

<論 文>

비보존 탄성계의 파라미터 불안정

박 영 필* · 노 광 춘**

(1986년 10월 7일 접수)

Parametric Instability of the Nonconservative Elastic System

Young-Pil Park and Kwang Choon Ro

Key Words: Nonconservative(비보존), Parametric Instability(파라미터 불안정), Follower Force(종동력), Elastic System(탄성계), Instability Region(불안정 영역)

Abstract

The parametric instability of the cantilever beam carrying two concentrated masses subjected to a periodic follower force is investigated theoretically and experimentally. The effects of the constant follower force and the periodic follower force the mass ratio and the location of the concentrated mass on the parametric instability of the system are discussed.

In experiment, the nonconservative follower force is produced by the magnetic force of the electromagnet.

The theoretical and the experimental results on the parametric instability are in good agreement each other.

기 호 설 명

E : 보의 탄성계수
 I : 보의 관성 모우멘트
 i : 허수부
 K : 스프링 상수
 L : 보의 길이
 l_i : 집중 질량의 위치
 M_i : 집중질량
 m : 보의 단위 길이당 질량
 P : 종동력 ($=P_0 + P_1 \cos \Omega t$)

P_0 : 종동력의 일정부
 P_1 : 종동력의 주기부
 u : 보의 변위
 x : 공간 좌표
 t : 시간
 $\delta(x)$: Dirac 델타 함수
 δ_{ij} : Kroneker's delta
 $\phi_j(x)$: 좌표 함수
 η_k : 일반화된 좌표
 λ_j : 보의 j 번째 고유치 (무부하 상태)
 Ω : 주기함수의 주파수

* 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

** 정회원, 연세대학교 대학원, 현재 삼성종합기술원

1. 서 론

수직 지각운동하의 구조물, 파라미터 가진(parametric excitation)을 받는 구조요소, 전방비행 중의 헬리콥터 날개, 주기적으로 변하는 중력장내의 회전위성, 액체 유동의 콘테이너, 맥동유체가 흐르는 파이프, 맥동추진력을 받는 미사일 등은 운전중 주기적인 하중을 받는다. 이러한 계는 운전중 외력, 토오크 및 관성과 같은 계의 매개변수의 변화에 따라 파라미터 진동(parametric vibration)을 야기시키며, 매개변수의 주파수와 계의 고유진동수의 관계에 따라 파라미터 공진(parametric resonance)을 일으킨다. 이러한 현상을 파라미터 불안정(parametric instability)이라 하며 공학에 있어서 매우 중요한 문제의 하나로써 많은 연구가 이루어져 왔다.

보에 있어서 이러한 문제에 대한 연구는 1924년 Beliaev⁽¹⁾가 양단이 핀으로 지지된 보의 파라미터 불안정에 대해 계의 지배방정식을 Mathieu-Hill 방정식으로 유도하여 해석하였으며, 그 후 많은 연구가 진행되었다.⁽²⁻⁵⁾ 이러한 문제들은 계의 운동방정식이 주기적인 계수를 갖는 2계 선형미분방정식으로 유도된다. 따라서, 주기적인 계수를 갖는 2계 미분방정식에 대한 많은 연구가 진행되었다.⁽⁶⁻⁸⁾

이러한 연구들 가운데 비보존 탄성계에 대한 파라미터 불안정 문제도 비보존계의 탄성안정성 연구와 더불어 시작되었다. Beal⁽⁹⁾은 방향이 제어되는 맥동추진력을 받는 미사일을 양단이 자유인 보로 이상화하여 Galerkin 방법을 적용하여 계의 안정성을 연구하였으며, Sugiyama 등⁽¹⁰⁾은 에넬로그 컴퓨터를 이용하여 비보존 불안정문제를 연구하였으며, Iwatusubo 등⁽¹¹⁾은 축방향 주기력을 받는 외팔보와 접선방향 주기력을 받는 외팔보의 주불안정영역(principal instability region)을 결정하기 위해 디지털과 에넬로그 시뮬레이션을 하였다. Sugiyama 등⁽¹²⁾은 접선방향 주기력을 받는 외팔보의 파라미터 불안정영역을 Hsu⁽⁶⁾의 불안정조건을 이용하여 구하였으며, 이 결과를 참고문헌 (10)과 비교하여 Hsu의 불안정조건을 유효성을 입증하였다. Iwatusubo 등⁽¹³⁾은 다양한 경계조건을 갖는 보가 주기적인 축하중을 받는 경우에 대해 연구하여, 양단 단순지보와 고정-단순지보에서는 합형(sum type) 불안정영역이 존재하며 Beck 문제에서는 차형(difference type) 불안정영역이 존재한다고 하였다.

주기적인 하중을 받는 보의 실험적 연구는 Stevens

와 Evan-Iwanowski⁽¹⁴⁾가 점탄성 재질인 보의 불안정영역에 대해서 연구하였으며, Handoo와 Sundarajan⁽¹⁵⁾은 첨단질량이 있는 외팔보의 안정성에 대해 실험하여 같은 모드에서 하나 이상의 불안정영역이 존재한다는 것을 입증하였다. 또한, 일정한 크기의 중동력을 받는 보의 경우에 대한 실험적 연구는 있으나⁽¹⁶⁻¹⁸⁾, 주기적인 중동력을 받는 외팔보의 파라미터 불안정 실험은 없는 실정이다.

따라서, 본 연구에서는 비보존 문제중 하나 혹은 두 개의 집중질량을 갖는 외팔보가 주기적인 중동력을 받는 경우에 대해 외력의 상수항, 외력의 주기항, 질량비 및 집중질량의 위치와 같은 계의 매개변수들의 변화에 따른 불안정영역을 해석하고, 이에 따른 실험을 하여 이론과 비교하였다.

2. 이 론

본 연구의 수학적 모델은 Fig. 1과 같다. 이 모델에 대한 계의 지배방정식 및 경계조건은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \{m + M_1 \delta(x-l_1)\} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^3} = -M_2 \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

다음과 같은 무차원 매개변수를 도입하면,

$$\bar{x} = x/L, \quad \bar{t} = t/c, \quad a_i = l_i/L, \quad \Omega = \Omega c$$

$$\bar{M}_i = M_i/mL, \quad \bar{P}_0 = P_0 L^2/EI, \quad \varepsilon = P_1/P_0 \quad (3)$$

여기서 $c^2 = mL^4/EI$

식 (1), (2)는 다음과 같다.

$$u'''' + (P_0 + P_1 \cos \bar{\Omega} \bar{t}) u'' + \{1 + \bar{M}_1 \delta(\bar{x} - a_1)\} \ddot{u} = 0 \quad (4)$$

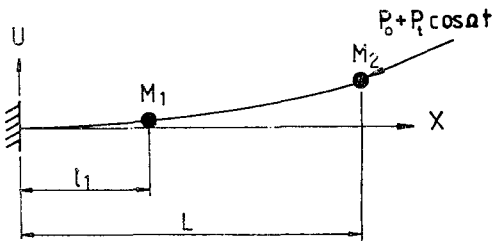


Fig. 1 Configuration of the cantilever with two concentrated masses

$$u(0, \bar{t})=0, \quad u'(0, \bar{t})=0$$

$$u''(1, \bar{t})=0, \quad u'''(1, \bar{t})=\bar{M}_2 \ddot{u}(1, \bar{t}) \quad (5)$$

여기서 “'”과 “.”는 각각 \bar{x} 와 \bar{t} 에 대한 편미분이다. 여기에 참고문헌 (19)의 이론해석을 도입하여, 즉 수정미분산자의 수정변수를 도입하고 Galerkin 방법을 사용, 정리하면 다음과 같다.

$$[F_{jk}]\{q_k\} + ([G_{jk}] + \epsilon \cos \bar{\Omega} \bar{t} [H_{jk}])\{q_k\} = \{0\} \quad (6)$$

여기서

$$F_{jk} = \alpha_j \delta_{jk} + \bar{M}_1 \phi_j(a_1) \phi_k(a_1)$$

$$G_{jk} = \alpha_j \lambda_j^4 \delta_{jk} + \bar{P}_0 \int_0^1 \phi_j'' \phi_k d\bar{x}$$

$$H_{jk} = \bar{P}_0 \int_0^1 \phi_j'' \phi_k d\bar{x} \quad (j, k=1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

이다.

$\{q_k\}$ 를 일반화된 좌표로 치환한다.

$$\{q_k\} = [P]\{\eta_k\} \quad (8)$$

여기서 행렬 $[P]$ 는 가중모달행렬(weighted modal matrix)이다. 식 (8)을 식 (6)에 대입하고 양변에 $[P]^{-1}$ 를 곱하여 정리하면

$$\{\eta_k\} + ([R] + \epsilon \cos \bar{\Omega} \bar{t} [S])\{\eta_k\} = \{0\} \quad (9)$$

$$(k=1, 2, \dots, N)$$

여기서

$$[R] = [P]^{-1}[F]^{-1}[G][P] \quad (10)$$

$$[S] = [P]^{-1}[F]^{-1}[H][P]$$

이다.

주기적인 중동력을 받는 보의 파라미터 불안정 해석에서 불안정영역의 결정은 Hsu⁽⁶⁾의 방법에 의해 결정하였다.

식 (9)에 대한 계의 파라미터 불안정 조건은 다음의 조건

$$|\bar{Q} - (\omega_j + \omega_k)| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S_{jk} S_{kj}}{\omega_j \omega_k}} \quad (11)$$

을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서 S_{jk} 는 행렬 $[S]$ 의 요소이며, $j=k$ 일 때는 2배형 불안정이고, $j \neq k$ 면 합형 불안정(sum type instability)이다.

또한 다음의 조건

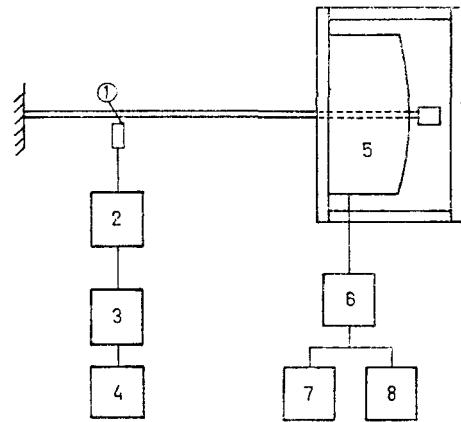
$$|\bar{Q} - (\omega_k - \omega_j)| < \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{S_{jk} S_{kj}}{\omega_j \omega_k}} \quad (12)$$

을 만족하면 계는 불안정하다. 이 경우의 불안정은 차형 불안정(difference type instability)이다.

3. 실험

3.1 실험장치

Fig. 2는 본 연구에서 사용한 실험장치의 개략도이



1. Gap detector
2. Amplifier
3. FFT analyser
4. Ploter
5. Electromagnet
6. Volt slider
7. Function generator
8. Function generator

Fig. 2 Block diagram of the experimental setup

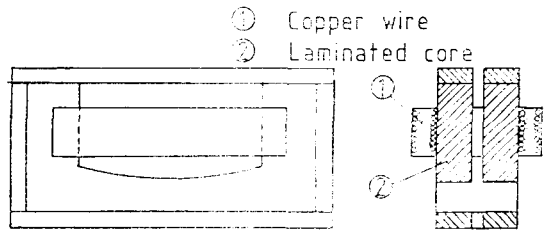


Fig. 3 Electromagnet

다. 보에 작용하는 중동력은 전자석의 자기력을 이용하여 Fig. 3과 같이 동선(Copper Wire)와 Laminated Core를 이용하여 제작하였다.

본 연구의 대상이 보의 첫번째 및 두번째 모드에 대한 것이나 끝단에 비교적 큰 집중질량이 있는 경우 첫번째 모드의 영향에 비해 두번째 모드의 영향이 적으며, 특히 불안정 영역이 가까운 곳에서는 두번째 모드가 첫번째 모드에 접근하므로 적자석 면의 형상은 실험보의 첫번째 모드의 횡단 케적에 따라 가공하였다. 계의 파라미터 불안정을 결정하는 것은 평형점 주위의 미소운동이므로 평형점 주위의 자기력은 운동중에 적자석 면에 따라 일정한 것으로 간주하였다. 또한 전자석에 감은 동선은 일정한 크기의 외력을 주기 위한 직류전원(DC)과 주기적인 외력을 주기 위한 교류전원(AC)의 두 부분으로 만들었다. 또한 실험보와 집중질량의 재질은 각각 알루미늄과 탄소강을 사용하였으며, 그 사양은 Table 1과 같다.

Table 1 Specification of the test beams for the parametric instability

Beam name	\bar{M}_1	\bar{M}_2	Length (mm)	I (mm ⁴)	Beam mass (gram)
P-1	—	2.0	500	6.184	24
P-2	1.0	2.0	500	6.184	24
P-3	—	3.0	500	1.017	16
P-4	1.0	3.0	500	1.017	16

3.2 하중의 결정

일정크기의 중동력은 참고문헌 (18)의 방법에 의해 결정하였으며, 주기적인 중동력의 크기를 결정하기 위한 실험장치는 Fig. 4와 같다. Fig. 4의 계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{z} + Kz = P_1 \sin \Omega t \tag{13}$$

여기서 M 은 사용된 첨단질량, K 는 첨단질량이 받는 주기력을 측정하기 위한 스프링이며, Ω 는 주기력의 진동수이다. 식 (13)의 해를 다음과 같이 가정하면

$$z = Z \sin(\Omega t - \phi) \tag{14}$$

식 (13)으로부터

$$P_1 = Z(K - M\Omega^2) \tag{15}$$

이다. 하중의 크기 P_1 는 식 (15)로부터 구한다.

실험은 실험보에 부착할 첨단질량을 Fig. 4와 같이 전자석의 면에서 일정한 거리를 유지시킨 후, 함수발생기(function generator)로 조화하중의 주파수를 발진하여, 전자석이 주기적인 하중을 첨단질량에 주었을 때 첨단질량의 변위의 진폭을 갭센서(Gap sensor)를 이용, 측정하여 측정된 변위로부터 식 (15)를 이용하

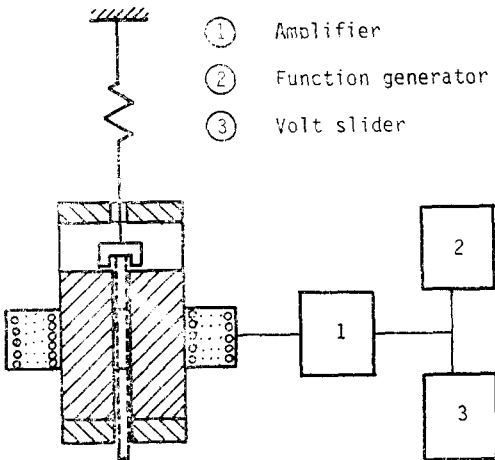


Fig. 4 Schematic diagram of the force calibration of the electromagnet for the periodic force

여 하중의 크기를 결정하였다. 본 실험에서 사용한 스프링의 스프링 상수는 $K=36849N/m$ 이다.

3.3 실험방법

실험보를 전자석의 면으로부터 미리 결정된 거리를 유지시킨 후, 전자석을 이용하여 적용하중의 크기를 고정하고, 함수발생기를 이용하여 하중의 주파수를 실험보의 측방진동의 진폭이 계속적으로 증가하는 파라미터 진동을 보일 때까지 서서히 변화시킨다. 파라미터 진동이 시작하는 \bar{P}_0 와 ϵ 의 값은 불안정 영역의 경계의 한 점이다. 다음 적용하중의 크기를 변화시키면서 같은 방법을 되풀이 하여 불안정 영역을 결정한다. 실험은 첫번째 모우드의 2배형 불안정 영역에 대해서 실험하였다.

4. 결과 및 고찰

본 연구에서 수치계산에 사용된 컴퓨터는 Cyber 170-825이며, 고유치를 계산하는 프로그램은 EISPACK

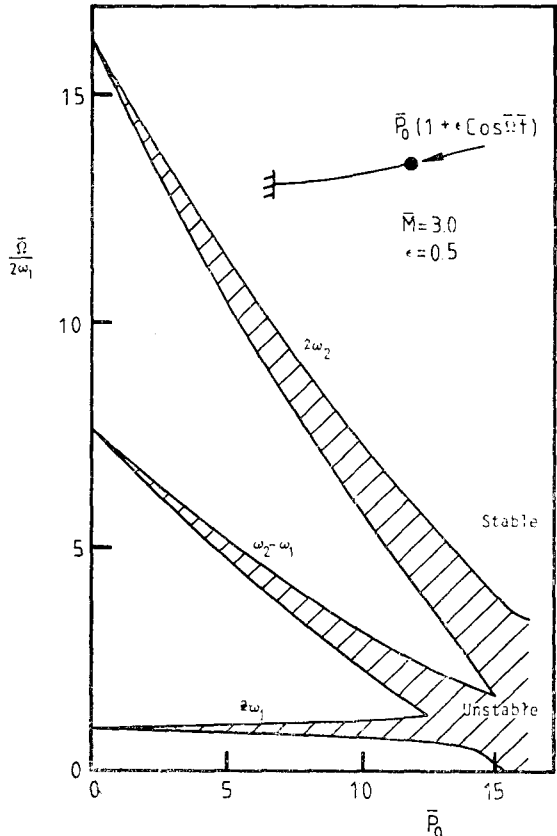


Fig. 5 Instability regions for P_0 variation

Package의 Rgg Subroutine을 사용하여 근사하는 $N=5$ 까지 구하였다.

Figs. 5~8은 각각 하중의 상수항 \bar{P}_0 , 하중의 주기항의 크기 ϵ , 집중질량의 크기 \bar{M} 및 집중질량의 위치 a 의 변화에 따른 불안정 영역의 변화에 대한 수치해석 결과이다.

Fig. 5는 $\bar{M}=3.0$, $\epsilon=0.5$ 로 고정하였을 때 \bar{P}_0 의 값의 변화에 따른 파라미터 불안정 영역을 나타낸다. 불안정 영역은 $2\omega_1$ 과 $2\omega_2$ 부근의 주불안정 영역과 $\omega_2-\omega_1$ 부근의 차형 불안정 영역이 나타난다. 중동력 \bar{P}_0 의 증가에 따라 $2\omega_2$ 부근의 불안정 영역은 $2\omega_1$ 부근의 불안정 영역으로 접근되며, $\omega_2-\omega_1$ 부근의 불안정 영역도 같은 경향을 보이며, 불안정 영역은 그 폭이 점차 증가함을 보인다. \bar{P}_0 의 큰 값에서는 이 불안정 영역들은 서로 만나 넓은 불안정 영역을 가지게 된다. Fig. 6은 $\bar{M}=2.0$, $\bar{P}_0=3.0$ 으로 고정하였을 때 하중의 주기항의 크기 ϵ 의 변화에 따른 불안정 영역을 나타낸다. ϵ 의 값의 증가에 따라 불안정 영역의 폭은 증가한다. Fig. 7은 $\bar{P}_0=5.0$, $\epsilon=0.5$ 로 고정하였을 때 집중질량 \bar{M} 의 값의 변화에 따른 불안정 영역을 나타낸다. \bar{M} 의 값의 증가에 따라 불안정 영역의 폭은 증가하며, $2\omega_2$, $\omega_2-\omega_1$ 부근의 불안정 영역의 위치는 $2\omega_1$ 부

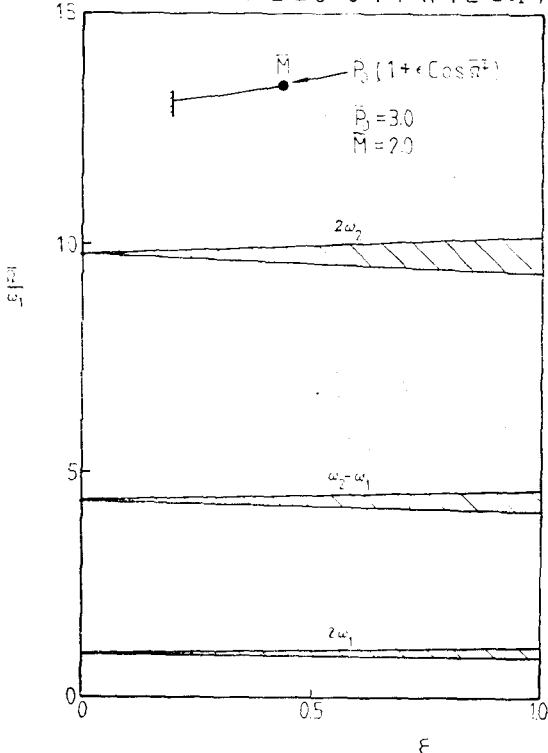


Fig. 6 Instability regions for ϵ variation

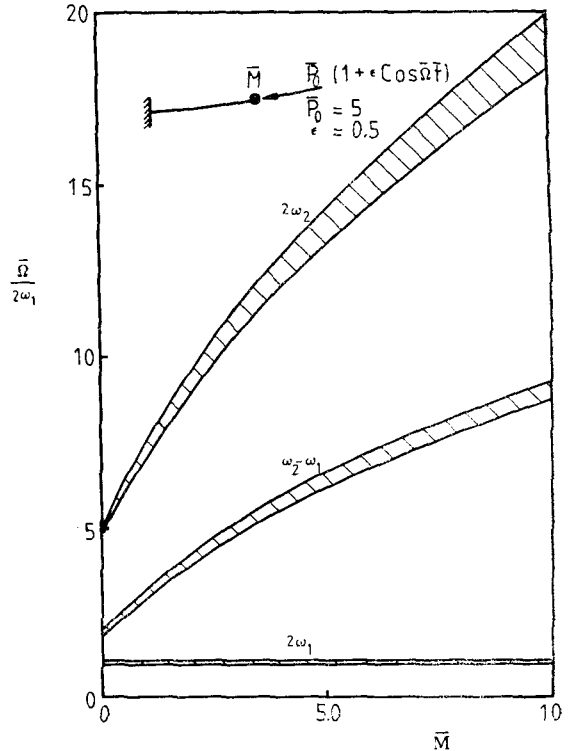


Fig. 7 Instability regions for \bar{M} variation

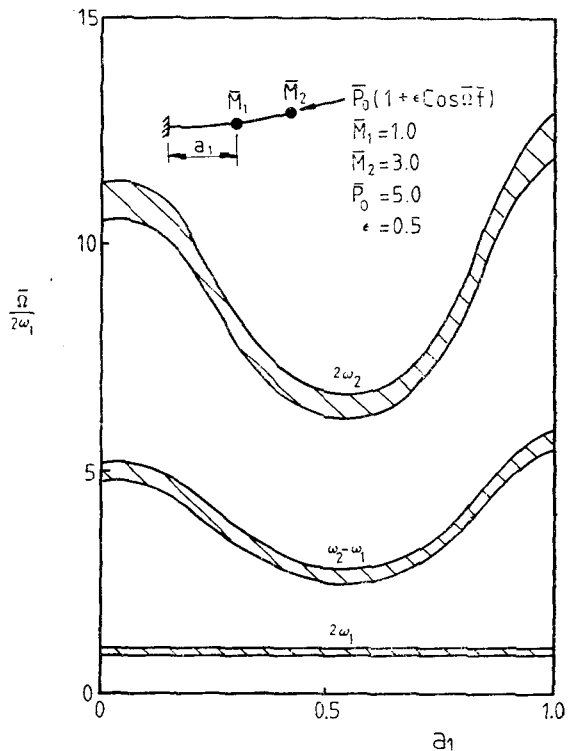


Fig. 8 Instability regions for a_1 variation

근의 불안정 영역의 위치에서 상대적으로 멀어진다. Fig. 8은 $\bar{M}_1=1.0$, $\bar{M}_2=3.0$, $a_2=1.0$, $\bar{P}_0=5.0$, $\epsilon=0.5$ 로 고정하였을 때 집중질량의 위치 a_1 의 변화에 따른 불안정 영역을 나타낸다. a_1 의 변화에 따라 $2\omega_1$, ω_2 , $-\omega_1$ 부근의 불안정 영역은 $2\omega_1$ 부근의 불안정 영역에 상대적으로 가까워졌다가 다시 멀어진다.

위의 결과들은 주기적인 중동력을 받는 외팔보의 이론결과이다. 이 이론결과와 비교할 실험결과는 Table 2와 Figs. 9~13이다. Table 2는 파라미터 불안정 영역을 결정하기 위한 실험보의 고유진 동수에 대한 이론치와 실험치의 결과를 보여주고 있다. 파라미터 불

안정 실험은 실험보 4개에 각각 일정크기의 중동력 \bar{P}_0 의 조건을 달리하여 실험하였다. Fig. 9a-b는 실험보 P-1에 대해 각각 $\bar{P}_0=0.647$, 0.97 일 때 첫번째 모우드의 2배형 불안정 영역이다. 또한 Figs. 10~12는 각각 실험보 P-2, P-3, P-4에 대해 \bar{P}_0 의 2개의 값에 대해 실험한 결과이다. 위의 실험결과에서 하중의 주기항의 크기 ϵ 의 변화에 따른 실험결과는 이론결과와 잘 일치하고 있다. Fig. 13은 실험보 P-3에 대해 중동력의 크기 \bar{P}_0 의 변화에 따른 첫번째 모우드의 2배형 불안정 영역이다. 이 결과도 이론결과와 잘 일치하고 있다.

Table 2 Theoretical and experimental natural frequencies of the test beams

Test beam	ω unload		Error(%)	\bar{P}_0	ω load		Error(%)
	Theory	Experiment			Theory	Experiment	
P-1	1.158	1.113	-3.89	0.647	1.1955	1.215	1.64
				0.970	1.2148	1.297	6.75
P-2	1.133	1.087	-4.10	0.647	1.1690	1.209	3.42
				0.970	1.1871	1.291	8.74
P-3	0.981	0.927	3.72	1.580	1.0422	1.061	1.78
				3.000	1.1228	1.197	6.61
P-4	0.948	0.910	4.03	1.580	1.0250	1.055	2.58
				3.000	1.1029	1.200	8.80

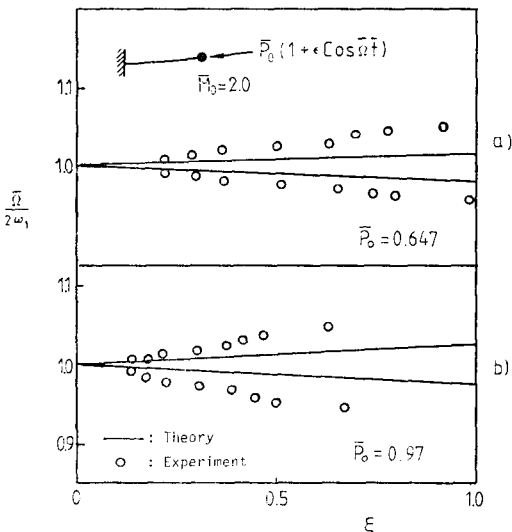


Fig. 9 Instability region for the test beam P-1

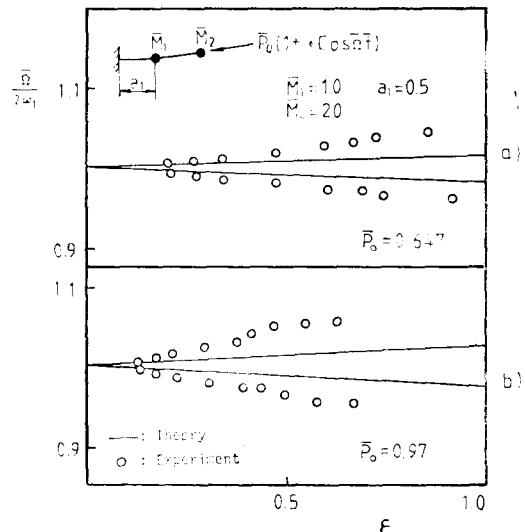


Fig. 10 Instability region for the test beam P-2

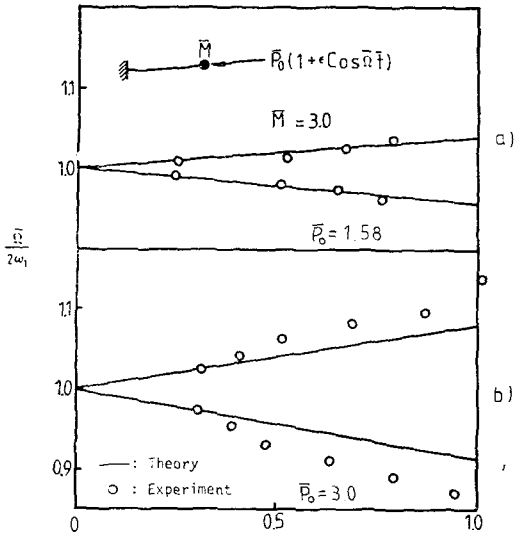


Fig. 11 Instability region for the test beam P-3

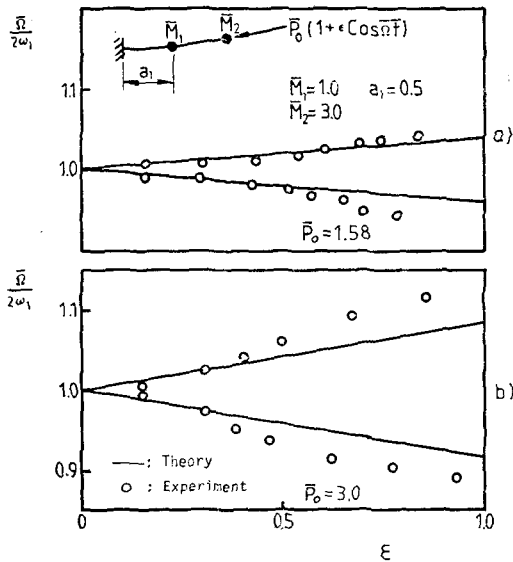


Fig. 12 Instability region for the test beam P-4

5. 결 론

본 연구는 주기적인 종동력을 받는 두개의 질중질량을 갖는 외팔보의 파라미터 불안정에 대해 이론적, 실험적 연구를 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 종동력의 크기가 증가함에 따라 파라미터 불안정 영역의 폭은 증가한다.
- (2) 질량비의 증가에 따라 파라미터 불안정 영역의 폭은 증가한다.

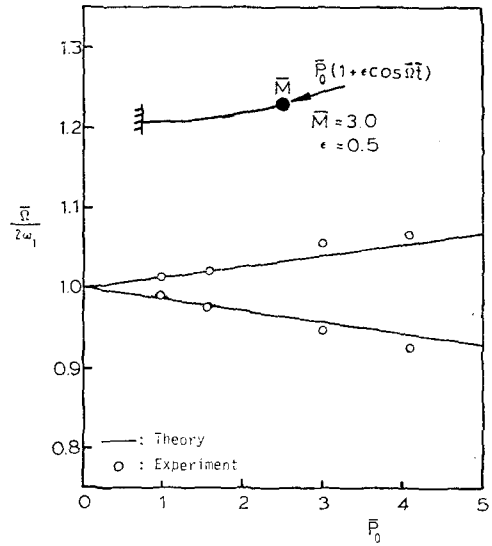


Fig. 13 Instability region for the test beam P-3

(3) 파라미터 불안정 영역에 대한 이론과 실험이 잘 일치한다.

후 기

본 연구는 1985년도 한국과학재단의 연구비지원에 의하여 수행되어졌으며, 이에 깊은 감사의 뜻을 표한다.

참 고 문 헌

- (1) Beliaev, N.M., "Stability of Prismatic Rods Subjected to variable Longitudinal Forces," In collection Engineering, Construction and Structural Mechanics, Leningrad Pat., pp.149~167, 1924
- (2) Evan-Iwanowski, R.M., "On the Parametric Response of Structures," Applied Mechanics Reviews, Vol. 18, pp.699~702, 1965
- (3) Ibrahim, R.A. and Barr, A.D.S., "Parametric Vibration-Part I: Mechanics of Linear Problems," Shock and Vibration Digest, U.S. Naval Research Lab., Vol. 10, No. 1, pp.15~29, 1978
- (4) Ibrahim, R.A., "Parametric Vibration-Part III: Current Problems (1)," Shock and Vibration Digest, U.S. Naval Research Lab., Vol. 10, No. 3, pp.41~57, 1978
- (5) Ibrahim, R.A., "Parametric Vibration-Part IV: Current Problems (2)," Shock and Vibration Digest,

- U.S. Naval Research Lab., Vol. 10, No 4, pp. 19~47, 1978
- (6) Hsu, C.S., "On the Parametric Excitation of a Dynamic System having Multiple Degrees of Freedom," J. Appl. Mech. Vol. 30, pp. 367~372, 1963
- (7) Szemplínska-Stupnicka, W., "The Generalized Harmonic Balance Method for Determining the Combination Resonance in the Parametric Dynamic Systems," J. of Sound and Vibration, Vol. 58, No. 3, pp. 347~361, 1978
- (8) Noah, S.T. and Hopkins, G.R., "A Generalized Hill's Method for the Stability Analysis of Parametrically Excited Dynamic System," J. Appl. Mech., Vol. 49, pp. 217~223, 1982
- (9) Beal, T.R., "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," AIAA J., Vol. 3, No. 3, pp. 486~496, 1965
- (10) Sugiyama, Y., Fujiwara, N. and Sekiya, T., "Studies on Nonconservative Problems of Instability of Column by means of Analog Computer," Trans. Japan Soc. Mech. Engr. Vol. 37, No. 297, pp. 931~940, 1971
- (11) Iwatusubo, T., Sugiyama, Y. and Ishihara, K., "Stability and Non-Stationary Vibration of Columns under Periodic Loads," J. of Sound and Vibration, Vol. 23, pp. 245~257, 1972
- (12) Sugiyama, Y., Iwatusubo, T. and Ishihara, K., "Regions of Parametric Instability for a Cantilevered Column Subjected to Tangential Periodic Force," Trans. Japan Soc. Mech. Engr. Vol. 39, No. 322, pp. 1850~1853, 1973
- (13) Iwatusubo, T., Sugiyama, Y. and Ogino, S., "Simple and Combination Resonances of Columns under Periodic Axial Loads," J. of Sound and vibration, Vol. 33, pp. 211~221, 1974
- (14) Stevens, K.K. and Evan-Iwanowski, R.M., "Parametric Resonance of Viscoelastic Columns," Int. J. Solids and Structures, Vol. 5, pp. 755~765, 1969
- (15) Handoo, K.L. and Sundarajan, V., "Parametric Instability of a Cantilevered Column with End Mass," J. of Sound and Vibration, Vol. 18, pp. 45~53, 1971
- (16) Wood, W.G., Saw, S.S. and Saunder, P.M., "The Kinetic Stability of a Tangentially Loaded Strut," Proc. Roy. Soc. Lond., A. 313, pp. 239~248, 1969
- (17) Feldt, W.T., Nemat-Nasser, S., Prasad, S.N. and Herrmann, G., "Instability of a Mechanical System Induced by an Impinging Fluid Jet," J. Appl. Mech. Vol. 36 pp. 693~701, 1969
- (18) 노광춘, 박영필, "중동력을 받는 첨단질량을 갖는 외팔보의 안정성에 관한 실험적 연구", 대한기계학회논문집, 제 10 권 제 2 호, pp. 183~187, 1986
- (19) 노광춘, 박영필, "비보존력을 받는 다수의 집중 질량을 갖는 외팔보의 안정성에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제 10 권 제 1 호, pp. 43~49, 1986