensionless displacement thickness for  $\alpha=0.0$

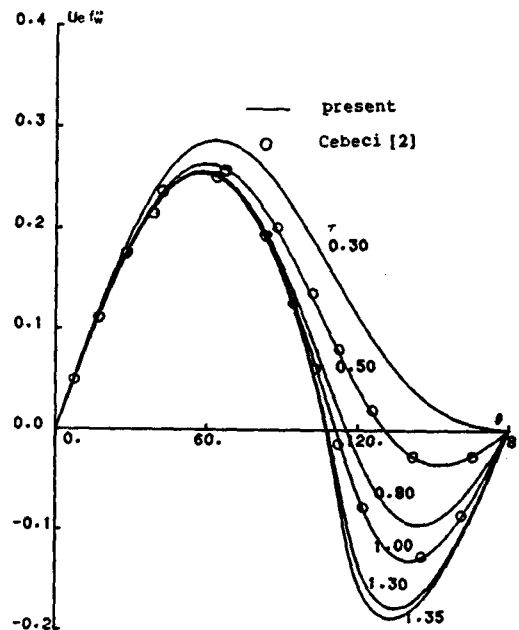


Fig. 3 Skin friction parameter for  $\alpha=0.0$

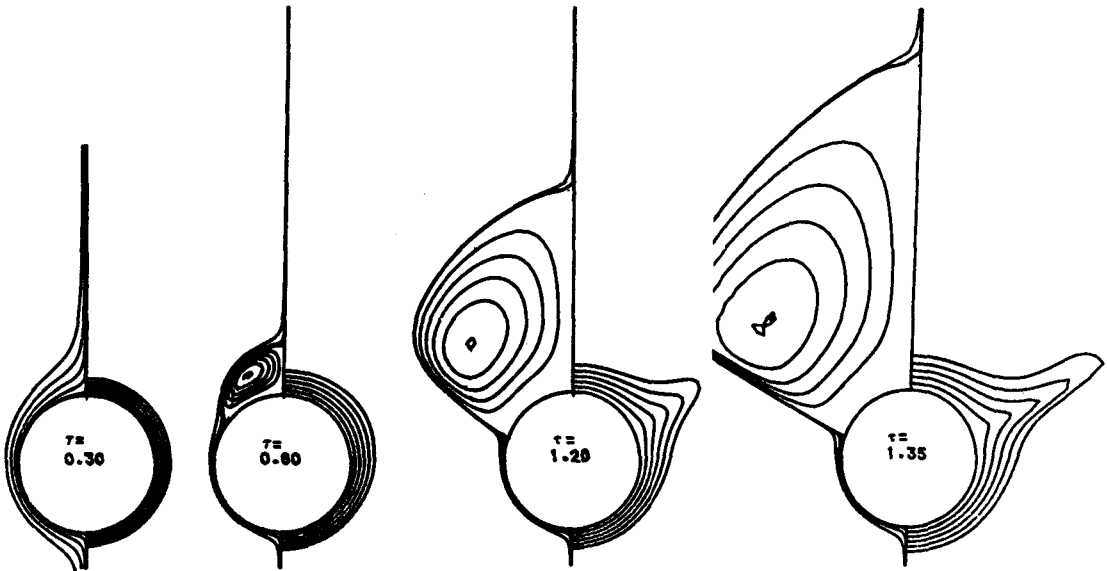


Fig. 4 Stream lines and iso-therms for  $\alpha=0.0$ (in the dimensionless  $(x, y)$  plane)

상상태에 급격히 수렴해 가지만, 역류영역인 뒷부분에서는 계속 감소하는 것을 볼 수 있다.

이 유동에 관한 특이점 발생, 즉 비정상 박리에 관한 최근의 연구 결과들을 보자. Van Dommelen & Shen<sup>(3)</sup>은 Lagrangian 좌표축을 이용하여 앞정체점으로부터  $\theta=110^\circ$  되는 곳에서, 시간  $\tau=1.50$  일 때 특이점이 발생한다고 지적하였다. Cebeci<sup>(4)</sup>는 수치 계산의 파괴와 비수렴성으로 인하여,  $\tau=1.5$ 에서의 경계층 변위두께가  $\tau=1.375$  일 때와 비교하여  $\theta=114.6^\circ$ 에서 갑자기 증가하는 것을 보였으며, 이와 같은 수치적인 험프(hump)를 특이점이라 정의하고, 이 결과를 Van Dommelen & Shen<sup>(3)</sup>과 비교하였다. Wang<sup>(5)</sup>도 경계층 변위두께에서 이와 비슷한 변화를 발견하고, 한계유선이론(limiting streamline theory)을 이용하여 특이점을 정의하였다. 경계층 변위두께의 분포를 나타낸 본 논문의 Fig. 2에서도  $\tau=1.35$ 의 경우 비슷한 현상이 나타남을 볼 수 있다.

경계층 변위두께의 험프로 나타나는 특이점이, 경계층 내에서 어떻게 발생하는가를 살펴 보자. Fig. 4의 원편에 시간  $\tau=0.3, 0.6, 1.2, 1.35$  일 때 각각의 유선들을 그렸다. 그림들로부터 수치적인 파괴가  $\tau=1.35$  일 때  $\theta=122^\circ$ 에서 와류의 중심으로부터 발생하는 것을 볼 수 있으며, 이 수치적인 파괴는 급격히 주위로 퍼진다. 따라서, 표면마찰은 내부의 특이점으로부터 벽면에까지 수치적인 파괴가 전파될 때까지 매끄러움을 유지하나, 경계층 변위두께에서는 험프가 발생하게

된다.

Fig. 4의 오른쪽의 등온선들은 온도 경계층이 발달하는가를 보여주고 있다. 온도 경계층의 두께는 표면마찰이 영이 되는 지점 근방에서 가장 크며,  $\theta$ 가 증가함에 따라 서서히 줄어든다. 그 이유는, 유선들의 그림에서 보는 것과 같이 표면마찰이 영인 점 근방에서 앞정체점과 뒷정체점으로부터 흘러온 유동이 변경방향으로 흘러가기 때문이다. 따라서, 열전달량은 역류가 발생하기 전에는,  $\theta$ 에 대해서 단조 감소하게되나, 역류가 발생한 후에는 표면마찰이 영인 점 근방에서부터  $\theta$ 와 더불어 다시 증가하기 시작한다. 이것은 유동이 앞정체점에서 뿐 아니라, 뒷정체점으로부터도

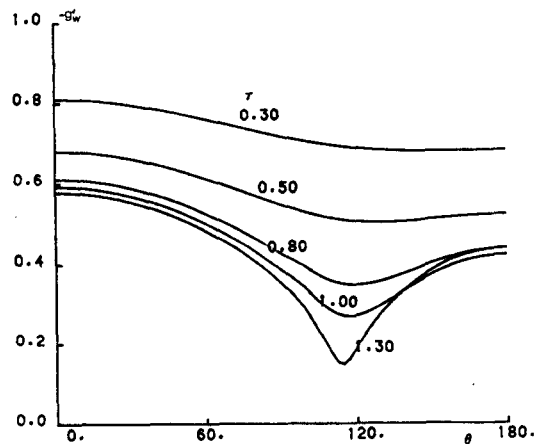


Fig. 5 Heat flux parameter for  $\alpha=0.0$

가열(또는 냉각)되어 오기 때문이다. 이런 이유로 Fig. 5에서 시간이 진행한 시점에서 보는 바와 같이 표면마찰이 영인 근방에서 열전달량이 최소가 된다. 그림에서 반지름 방향의 길이는 실제 길이가 아니고, 경계층 좌표축  $y$ 에 관해 그린 것이다.

3.2 부력의 영향이 있는 경우(비정상 혼합대류)

원통 주위에 발생하는 정상상태의 혼합대류 문제에 관한 결과가 Merkin<sup>(6)</sup>에 주어져 있다. 이를, 세가지 다른 부력매개변수의 값  $\alpha$ 에 대하여 본 논문에서 사용한 방법의 결과와 Fig. 6에서 비교하였다. 결과는 매우 잘 맞는 것을 알 수 있다. 또한 그림에서  $\alpha$ 가 양수일 때, 부력이 흐름을 도와주도록 작용하므로  $\alpha$ 가 영일 때와 비교하여 표면마찰과 열전달량이 증가되고, 음수인  $\alpha$ 에서는 그 반대가 됨을 볼 수 있다. 원통 주위의 비정상 유동에 대한 온도의 영향을 보기 위하여  $\alpha = -0.2, 0.0, 0.2$ 인 세 가지 경우에 대해서 계산하였다. 각각의 경우에 대한 특이점의 발생 위치와 시간을 Table 3에 나타냈다. Table 2로부터,  $\alpha$ 가 증가함에 따라 특이점의 발생 시간이 늦어지고 그 위치도 하류 방향으로 민감하게 물러서는 것을 볼 수 있다.

표면마찰이 영인 위치를 시간의 함수로 그린 Fig. 1로부터, 역류가 발생하는 시간이  $\alpha$ 에 의해 크게 영향을 받으며, 더 큰  $\alpha$ 에서는 역류가 늦게 발생하여 정상상태에 더 빨리 수렴하는 것을 알 수 있다. 정상상

Table 3 Positions and times of the singularities

$\alpha$	-0.2	0	0.2
Time( $\tau$ )	1.125	1.325	1.450
Angle( $\theta$ )	114°	122°	144°

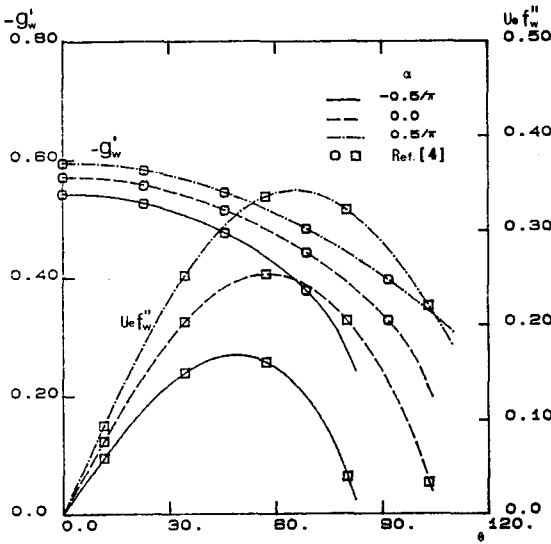


Fig. 6 Skin friction and heat flux parameter of the steady state

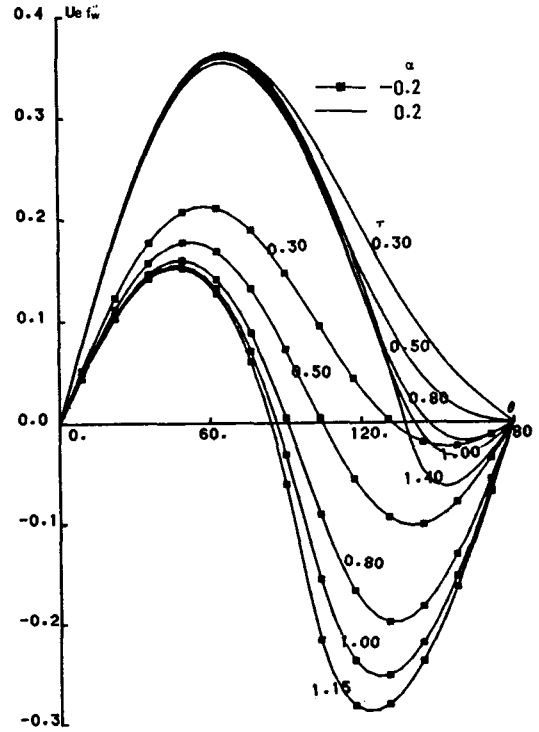


Fig. 7 Skin friction parameter

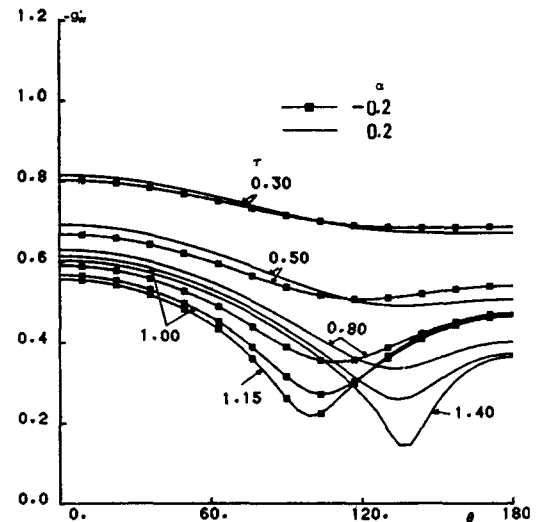


Fig. 8 Heat flux parameter

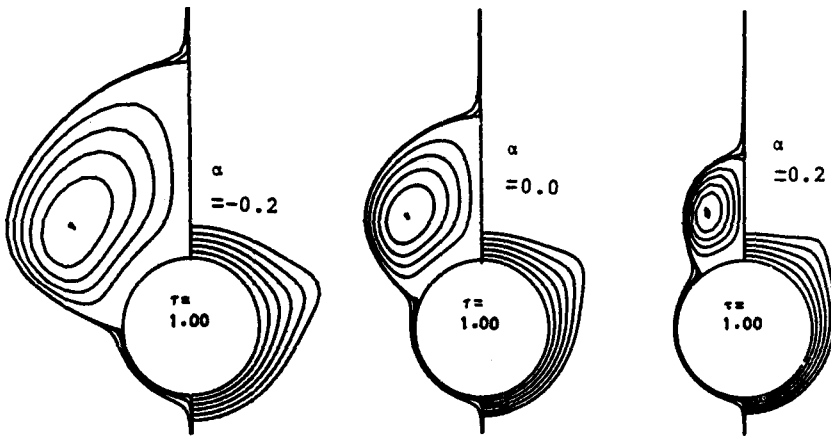


Fig. 9 Stream lines and iso-therms

태에서 표면마찰이 영인 위치도 훨씬 하류 쪽에 나타난다. Fig. 7에 표면마찰의 분포를  $\alpha, \beta, \tau$ 의 함수로 그렸다. 그림으로부터 가열된 원통이 냉각된 원통보다 표면마찰이 큰 것을 알 수 있는데, 이는 정상상태에서와 같이 가열된 벽면이 유동을 연직상부 방향으로 흐르도록 도와주기 때문이다. Fig. 8에는, 열전달량을  $\alpha, \beta, \tau$ 의 함수로 그렸다. 원통의 앞부분에서는, 작은  $\alpha$ 일 때 열전달 계수가 더 작으나, 뒷부분에서는 그 반대가 된다. 그 이유는 작은  $\alpha$ 일 때 역류영역이 크므로 경계층 밖에서 가열(또는 냉각)되지 않은 유체가 뒷정체점을 향해 흘러 내려오기 때문이다. 역류영역의 크기를 보기 위하여 Fig. 9에  $\tau$ 가 1.0일 때 각각의  $\alpha$ 에 대해서 유선들과 등온선들을 그렸다. 그림들에서 작은  $\alpha$ 일 때 역류영역이 훨씬 큰 것을 알 수 있으며, 따라서 벽면 온도의 영향을 덜 받은 유체가 뒷정체점을 향하여 내려오므로 Fig. 8에서와 같은 열전달량 분포를 갖게 되는 것이다.

#### 4. 결 론

온도효과를 수반하는 강제 혹은 혼합대류에 관한 비정상 층류 경계층 유동을 다루는 효과적인 수치방법을 개발하였다. 경계층 유동을 다루는 대표적인 축차적 방법인 Cebeci<sup>(3,4)</sup>의 방법과 본 논문의 방법과 수치적 효과에 관해서 비교하여 보았다. 문제와 사용하는 컴퓨터가 조금씩 다르므로 구체적인 시간등을 비교할 수는 없으나, 축차적인 방법이 매 타임스텝(time step)마다 최소한 3~5의 이상 축차를 시켜야 하므로 계산 시간도 그만큼 더 필요하다. 역류영역에서의 후류영향

도 지그재그 형태의 방법보다 본 방법에서 더 쉽게 고려해 줄 수 있다. 또한, 경계층 두께가 급격히 증가하는 뒷정체점 부근에 대해 상류와는 다른 특별한 변환 변수를 사용하여, 격자점 수를 다른 방법들에서 보다 1/3 이하로 줄임으로써, 그만큼 계산시간을 절약할 수 있다. 따라서, 최종 계산 시간은 상승 효과로 인하여 10 배 이상 빠르게 된다. 이와 같은 방법으로 경계층 안에서 특이점이 어떻게 발달하는가를 보였다. 또한 온도 경계층이 어떻게 발달하며, 표면마찰, 열전달량의 분포, 벽면의 온도가 특이점의 발생에 어떠한 영향을 미치는가를 고찰하였다.

#### 참 고 문 헌

- (1) D.P. Telliouis and D.T. Tsahalis, "Unsteady Laminar Separation over Cylinder Started Impulsively from Rest", Acta Astronautica, Vol. 1, p.1487, 1974
- (2) T. Cebeci, "The Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder Started Impulsively from Rest", J. of Comp. Phys., Vol. 31, pp.153~172, 1979
- (3) L.L. Van Dommelen and S.F. Shen, The Genesis of Separation, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, pp.293~311, Springer-Verlag, New York, 1982
- (4) T. Cebeci, Unsteady Separation, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, pp.265~278, Springer-Verlag, New York, 1982
- (5) K.C. Wang, On the Current Controversy about



- Unsteady Separation, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, pp. 279~291, Springer-Verlag, New York, 1982
- (6) J.H. Merkin, "Mixed Convection from a Horizontal Circular Cylinder", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 73~76, 1977
- (7) R.M. Beam and R.F. Warming, "An Implicit Factorized Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations", *AIAA J.*, Vol. 16, pp. 393~402, 1978
- (8) P. Orlandi and J.H. Ferziger, "Implicit Non-iterative Schemes for Unsteady Boundary Layers", *AIAA J.*, Vol. 16, pp. 1408~1414, 1981
- (9) J.S. Kim and K.S. Chang, "A Non-iterative Finite Difference Method for the Compressible Unsteady Laminar Boundary Layer", *AIAA J.*, Vol. 23, pp. 1826~1828, 1985
- (10) J.S. Kim and K.S. Chang, "Finite Difference Analysis of Unsteady Mixed Convection on Inclined Flat Plate", *Numerical Methods in Thermal Problems, Proceedings of the fourth International Conference held in Swansea, U.K.*, Vol. 4, pp. 525~536, 1985
- (11) A.J. Robins and J.A. Howarth, "Boundary Layer Development at a two dimensional Rear Stagnation Point", *J. of Fluid Mech.*, Vol. 56, pp. 161~171, 1972