

<論 文>

二相亂流제트流動에서 固體粒子 亂流擴散의 數値모델에 관한 研究

梁 善 奎* · 崔 英 惇**

(1986年 6月 24日 接受)

Study on the Numerical Models of Turbulent Dispersion of Solid Particles in a Two-Phase Turbulent Jet Flow

Sun Kyu Yang and Young Don Choi

Key Words: Turbulent Two-Phase Flow(二相亂流流動), Turbulent Diffusivity(亂流擴散), Two-Equation Model(2-方程式 模型), Three-Equation Model(3-方程式 模型), Four-Equation Model(4-方程式 模型), Algebraic Stress Model(對數應力模型)

Abstract

Prediction performances by Einstein's equation of diffusivity, Peskin's model, Three-Equation model, Four-Equation model and Algebraic Stress Model, have been compared by analyzing two-phase (air-solid) turbulent jet flow.

Turbulent kinetic energy equation of dispersed phase was solved to investigate effects of turbulent kinetic energy on turbulent diffusivity.

Turbulent kinetic energy dissipation rate of particles has been considered by solving turbulent kinetic energy dissipation rate equation of dispersed phase and applying it to turbulent diffusivity of dispersed phase.

Results show that turbulent diffusivity of dispersed phase can be expressed by turbulent kinetic energy ratio between phases and prediction of turbulent kinetic energy was improved by considering turbulent kinetic energy dissipation rate of dispersed phase for modelling turbulent diffusivity.

This investigation also show that Algebraic Stress Model is the most promising method in analyzing gas-solid two phases turbulent flow.

記 號 說 明

A : 第1流體의 搖動成分의 振幅

* 正會員, 高麗大學校 大學院

** 正會員, 高麗大學校 工科大学 機械工學科

a : 第2流體의 搖動成分의 振幅

B : Stokes 항력법칙 수정계수

C_1 : 모델 常數

C_2 : 모델 常數

C_{k1} : 모델 常數
 $C_{\phi 1}$: 모델 常數
 $C_{\phi 2}$: 모델 常數
 C_{2c} : 모델 常數
 C_e : 모델 常數
 C_{e1} : 모델 常數
 C_{e2} : 모델 常數
 C_{e3} : 모델 常數
 C_μ : 모델 常數
 $C_{\mu p}$: 모델 常數
 D : 노즐의 直徑
 d : 固體粒子的 直徑
 $E(k)$: 에너지 스펙트럼
 g : 중력 가속도
 K_f : 第 1 流體의 亂流運動에너지
 K_p : 第 2 流體의 亂流運動에너지
 k : 웨이브數 (wave number)
 k_e : 에너지 스펙트럼이 最大가 되는 웨이브數
 l_f : 第 1 流體의 混合거리
 l_p : 第 2 流體의 混合거리
 \bar{P} : 평균압력
 p' : 搖動압력
 P_f : 第 1 流體의 亂流運動에너지 생성항
 P_p : 第 2 流體의 亂流運動에너지 생성항
 r : 半徑方向의 座標
 t^* : Stokesion relaxation time = $\frac{d^2 \rho_s}{18 \nu_f \rho_c}$
 \bar{U}_f : 第 1 流體의 軸方向 平均速度
 u_f' : 第 1 流體의 軸方向 搖動速度
 \bar{U}_p : 第 2 流體의 軸方向 平均速度
 u_p' : 第 2 流體의 軸方向 搖動速度
 \bar{V}_f : 第 1 流體의 半徑方向 平均速度
 v_f' : 第 1 流體의 半徑方向 搖動速度
 \bar{V}_p : 第 2 流體의 半徑方向 平均速度
 v_p' : 第 2 流體의 半徑方向 搖動速度
 $\bar{\phi}_1$: 第 1 流體의 平均體積分 (volume fraction)
 ϕ_1' : 第 1 流體의 搖動體積分
 $\bar{\phi}_2$: 第 2 流體의 平均體積分
 ϕ_2' : 第 2 流體의 搖動體積分
 ϕ_0 : 第 2 流體의 初期體積分
 ϕ_{ii} : 압력스트레인 텐서
 x : 軸方向의 座標
 δ_{ij} : Kronecker delta (1 for $i=j$, 0 for $i \neq j$)
 ϵ_f : 第 1 流體의 亂流運動에너지 消滅率
 ϵ_{ft} : 第 1 流體의 總亂流運動에너지 消滅率

ϵ_{fe} : 第 1 流體의 附加亂流運動에너지 消滅率
 ϵ_p : 第 2 流體의 亂流運動에너지 消滅率
 ϵ_{pt} : 第 2 流體의 總亂流運動에너지 消滅率
 ϵ_{pe} : 第 2 流體의 附加亂流運動에너지 消滅率
 Λ : 積分스케일
 μ_f : 第 1 流體의 粘性
 μ_p : 第 2 流體의 粘性
 ν_f : 第 1 流體의 層流動粘性係數
 ν_{ft} : 第 1 流體의 亂流擴散係數
 ν_p : 第 2 流體의 層流動粘性係數
 ν_{pt} : 第 2 流體의 亂流擴散係數
 ρ_c : 第 1 流體의 物質密度 (material density)
 $\bar{\rho}_f$: 第 1 流體의 平均密度 ($\bar{\rho}_f = \rho_c \bar{\phi}_1$)
 ρ_f' : 第 1 流體의 搖動密度
 $\bar{\rho}_p$: 第 2 流體의 平均密度 ($\bar{\rho}_p = \rho_c \bar{\phi}_2$)
 ρ_p' : 第 2 流體의 搖動密度
 ρ_s : 第 2 流體의 物質密度 (material density)
 σ_ϕ : 프란틀수
 σ_e : 모델 常數
 σ_x : 모델 常數

下添字

c : 중심선
 e : 附加
 f : 第 1 流體
 k : 웨이브數
 p : 第 2 流體

1. 緒 論

産業分野에서 固體粒子 혹은 液滴이 浮上된 二相流動의 많은 例를 볼 수 있는데 空氣汚染에 따른 먼지粒子的 流動과 沈降, 燃燒過程을 促進시키기 爲한 流動床 (fluidized bed), 미분탄연소기, 디젤엔진의 噴射, 石炭粉末의 移送장치, 傳熱面의 熱傳達를 促進시키기 爲한 氣流에 固體粉末을 添加시킨 空冷式 原子爐에서의 熱傳達過程 등을 들 수 있다.

이와같은 過程들이 包含된 열유체기기가 개선된 성능을 갖도록 설계하거나 혹은 효율적으로 운전하기 위해서는 二相流動의 流動특성과 난류특성에 대해 더 깊은 이해가 필요하며 또 二相流動의 특성과 난류특성을 이론적으로 정확히 예측할 필요성이 있다.

二相流動의 현상들을 正確히 解析하기 위해서는 벽마찰, 침식작용, 압력강하, 침전 등에 대한 정확한 이

해가 요구된다. 기체-입자 유동현상은 상간의 결합(coupling) 작용에 의한 것으로 粒子流動에 대한 기체의 항력(drag force), 양력(lift force)에 의한 運動量結合(momentum coupling), 粒子와 氣體, 또는 粒子들 사이의 熱傳達에 의한 熱的結合(thermal coupling), 증발, 응축에 의한 質量結合(mass coupling) 등이 있다.

結合形態는 크게 一方結合(one-way coupling), 相互結合(two-way coupling)으로 나눌 수 있는데 一方結合은 混合된 粒子의 流動은 氣體流動에 의하여 決定되며 粒子는 氣體流動場에 影響을 미치지 않는 結合을 말하고 相互結合은 氣體가 粒子流動場에 影響을 주며 粒子 또한 氣體流動場에 影響을 주는 結合을 말한다.

單相流動일 때와 二相流動일 때의 또 다른 큰 차이점은 狀態量 傳達構造인데 粒子 사이의 傳達構造는 지금까지 많은 研究가 行해져 왔으나 모든 境遇에 適用할 수 있는 一般的인 構造가 糾明되지 않고 있다. 또한 大部分의 産業分野에 應用되는 氣體-粒子流動은 亂流形態를 지니고 있어 二相流動을 더욱 複雜하게 한다.

氣體가 亂流流動에서 層流粘性和 亂流擴散에 의해 擴散하는 것과 같이 粒子 또한 層流粘性和 亂流擴散에 의해 擴散하는데 粒子의 層流粘性和 亂流擴散을 混合比, 體積分, 粒子의 直徑, 流動을 包含하는 기하학적인 모양 등에 따라 明確히 定量的으로 糾明하는 것이 二相流動 현상에 있어서 제일 먼저 해결해야 할 문제이다.

氣體-固體粒子의 實驗的 研究로 Arnason and Stock⁽¹⁾는 管流動에서 直徑이 5 μ m, 37 μ m, 43 μ m, 57 μ m인 粒子에 대한 亂流擴散을 測定했는데 5 μ m, 37 μ m, 43 μ m에 대한 粒子의 亂流擴散係數는 비슷한 傾向을 보이거나 57 μ m 粒子의 亂流擴散係數는 다른 것보다 크게 觀察되었다.

Snyder and Lumley⁽²⁾는 等方性 亂流流動區域에서 여러 粒子種類에 대하여 粒子의 速度相關關係(velocity correlation), 亂流擴散, 軸方向에 따른 亂流에너지 減少 등을 測定했는데 粒子의 密度가 클수록 粒子의 擴散이 작아지는 傾向을 觀察하였다.

Wells and Stock⁽³⁾는 교차궤도효과(crossing trajectory effects)가 粒子의 亂流擴散에 重要하게 影響이 있음을 測定하였다.

Peskin⁽⁴⁻⁶⁾은 접근확률(probability of encounter)理論에 의해 粒子의 擴散係數와 流體의 擴散係數의 比는 粒子의 응답시간(response time), 亂流의 Lagrangian

스케일, Eulerian 스케일의 函數가 됨을 보여주었다.

本 研究에서는 粒子가 浮上된 二相亂流제트유동에 Einstein의 擴散模型⁽⁷⁾, Peskin 模型, 3-方程式 模型, 4-方程式 模型, 對數應力模型 등을 適用하여 解析하고 각 模型들의 結果를 比較 分析하였다.

二相亂流流動의 數值解析에서 空氣는 第1 流體流動으로 하고 添加되는 固體粉末의 흐름은 密度(ρ_p), 層流動粘性係數(ν_p), 渦粘性係數(ν_{pt})를 갖는 第2 流體流動의 흐름으로 看做하였다.

2. 固體粒子 流動의 亂流擴散係數

本 解析에서 二相亂流제트 流體에 適用된 固體粒子 流動 즉 第2 流體의 亂流擴散模型들은 아래와 같다.

2.1 Einstein의 擴散模型⁽⁷⁾ (Einstein's Equation of Diffusivity; EED)

제1 流體의 亂流擴散은 $\nu_{f1} \approx \sqrt{K_f} l_f$ 로 나타낼 수 있으며 第2 流體 또한 $\nu_{p1} \approx \sqrt{K_p} l_p$ 로 表現할 수 있어 第2 流體와 第1 流體의 擴散係數의 比는

$$\frac{\nu_{p1}}{\nu_{f1}} = \frac{\sqrt{K_p}}{\sqrt{K_f}} \frac{l_p}{l_f} \quad (1)$$

가 된다. 여기서 K_p , K_f , l_p , l_f 는 모두 스펙트럼에 의하여 계산하였다.

Hinze⁽⁸⁾에 의하여 積分스케일(integral scale)은

$$A_f = \frac{\pi}{2u_f'^2} \int_0^\infty dk \frac{E(k,t)}{k} \quad (2)$$

로 나타내지며 第2 流體에 대하여도 振幅比 $\frac{a_k}{A_k}$ ⁽⁹⁾를 적용하여

$$A_p = \frac{\pi}{2u_p'^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{a_k}{A_k} \right)^2 \frac{E(k,t)}{k} \quad (3)$$

이 된다. 또한 混合길이의 比는 積分 스케일의 比로 表現할 수 있으므로

$$\frac{l_p}{l_f} \approx \frac{A_p}{A_f} \quad (4)$$

이 되어 擴散係數의 比는

$$\frac{\nu_{p1}}{\nu_{f1}} = \frac{\sqrt{K_p}}{\sqrt{K_f}} \frac{l_p}{l_f} = \frac{\sqrt{\int_0^\infty \left(\frac{a_k}{A_k} \right)^2 E(k) dk}}{\sqrt{\int_0^\infty E(k) dk}} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{2u_p'^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{a_k}{A_k} \right)^2 \frac{E(k)}{k} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{2u_f'^2} \int_0^\infty dk \frac{E(k)}{k}$$

이다. 여기서 $u_f'^2 = \frac{2}{3} K_f$, $u_p'^2 = \frac{2}{3} K_p$, $E(k)$ 는 3차원

에너지 스펙트럼이다.

2.2 Peskin 의 模型⁽⁴⁻⁶⁾ (Peskin's Model; PM)

Peskin 이 提案한 方法으로 第1 流體와 第2 流體의 擴散係數의 比는 第2 流體의 응답시간, Lagrangian 스케일, Eulerian 스케일의 함수로 表現된다.

$$\frac{\nu_{p1}}{\nu_{f1}} = -1 - (3/2) (L_L/\lambda)^2 [Q^2/(Q+2)] \quad (6)$$

$$Q = (2\rho_s/FT_L) \quad T_L = 5/12 K_f/\varepsilon_f$$

$$F = 18B\mu/d^2 \quad L_L = \sqrt{\frac{2}{3}} K_f T_L$$

$$B = B(R_{ep}) \quad \lambda = \sqrt{10\nu_f K_f/\varepsilon_f}$$

여기서 T_L 은 局部 Lagrangian 시간 스케일, L_L 은 局部 Lagrangian 길이 스케일, λ 는 Eulerian 마이크로 스케일이다. Elghobashi and Abou-Arab⁽¹⁰⁾과 Elghobashi⁽¹¹⁾ 등은 Peskin 模型을 제트 流動에 적용하여 실험값과 대체로 잘 일치하는 결과를 얻었다.

2.3 3-方程式 模型(Three-Equation Model; TEM)

이 模型은 난류擴散係數가 亂流運動에너지에 비례한다는 가정^(9,12)에서 나온 것으로 난류에너지 소멸과 생성이 평형을 이루고 혼합거리모델이 정확히 적용된다고 보고 모형화한 것이다.

또한 擴散과정이 단시간 확산⁽⁸⁾ (short diffusion) 과정이라 보면 난류확산은 난류에너지에 비례한다고 볼 수 있다.

第2 流體의 난류에너지 方程式을 해석하여 적용하였다.

$$\frac{\nu_{p1}}{\nu_{f1}} = \frac{K_p}{K_f} \quad (7)$$

2.4 4-方程式 模型(Four-Equation Model; FEM)

第1 流體의 난류에너지 소멸율을 층류 動粘性係數 ν_f 에 의해서 $\varepsilon_f = \nu_f \frac{\partial u'_{f1}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_{f1}}{\partial x_j}$ 로 表現되는 것과 같이 第2 流體에 대하여도 $\varepsilon_p = \nu_p \frac{\partial u'_{p1}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_{p1}}{\partial x_j}$ 로 나타낼 수 있는데 ε_p 는 第2 流體間의 相互作用, 第1 流體와 第2 流體의 相互作用에 의한 第2 流體의 난류에너지 소멸율이 된다.

第2 流體의 亂流擴散에 대하여는 第1 流體의 方法과 같이

$$\nu_{p1} = C_{\nu_p} \frac{K_p^2}{\varepsilon_p} \quad (8)$$

으로 계산하였다. 여기서 C_{ν_p} 는 실험에 의하여 결정되는 값이나 第1 流體의 경우와 같이 $C_{\nu_p} = 0.09$ 로 하고 ε_p 는 第2 流體의 난류에너지 소멸을 방정식을 풀어서 구한다.

2.5 對數應力 模型⁽¹³⁻¹⁵⁾ (Algebraic Stress Model; ASM)

單相流動일 때 난류유동의 이상적인 解析方法은 레이놀즈應力方程式을 푸는 方法인데 이는 方程式 수가 많고 模型化하기가 複雜하여 실제문제에 적용이 어렵다. 그래서 레이놀즈 應力項들을 대수식으로 表現한 대수응력모형 (algebraic stress model) 을 사용한다. 第2 流體에 대하여도 第2 流體의 擴散係數模型時 별도의 실험상수 등을 사용하지 않고 第1 流體와 같은 方法으로 대수응력 모형을 적용하였다.

3. 理論解析

3.1 基本方程式

위에서 언급한 第2 流體의 擴散模型들을 適用한 二相亂流제트流動의 解析에서 攪拌결합효과⁽¹⁶⁻¹⁷⁾ (inertial coupling effect)와 양력^(18,19) (lift force)은 작다고 보고 무시하였다. 本 解析에서는 第2 流體의 體積分이 작은 경우인데 解析에 적용한 가장 큰 體積分은 $\phi_2 = 3.52 \times 10^{-4}$ 으로 $\phi_1 = 1 - \phi_2$ 에서 $\phi_1 \approx 1$ 이라 할 수 있어 第1 流體의 體積密度 (bulk density)는 $\rho_f \approx \phi_1 \rho_c$, 즉 $\rho_f \approx \rho_c$ 로 계산할 수 있다.

레이놀즈方法에 의하여 平均한 二相流動의 連續方程式, 運動量方程式은 다음과 같다.

第1 流體

$$\frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{V}_f) = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f \bar{U}_f \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} + \bar{\rho}_f \bar{V}_f \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} = & -\bar{\phi}_1 \frac{\partial P}{\partial x} + \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r (\nu_f \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} - \overline{u'_f v'_f}) \right\} - \bar{\rho}_f \frac{\partial \bar{u}_f'^2}{\partial x} \\ & + \frac{B}{l^*} (\bar{U}_p - \bar{U}_f) \bar{\rho}_p + \frac{B}{l^*} (\overline{u'_p - u'_f}) \rho_p' \end{aligned} \quad (10)$$

第2 流體

$$\begin{aligned} \bar{U}_p \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial r} + \bar{V}_p \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p' \bar{u}_p'^2) \\ & - \bar{\rho}_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} - \frac{\bar{\rho}_p \bar{V}_p}{r} - \bar{\rho}_p \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p \bar{U}_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} + \bar{\rho}_p \bar{V}_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} = & -\bar{\phi}_2 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \bar{\rho}_p (\nu_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} - \overline{u'_p v'_p}) \right\} - \frac{\partial \bar{\rho}_p \bar{u}_p'^2}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\overline{\rho_p' v_p'} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} - \frac{B}{f^*} (\bar{U}_p - \bar{U}_f) \bar{\rho}_p - \frac{B}{f^*} \\
 & \quad \overline{(u_p' - u_f') \rho_p'} + g \bar{\phi}^2 (\rho_s - \rho_c) \quad (12) \\
 \bar{\rho}_p \bar{U}_p \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} + \bar{\rho}_p \bar{V}_p \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} = & -\bar{\phi}_2 \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \\
 & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \bar{\rho}_p (2\nu_p \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} - \bar{v}_p'^2) \right\} - \overline{\rho_p' u_p'} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} \\
 & - \overline{\rho_p' v_p'} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} - \frac{\partial \bar{\rho}_p u_p' v_p'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\rho}_p v_p' \bar{U}_p}{\partial x} \\
 & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{V}_p \overline{v_p' v_p'}) - \frac{B}{f^*} \{ (\bar{V}_p - \bar{V}_f) \bar{\rho}_p \} \\
 & - \frac{B}{f^*} (\overline{v_p' - v_f'}) \bar{\rho}_p' \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서 B 는 Stokes 항력 법칙의 수정계수로서 입자 레이놀즈수의 함수인데 Morsi and Alexander⁽²⁰⁾의 方法을 사용했다. 위 식에서 압력구배항은 생략하였는데 단상유동일때의 제트유동에서 압력항을 무시하고 계산하여 본 결과 실험값⁽²¹⁾과 잘 일치하여 2상유동에 적용하였다.

3.2 $K-\epsilon$ 2-方程式 模型

레이놀즈應力項은 Boussinesq의 方法

$$-\overline{u_f' i u_f' j} = \nu_{f i} \left(\frac{\partial \bar{U}_{f j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_{f j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K_f \delta_{ij} \quad (14)$$

를 使用하여 模型化하고, 第2流體의 亂流物質流動率은

$$\overline{\rho_p' u_p'} = -\frac{\nu_{p i}}{\sigma_\phi} \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial x} \quad (15)$$

$$\overline{\rho_p' v_p'} = -\frac{\nu_{p i}}{\sigma_\phi} \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial r} \quad (16)$$

로 模型化하였다. 第1流體의 擴散係數 $\nu_{f i}$ 는 $K-\epsilon$ ⁽²²⁻²⁴⁾ 模型에서

$$\nu_{f i} = C_\mu \frac{K_f^2}{\epsilon_{f i}} \quad (17)$$

으로 계산하였다. 여기서 $\epsilon_{f i}$ 는 총에너지 消滅率(total turbulent energy dissipation rate)을 나타낸다.

亂流運動 에너지

第1流體

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_f \bar{U}_f \frac{\partial K_f}{\partial x} + \bar{\rho}_f \bar{V}_f \frac{\partial K_f}{\partial r} = & + \left[-\overline{\rho_f u_f' v_f'} \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} \right. \\
 & - \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}_f' K_f') - \bar{\rho}_f \epsilon_f + \left[\frac{B}{f^*} (\bar{U}_p - \bar{U}_f) \right. \\
 & \overline{u_f' \rho_p'} + \frac{B}{f^*} (\bar{V}_p - \bar{V}_f) \overline{v_f' \rho_p'} + \frac{B}{f^*} \overline{u_f' i (u_f' i)} \\
 & \left. \left. \begin{array}{l} \epsilon_{f c} \text{ or } P_{f c} \\ -\overline{u_f' i} \bar{\rho}_p + \frac{B}{f^*} \overline{u_f' i (u_f' i - u_f' i) \rho_p'} \end{array} \right] \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

第2流體

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_p \bar{U}_p \frac{\partial K_p}{\partial x} + \bar{\rho}_p \bar{V}_p \frac{\partial K_p}{\partial r} = & + \left[-\overline{\rho_p u_p' v_p'} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} \right] \\
 & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho}_p \overline{v_p' K_p'}) - \bar{\rho}_p \epsilon_p + \left[-\overline{\rho_p' u_p'} \bar{U}_p \right. \\
 & \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} - \frac{B}{f^*} (\bar{U}_p - \bar{U}_f) \overline{u_p' \rho_p'} - \frac{B}{f^*} (\bar{V}_p - \bar{V}_f) \\
 & \left. \begin{array}{l} \epsilon_{p c} \text{ or } P_{p c} \\ \overline{v_p' \rho_p'} - \frac{B}{f^*} \overline{u_p' i (u_p' i - u_f' i) \rho_p'} - \frac{B}{f^*} \right. \\ \left. \overline{u_p' i (u_p' i - u_f' i) \rho_p'} \right] \quad (19)
 \end{array}
 \end{aligned}$$

여기서 $K_f' = \frac{1}{2} \overline{u_f' i^2}$, $K_p' = \frac{1}{2} \overline{u_p' i^2}$ 으로 정의된다.

式 (18), 式 (19)에서 $\epsilon_{f c}$, $\epsilon_{p c}$, $P_{f c}$, $P_{p c}$ 는 第2流體의 添加로 因해 附加되는 第1流體와 第2流體의 난류에너지 消滅項 혹은 生成項이다. 위 식들의 오른쪽 마지막項은 搖動速度와 搖動密度 사이의 相互作用으로 發生하는 3次相關關係(taiple correlation)로 一般적으로 2次相關關係보다 작은 값을 가지므로 무시하였다.

第1流體와 第2流體의 動搖速度의 2次相關關係는 Taweel and Landau⁽²⁵⁾의 스펙트럼 이론을 확장 적용한 Yang and Choi⁽⁹⁾ 方法으로 계산하였다.

$$\overline{u_f' i u_p' i} = \int_0^\infty 2 \left(\frac{a_k}{A_k} \cos \theta_k \right) E(k) dk \quad (20)$$

Yang and Choi⁽⁹⁾에서는 $E(k)$ 가 最大가 되는 k_c 에서의 $\frac{a_k}{A_k} \cos \theta_k$ 값을 모든 積分구간에서의 평균값으로 택하여 概算하였는데 本 解析에서는 完全積分하여 계산하였다.

반경방향의 난류에너지 확산은 다음과 같이 模型化하였다.

$$\overline{v_f' K_f'} = -\frac{\nu_{f i}}{\sigma_k} \frac{\partial K_f}{\partial r} \quad (21)$$

$$\overline{v_p' K_p'} = -\frac{\nu_{p i}}{\sigma_k} \frac{\partial K_p}{\partial r} \quad (22)$$

亂流運動에너지 消滅率 方程式

第1流體

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_f \bar{U}_f \frac{\partial \epsilon_f}{\partial x} + \bar{\rho}_f \bar{V}_f \frac{\partial \epsilon_f}{\partial r} = & \bar{\rho}_f \frac{\epsilon_f}{K_f} (C_{\epsilon 1} P_f + C_{\epsilon 3} P_{f c}) \\
 & - \bar{\rho}_f \frac{\epsilon_f}{K_f} (C_{\epsilon 2} \epsilon_f + C_{\epsilon 3} \epsilon_{f c}) - \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\
 & \left(r \overline{v_f' \epsilon_f'} \right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

第2流體

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_p \bar{U}_p \frac{\partial \epsilon_p}{\partial x} + \bar{\rho}_p \bar{V}_p \frac{\partial \epsilon_p}{\partial r} = & \bar{\rho}_p \frac{\epsilon_p}{K_p} (C_{\epsilon 1} P_p + C_{\epsilon 3} P_{p c}) \\
 & - \bar{\rho}_p \frac{\epsilon_p}{K_p} (C_{\epsilon 2} \epsilon_p + C_{\epsilon 3} \epsilon_{p c}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho}_p \overline{v_p' \epsilon_p'}) \quad (24)
 \end{aligned}$$

여기서 $\epsilon_f' = \nu_f \frac{\partial u_f' i}{\partial x_j} \frac{\partial u_f' i}{\partial x_j}$, $\epsilon_p' = \nu_p \frac{\partial u_p' i}{\partial x_j} \frac{\partial u_p' i}{\partial x_j}$

로 정의되며 반경방향 난류에너지 소멸을 확산은

$$\overline{u'_f \varepsilon'_f} = -\frac{\nu_{f1}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial r} \quad (25)$$

$$\overline{v'_p \varepsilon'_p} = -\frac{\nu_{p1}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \quad (26)$$

로 模型化하였다.

式 (23), (24)에서 난류에너지 소멸율의 부가소멸율 $C_{\varepsilon 3} \varepsilon_{f,e}$, $C_{\varepsilon 3} \varepsilon_{p,e}$ 는 Elghobashi and Abou-Arob⁽¹⁰⁾과 Elghobashi⁽¹¹⁾ 등의 方法으로 式 (18), (19)의 $\varepsilon_{f,e}$, $\varepsilon_{p,e}$ 를 적용한 것이다.

3.3 對數應力模型(ASM) 方程式

對數應力模型에서 方程式들은 Johnson⁽¹⁴⁾의 方法을 따랐다.

亂流運動에너지 方程式

第1流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f \bar{U}_f \frac{\partial K_f}{\partial x} + \bar{\rho}_f \bar{V}_f \frac{\partial K_f}{\partial r} = & + \bar{\rho}_f \left[-\bar{u}'_f{}^2 \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} \right. \\ & - \bar{v}'_f{}^2 \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} - \overline{u'_f v'_f} \left(\frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} + \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial x} \right) - \bar{w}'_f{}^2 \\ & \left. \frac{\bar{V}_f}{r} \right] + \bar{\rho}_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_f + C_{k1} \frac{K_f}{\varepsilon_f} \bar{u}'_f{}^2 \right) \frac{\partial K_f}{\partial x} \\ & + \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\nu_f + C_{k1} \frac{K_f}{\varepsilon_f} \bar{v}'_f{}^2 \right) \frac{\partial K_f}{\partial r} \\ & + \bar{\rho}_f \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{k1} \frac{K_f}{\varepsilon_f} \overline{u'_f v'_f} \right) \frac{\partial K_f}{\partial r} + \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \\ & \frac{\partial}{\partial r} r \left(C_{k1} \frac{K_f}{\varepsilon_f} \overline{u'_f v'_f} \right) \frac{\partial K_f}{\partial x} - \bar{\rho}_f \varepsilon_f \\ & + \left[\frac{B}{t^*} (\bar{U}_p - \bar{U}_f) \overline{u'_f \rho'_f} + \frac{B}{t^*} (\bar{V}_p - \bar{V}_f) \overline{v'_f \rho'_f} \right. \\ & \left. \varepsilon_{f,e} \text{ or } P_{p,e} \right. \\ & \left. + \frac{B}{t^*} \overline{u'_{fi} (u'_{pi} - u'_{fi}) \rho'_p} + \frac{B}{t^*} \right. \\ & \left. \overline{u'_{fi} (u'_{pi} - u'_{fi}) \rho'_p} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

第2流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p \bar{U}_p \frac{\partial K_p}{\partial x} + \bar{\rho}_p \bar{V}_p \frac{\partial K_p}{\partial r} = & + \bar{\rho}_p \left[-\bar{u}'_p{}^2 \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} \right. \\ & - \bar{v}'_p{}^2 \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} - \overline{u'_p v'_p} \left(\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} + \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} \right) - \bar{w}'_p{}^2 \\ & \left. \frac{\bar{V}_p}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}_p \left(\nu_p + C_{k1} \frac{K_p}{\varepsilon_p} \bar{u}'_p{}^2 \right) \frac{\partial K_p}{\partial x} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{\rho}_p \left(\nu_p + C_{k1} \frac{K_p}{\varepsilon_p} \bar{v}'_p{}^2 \right) \frac{\partial K_p}{\partial r} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}_p \left(C_{k1} \frac{K_p}{\varepsilon_p} \overline{u'_p v'_p} \right) \frac{\partial K_p}{\partial r} + \frac{1}{r} \\ & \frac{\partial}{\partial r} r \bar{\rho}_p \left(C_{k1} \frac{K_p}{\varepsilon_p} \overline{u'_p v'_p} \right) \frac{\partial K_p}{\partial x} - \bar{\rho}_p \varepsilon_p \\ & + \left[-\overline{\rho'_p u'_p} \left(\bar{U}_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} + \bar{V}_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} \right) - \overline{\rho'_p v'_p} \right. \end{aligned}$$

$$\left(\bar{U}_p \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} + \bar{V}_p \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} \right) - \frac{B}{t^*} (\bar{U}_p - \bar{U}_f)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{p,e} \text{ or } P_{p,e} \\ & \overline{u'_p \rho'_p} - \frac{B}{t^*} (\bar{V}_p - \bar{V}_f) \overline{v'_p \rho'_p} - \frac{B}{t^*} \overline{u'_{pi} (u'_{fi} -} \\ & \left. \overline{u'_{fi}) \rho'_p} - \frac{B}{t^*} \overline{u'_{pi} (u'_{fi} - u'_{fi}) \rho'_p} \right] \quad (28) \end{aligned}$$

위 式들의 $\overline{u'_{fi} u'_{fi}}$ 의 模型化方法은 K - ε 模型에서와 같이 式 (20)으로 구하고 다른 搖動成分의 2次相關關係는 모두 대수응력식으로부터 구한다.

亂流運動에너지 消滅率方程式

第1流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f \bar{U}_f \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x} + \bar{\rho}_f \bar{V}_f \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial r} = & \bar{\rho}_f \frac{\varepsilon_f}{K_f} (C_{\varepsilon 1} P_f + C_{\varepsilon 3} P_{f,e}) \\ & - \bar{\rho}_f \frac{\varepsilon_f}{K_f} (C_{\varepsilon 2} \varepsilon_f + C_{\varepsilon 3} \varepsilon_{f,e}) + \bar{\rho}_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_f + C_\varepsilon \right. \\ & \left. \frac{K_f}{\varepsilon_f} \bar{u}'_f{}^2 \right) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x} + \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\nu_f + C_\varepsilon \frac{K_f}{\varepsilon_f} \bar{v}'_f{}^2 \right) \\ & \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial r} + \bar{\rho}_f \frac{\partial}{\partial x} \left(C_\varepsilon \frac{K_f}{\varepsilon_f} \overline{u'_f v'_f} \right) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial r} + \bar{\rho}_f \frac{1}{r} \\ & \frac{\partial}{\partial r} r \left(C_\varepsilon \frac{K_f}{\varepsilon_f} \overline{u'_f v'_f} \right) \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x} \quad (29) \end{aligned}$$

第2流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p \bar{U}_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x} + \bar{\rho}_p \bar{V}_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} = & \bar{\rho}_p \frac{\varepsilon_p}{K_p} (C_{\varepsilon 1} P_p + C_{\varepsilon 3} P_{p,e}) \\ & - \bar{\rho}_p \frac{\varepsilon_p}{K_p} (C_{\varepsilon 2} \varepsilon_p + C_{\varepsilon 3} \varepsilon_{p,e}) + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}_p \left(\nu_p + C_\varepsilon \right. \\ & \left. \frac{K_p}{\varepsilon_p} \bar{u}'_p{}^2 \right) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{\rho}_p \left(\nu_p + C_\varepsilon \right. \\ & \left. \frac{K_p}{\varepsilon_p} \bar{v}'_p{}^2 \right) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}_p \left(C_\varepsilon \frac{K_p}{\varepsilon_p} \overline{u'_p v'_p} \right) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{\rho}_p \left(C_\varepsilon \frac{K_p}{\varepsilon_p} \overline{u'_p v'_p} \right) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x} \quad (30) \end{aligned}$$

式 (29), (30)의 $\varepsilon_{f,e}$, $\varepsilon_{p,e}$ 는 式 (27), (28)로부터 구한다.

式 (27), (28), (29), (30)과 基本方程式들인 式 (9), (10), (11), (12), (13)의 레이놀즈 應力項과 物質流動率項들은 대수식으로 표현되는데 다음과 같은 절차로 유도된다.

레이놀즈應力方程式은 第1流體에 대하여

$$\begin{aligned} \bar{U}_{fk} \frac{\partial \overline{u'_{fi} u'_{fi}}}{\partial x_k} = & P_{f,ii} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon_f + \phi_{f,ij} + D_{f,ij} \\ & - \varepsilon_{f,ij} \quad (31) \end{aligned}$$

이 된다(附錄 참조).

여기서 $P_{f,ij}$ =第1流體의 總生成 тен서 (total production tensor)

$\phi_{f,ij}$ =第1流體의 壓力스트레인 тен서 (pressure strain tensor)

$D_{f,ij}$ =第1流體의 擴散 тен서 (diffusion tensor)

$\varepsilon_{f e i j}$ = 第1 流體의 附加난류 에너지 소멸을
텐서 (extra dissipation tensor)

이다. 式 (31)에서 오른쪽 마지막항은 第1 流體에 第2 流體의 添加로 인한 레이놀즈應力의 附加소멸을텐서인데 이 項은 복잡하여 새롭게 模型化할 必要가 있다. 附加소멸을 텐서는

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f e i j} = & -\frac{B\bar{\rho}_p}{\bar{\rho}_f t^*} \overline{u'_{f i}(u'_{p i}-u'_{f i})} \\ & -\frac{B\bar{\rho}_p}{\bar{\rho}_f t^*} \overline{u'_{f i}(u'_{p j}-u'_{f i})} \\ & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} \overline{\rho_p u'_{f j}(\bar{U}_{p i}-\bar{U}_{f i})} \\ & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} \overline{\rho_p u'_{f i}(\bar{U}_{p j}-\bar{U}_{f i})} \\ & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} \overline{\rho_p u'_{f j}(u'_{p i}-u'_{f i})} \\ & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} \overline{\rho_p u'_{f i}(u'_{p j}-u'_{f i})} \end{aligned} \quad (32)$$

로 되는데 等方性亂流流動場에서 $i \neq j$ 일 때 $\varepsilon_{f e i j} \sim 0$ 임을 알 수 있으며 $i = j$ 일 때

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f e i i} = & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} \sum_{\text{Summation}} 2\bar{\rho}_p \overline{u'_{f i}(u'_{p i}-u'_{f i})} \\ & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} 2\overline{\rho_p u'_{f i}(\bar{U}_p-\bar{U}_{f i})} \\ & -\frac{B}{\bar{\rho}_f t^*} 2\overline{\rho_p u'_{f i}(u'_{p i}-u'_{f i})} = \frac{2}{3}\varepsilon_{f e} \end{aligned} \quad (33)$$

의 관계가 성립하여 一般的으로 表現하면

$$\varepsilon_{f e i j} = \frac{2}{3} \delta_{i j} \varepsilon_{f e} \quad (34)$$

이 된다. 式 (31)을 다시 쓰면

$$\bar{U}_{f k} \frac{\partial u'_{f i} u'_{f j}}{\partial x_k} = P_{f i i j} - \frac{2}{3} \delta_{i j} \varepsilon_{f i} + \phi_{f i j} + D_{f i j} \quad (35)$$

와 같이 되며 여기서 $\varepsilon_{f i}$ 는 第1 流體의 總亂流에너지 消滅率, 즉 $\varepsilon_{f i} = \varepsilon_f + \varepsilon_{f e}$ 가 된다. 압력스트레인텐서, $\phi_{f i j}$ 는 等方性회복 (return-to-isotropy) 항과 평균스트레인 (mean strain) 으로 나뉜다.

$$\phi_{f i j} = \frac{\rho'}{\rho_c} \left(\frac{\partial u'_{f i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_{f j}}{\partial x_i} \right) = \phi_{f i j, 1} + \phi_{f i j, 2}$$

等方性 회복項은

第1 流體

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{AA} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} & -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} & -\frac{2}{3} \frac{\bar{V}_f}{r} & \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial x} \\ -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} & \frac{1}{AA} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} & -\frac{2}{3} \frac{\bar{V}_f}{r} & \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} \\ -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} & -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} & \frac{1}{AA} + \frac{4}{3} \frac{\bar{V}_f}{r} & -\frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} + \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} & 0 & \frac{1}{AA} + \left(\frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_f'^2 \\ \bar{v}_f'^2 \\ \bar{w}_f'^2 \\ \bar{u}_f' \bar{v}_f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \frac{1}{AA} K_f \\ \frac{2}{3} \frac{1}{AA} K_f \\ \frac{2}{3} \frac{1}{AA} K_f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\phi_{f i j, 1} = -C_1 \frac{\varepsilon_f}{K_f} \overline{(u'_{f i} u'_{f j})} - \frac{2}{3} \delta_{i j} K_f \quad (36)$$

로 模型化되고⁽¹⁴⁾, 평균스트레인 項은

$$\phi_{f i j, 2} = -C_2 \left(P_{f i j} - \frac{2}{3} \delta_{i j} P_f \right) \quad (37)$$

로 계산된다.⁽²⁶⁾

Rodi⁽¹⁵⁾는 레이놀즈應力 ($\overline{u'_{f i} u'_{f j}}$) 方程式의 대류항, 확산항과 난류운동에너지 (K_f)의 대류항, 확산항사에 다음과 같은 가정을 세웠다.

$$\bar{U}_{f k} \frac{\partial \overline{u'_{f i} u'_{f j}}}{\partial x_k} = \frac{\overline{u'_{f i} u'_{f j}}}{K_f} \bar{U}_f \frac{\partial K_f}{\partial x_k} \quad (38)$$

$$D_{f i j} = \frac{\overline{u'_{f i} u'_{f j}}}{K_f} D(K_f) \quad (39)$$

式 (38), (39)에서

$$\begin{aligned} \bar{U}_{f k} \frac{\partial \overline{u'_{f i} u'_{f j}}}{\partial x_k} - D_{f i j} = & \frac{\overline{u'_{f i} u'_{f j}}}{K_f} \\ & \left\{ \bar{U}_{f k} \frac{\partial K_f}{\partial x_k} - D(K_f) \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

이 되며, $D(K_f)$ 는 난류 운동에너지의 확산항이다. 式 (40)으로부터 $\overline{u'_{f i} u'_{f j}}$ 에 대한 대수식은

$$\frac{\overline{u'_{f i} u'_{f j}}}{K_f} (P_{f i} - \varepsilon_{f i}) = P_{f i i j} - \frac{2}{3} \delta_{i j} \varepsilon_{f i} + \phi_{f i j} \quad (41)$$

이며, 이 식에 $\phi_{f i j}$ 에 대한 식 (36), (37)을 대입하여 다시 정리하면

$$\begin{aligned} \overline{u'_{f i} u'_{f j}} = & \frac{(1-C_2)K_f}{P_{f i} + (C_1-1)\varepsilon_{f i}} \left(P_{f i i j} - \frac{2}{3} \delta_{i j} P_{f i} \right) \\ & + \frac{2}{3} \delta_{i j} K_f \end{aligned} \quad (42)$$

이 된다. 여기서 $P_{f i}$ 는 第1 流體의 亂流運動에너지 總生成項 ($P_f + P_{f e}$)이다.

第2 流體에 대하여도 第1 流體와 같은 方法으로 $\overline{u'_{p i} u'_{p j}}$ 에 대한 대수식은

$$\begin{aligned} \overline{u'_{p i} u'_{p j}} = & \frac{(1-C_2)K_p}{P_{p i} + (C_1-1)\varepsilon_{p i}} \left(P_{p i i j} - \frac{2}{3} \delta_{i j} P_{p i} \right) \\ & + \frac{2}{3} \delta_{i j} K_p \end{aligned} \quad (43)$$

로 얻을 수 있다(附錄 참조).

式 (42), (43)으로부터 第1 流體와 第2 流體의 레이놀즈應力項들에 대한 행렬식은 다음과 같다.

여기서 $AA = \frac{(1-C_2)K_f}{P_{f1} + (C_1-1)\varepsilon_{f1}}$ 이다.

第2 流體

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{AAA} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} & -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} & -\frac{2}{3} \frac{\bar{V}_p}{r} & \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} \\ -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} & \frac{1}{AAA} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} & -\frac{2}{3} \frac{\bar{V}_p}{r} & \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} \\ -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} & -\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} & \frac{1}{AAA} + \frac{2}{3} \frac{\bar{V}_p}{r} & -\frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} + \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial x} & \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} & 0 & \frac{1}{AAA} + \left(\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_p'^2 \\ \bar{v}_p'^2 \\ \bar{w}_p'^2 \\ \bar{u}_p' \bar{v}_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \frac{1}{AAA} K_p \\ \frac{2}{3} \frac{1}{AAA} K_p \\ \frac{2}{3} \frac{1}{AAA} K_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

여기서 $AAA = \frac{(1-C_2)K_p}{P_{p1} + (C_1-1)\varepsilon_{p1}}$ 이다.

위 레이놀즈 응력의 4×4 행렬로부터 Cramer⁽²⁷⁾ 법칙을 사용하여 레이놀즈 응력항들을 구한다.

物質流動率을 구하기 위해 物質流動率 方程式을 세운다. 第1 流體의 體積分의 변화를 고려한 연속방정식과 운동량 방정식으로부터 物質流動率 方程式을 구하는데, 연속 방정식의 搖動方程式에 u'_{f1} 를 곱하고 운동량 방정식의 搖動方程式에 ρ'_f 를 곱한 후 두 식을 더하여 레이놀즈 方法으로 平均하여 구한다(附錄 참조).

第1 流體에 대한 物質流動率 方程式은

$$\bar{U}_{fk} \frac{\partial \bar{u}'_{f1} \rho'_f}{\partial x_k} = P_{f1c} - \varepsilon_{f1c} + \phi_{f1c} + D_{f1c} \quad (46)$$

이 된다.

여기서 P_{f1c} = 第1 流體의 物質流動率 生成項
 ε_{f1c} = 第1 流體의 物質流動率 消滅項
 ϕ_{f1c} = 第1 流體의 압력-物質 스트레인 (pressure-scalar strain)

D_{f1c} = 第1 流體의 物質擴散項

이다. 압력-物質 스트레인 항은 Launder⁽²⁸⁾에 의해

$$\phi_{f1c} = \frac{1}{\rho_c} \bar{p}' \frac{\partial \rho'_f}{\partial x_i} = -\frac{\varepsilon_{f1}}{K_f} \left[C_{\phi 1} \bar{u}'_{f1} \rho'_f + C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_{f1} \bar{u}'_{f1}}{K_f} - \frac{2}{3} \delta_{ii} \right) \bar{u}'_{f1} \rho'_f \right] + C_{2c} \bar{u}'_{f1} \rho'_f \frac{\partial \bar{U}_{f1}}{\partial x_i} \quad (47)$$

으로 模型化된다.

Gibson and Launder⁽²⁹⁾와 Rodi⁽¹⁵⁾는 物質流動率의 대류항, 확산항과 난류 운동에너지의 대류항, 확산항의 관계가 다음과 같이 됨을 제안하였다.

$$\bar{U}_{fk} \frac{\partial \bar{u}'_{f1} \rho'_f}{\partial x_k} - D_{f1c} = \frac{\bar{u}'_{f1} \rho'_f}{2K_f} \left\{ \bar{U}_{fk} \frac{\partial K_f}{\partial x_k} - D(k) \right\} + \frac{\bar{u}'_{f1} \rho'_f}{2\bar{\rho}_p'^2} (P_{\rho f1} - \varepsilon_{\rho f1}) \quad (48)$$

여기서 $P_{\rho f1}$ 는 $\bar{\rho}_p'^2$ 의 生成이고, $\varepsilon_{\rho f1}$ 는 $\bar{\rho}_p'^2$ 의 消滅이다.

式 (48)에서 $\bar{\rho}_p'^2$ 의 生成과 消滅이 평형을 이룬다고 가정하여 오른쪽 마지막항은 무시하였다. 이렇게 하여 $\bar{u}'_{f1} \rho'_f$ 에 대한 대수응력식을 유도하면

$$\bar{u}'_{f1} \rho'_f = \left[\bar{u}'_{f1} \rho'_f \left\{ 2K_f C_{2c} \frac{\partial \bar{U}_{f1}}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{f1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_{f1} \bar{u}'_{f1}}{K_f} - \frac{2}{3} \delta_{ii} \right) \right\} + 2K_f (P_{f1c} - \varepsilon_{f1c}) \right] / \{ P_{f1} + (2C_{\phi 1} - 1)\varepsilon_{f1} \} \quad (49)$$

이 되며, 각 성분에 대하여는

$$\begin{aligned} \bar{u}'_f \rho'_f &= \left[-2\varepsilon_{f1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_f \bar{v}'_f}{K_f} \right) \bar{v}'_f \rho'_f + \left\{ C_{2c} \bar{v}'_f \rho'_f \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} - \bar{v}'_f \rho'_f \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial r} - \bar{u}'_f \bar{v}'_f \frac{\partial \bar{\rho}_f}{\partial r} \right\} 2K_f - \bar{u}'_f'^2 \frac{\partial \bar{\rho}_f}{\partial x} 2K_f \right] / \{ P_{f1} + \varepsilon_{f1} (2C_{\phi 1} - 1) + 2\varepsilon_{f1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_f'^2}{K_f} - \frac{2}{3} \right) + (2 - C_{2c}) \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} 2K_f + \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} 2K_f \} \\ \bar{v}'_f \rho'_f &= \left(-\bar{v}'_f'^2 \frac{\partial \bar{\rho}_f}{\partial r} 2K_f \right) / \{ P_{f1} + \varepsilon_{f1} (2C_{\phi 1} - 1) + 2\varepsilon_{f1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{v}'_f'^2}{K_f} - \frac{2}{3} \right) + (2 - C_{2c}) \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} 2K_f + \frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} 2K_f \} \end{aligned} \quad (50)$$

로 나타내진다.

第2 流體에 대하여도 第1 流體와 같은 方法으로 \bar{u}'_{p1} 에 대한 대수응력식을 유도하면

$$\bar{u}'_{p1} \rho'_p = \left[\bar{u}'_{p1} \rho'_p \left\{ 2K_p C_{2c} \frac{\partial \bar{U}_{p1}}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{p1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_{p1} \bar{u}'_{p1}}{K_p} - \frac{2}{3} \delta_{ii} \right) \right\} + 2K_p (P_{p1c} - \varepsilon_{p1c}) \right] / \{ P_{p1} + (2C_{\phi 1} - 1)\varepsilon_{p1} \} \quad (52)$$

로 표현된다(附錄 참조).

式 (52)를 각 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} \bar{u}'_p \rho'_p &= \left[-2\varepsilon_{p1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_p \bar{v}'_p}{K_p} \right) \bar{v}'_p \rho'_p + \left\{ C_{2c} \bar{v}'_p \rho'_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} - \bar{v}'_p \rho'_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial r} - \bar{u}'_p \bar{v}'_p \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial r} \right\} 2K_p - \bar{u}'_p'^2 \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial x} 2K_p \right] / \{ P_{p1} + \varepsilon_{p1} (2C_{\phi 1} - 1) + 2\varepsilon_{p1} C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}'_p'^2}{K_p} - \frac{2}{3} \right) + (2 - C_{2c}) \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} 2K_p + \frac{\partial \bar{V}_p}{\partial r} 2K_p \} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial x} 2K_p \Big] / \{P_{pt} + \varepsilon_{pt}(2C_{\phi 1} - 1) + 2\varepsilon_{pt}C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{u}_p'^2}{K_p} - \frac{2}{3} \right) + (2 - C_{2c}) \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} 2K_p + \frac{\partial V_p}{\partial r} 2K_p \} \quad (53)$$

$$\bar{v}_p' \rho_p' = \left(-\bar{v}_p'^2 \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial r} - 2K_p \right) / \{P_{pt} + \varepsilon_{pt}(2C_{\phi 1} - 1) + 2\varepsilon_{pt}C_{\phi 2} \left(\frac{\bar{v}_p'^2}{K_p} - \frac{2}{3} \right) + (2 - C_{2c}) \frac{\partial V_p}{\partial r} 2K_p + \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x} 2K_p \} \quad (54)$$

이 된다.

3.4 計算에 使用한 實驗常數

本 解析에서 $K-\varepsilon$ 2-方程式 模型과 대수응력模型에 適用된 實驗常數는 Table 1 과 같다. $K-\varepsilon$ 模型은 Launder and Spalding⁽²²⁾이 提案한 값을 使用하그, 대수 응력 模型에서는 Gibson and Launder⁽³⁰⁾, Launder and Morse⁽³¹⁾ 값을 適用했다.

Table 1 Values of empirical constants in the $K-\varepsilon$ and algebraic stress model

| | C_μ | $C_{\mu p}$ | σ_k | σ_ε | $C_{\varepsilon 1}$ | $C_{\varepsilon 2}$ | $C_{\varepsilon 3}$ | σ_ϕ | C_1 | C_2 | C_{k1} | C_ε | $C_{\phi 1}$ | $C_{\phi 2}$ | C_{2c} |
|-----|---------|-------------|------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------|-------|-------|----------|-----------------|--------------|--------------|----------|
| EED | 0.09 | | 1.0 | 1.3 | 1.44 | 1.92 | 1.45 | 0.7 | | | | | | | |
| PM | 0.09 | | 1.0 | 1.3 | 1.44 | 1.92 | 1.0 | 0.7 | | | | | | | |
| TEM | 0.09 | | 1.0 | 1.3 | 1.44 | 1.92 | 1.45 | 0.7 | | | | | | | |
| FEM | 0.09 | 0.09 | 1.0 | 1.3 | 1.44 | 1.92 | 1.55 | 0.7 | | | | | | | |
| ASM | | | | | 1.44 | 1.92 | 1.7 | | 1.8 | 0.6 | 0.22 | 0.17* | 4.3 | -3.2 | 0.5 |

* $C_\varepsilon = 0.36(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) = 0.17$

4. 解析結果 및 考察

앞에서 誘導한 基本方程式, 亂流에너지 方程式, 亂流에너지 消滅率方程式을 Von Mises 變換과 Patankar-Spalding 變換을 하여 數值解析⁽³²⁻³⁴⁾하였다.

流動條件은 直徑이 25mm, 레이놀즈수가 75,000 인 亂流제트 流動에서 第2 流體의 體積分을 2.16×10^{-6} , 3.08×10^{-6} , 5.0×10^{-6} , 7.0×10^{-6} 으로 變化시키며 粒子直徑은 13 μ m로 하여 Hetsroni and Sokolov⁽³⁵⁾의 實驗값과 比較하였다.

考察하고자 하는 그림 중에 Fig. 1, Fig. 3, Fig. 5, Fig. 7, Fig. 9는 速度分布의 比較圖이며, Fig. 2, Fig. 4, Fig. 6, Fig. 8, Fig. 10은 亂流運動에너지의 比較인데 $K-\varepsilon$ 2-方程式 模型方法에서는 $\sqrt{\bar{u}_p'^2}$ 이 계산되지 않으므로 Fig. 2, Fig. 4, Fig. 6, Fig. 8에서 $\sqrt{\bar{u}_f'^2}$ 은 $\sqrt{K_f}$ 와 比較하였다. K_f 와 $\bar{u}_f'^2$ 은 제트流動에서 $\frac{\bar{u}_f'^2}{K_f} \approx 0.96^{(15,30)}$, 즉 $K_f \approx \bar{u}_f'^2$ 이라 할 수 있으나 모든 r 좌표에 대해서는 성립한다고 볼 수 없다.

Fig. 1, Fig. 2는 Einstein의 擴散模型에 관한 것으로 速度分布는 實驗값과 잘 일치함을 볼 수 있으나 亂流運動에너지의 減少幅이 작음을 알 수 있는데 ν_{pt}/ν_{ft} 에 l_p/l_f 가 重要하게 影響이 미침을 예측할 수 있다.

ν_{pt}/ν_{ft} 를 스펙트럼에 의하여 模型化하면 第1 流體와 第2 流體의 亂流에너지 예측에는 부적합한 模型方法이라 사료되며, 운동중에 粒子주위의 流體는 粒子로부터 떨어져 나가지 않는다는 Tehen⁽³⁶⁾의 가정이 어긋남을 시사해 준다.

Fig. 3, Fig. 4는 Peskin의 擴散模型을 速用한 것으로 正성적으로 일치함을 관찰할 수 있다. Fig. 3, Fig. 4로부터 접근확률(probability of encounter) 理論에 의한 擴散模型은 二相亂流제트 流動을 正確히 모사하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 5, Fig. 6은 3-方程式 方法으로 速度예측이 대단히 正確하여 亂流에너지 方程式으로부터 구한 第1 流體, 第2 流體의 亂流에너지의 比가 擴散比에 重要한 역할을 함을 알 수 있다.

Fig. 7, Fig. 8은 4-方程式 模型方法으로 速度分布 및 亂流에너지 分布가 잘 一致함을 볼 수 있는데 이것은 第2 流體의 亂流에너지 消滅을 考慮함으로 第1 流體의 亂流에너지 分布와 速度가 잘 맞는 것을 알 수 있다. 대부분의 경우 粒子間의 상호작용을 무시하나 실제로 粒子間의 상호작용이 있어 난류에너지를 변화 시킴을 Fig. 7, Fig. 8은 보여주며, 특히 粒子의 상호작용이 빈번한 큰 體積分의 경우와 유동형상이 복잡할 때 第2 流體의 亂流에너지 消滅率을 고려해야 精確한

예측을 할 수 있음을 나타내 준다.

Fig. 9, Fig. 10은 對數應力 模型方法으로 速度分布는 實驗값과 잘 一致하나 $\sqrt{u_r'^2}$ 의 分布는 약간의 차이가 있다.

粒子的 亂流擴散係數는 二相流動場의 많은 인자인 체적분, 粒子的 物質密度(material density), 레이놀즈 수, 기하학적인 형상 등에 지배되므로 一般的으로 適用되는 擴散模型을 설정하기란 실로 어려운 일이라 하겠다. 그러나 對數應力模型方法을 適用하는 경우 第2 流體의 亂流擴散를 實驗常數 등을 添加하여 模型化할 必要가 없으므로 第1 流體와 第2 流體의 局部 相互作用만 잘 考慮된다면 이 문제는 해결되리라 본다.

對數應力模型을 使用하는 境遇 固體粒子에 의해 發生하는 附加亂流에너지 消滅率을 亂流에너지 消滅率方程式에 適用時에 붙는 係數 C_{e3} 값이 1.7로 4-方程式 模型에서의 1.55 보다 $C_{e2}=1.92$ 에 더 가까운데 이 현상은 大수응력模型구조가 4-方程式보다 正確함을 나타내 주어서 複雜한 流動의 解析에 有利하리라는 것을 示唆해 준다.

이상의 本 解析果結에서 3-方程式 模型方法, 4-方程式 模型方法과 ASM 方法을 적용한 결과 큰 차이가 없는데 그것은 제트유동의 단순성 때문이고 만약 경계조건이 複雜한 유동에 적용하면 차이가 크게 나올 것으로 예측되어 이 논문의 연구는 그러한 유동을 해석할 때 사용될 기본방정식들을 정립하는데 그 의의가 있다.

Table 1에서의 C_{e3} 은 附加亂流에너지 消滅率의 消滅率項에 붙는 常數인데 각 模型들 계산에서 가장 좋은 결과를 얻도록 최적화하여 C_{e3} 값을 얻었다. C_{e3} 의 변화요인으로 생각되는 또 다른 한가지는 第1 流體와 第2 流體의 速度搖動成分 2次相關關係인 $\overline{u_r'v_r'}$ 의 計算方法에 있는데 本 解析에서는 式 (20)과 같이 구한 반면 Elghobashi⁽¹¹⁾ 등은 Chao⁽³⁷⁾方法을 그대로 적용하여 $C_{e3}=1.0$ 을 얻었는데 $C_{e3}=1.92$ 와 비교해 보면 FEM, ASM의 $C_{e3}=1.55, 1.7$ 보다 차이가 커 Chao 方法보다 式 (20)의 方法의 해석구조가 더 正確함을 알 수 있다.

또한 固體粒子的 亂流擴散에 고려해야 할 점은 方向性인데, EED, PM, TEM, FEM 方法들은 擴散方向이 반경방향만 고려된 模型方法인데 ASM 方法은 모든 方向을 다 고려한 것이다 하겠다. ASM 方法의 또 다른 장점은 난류가 등방성이 아닌 流動場에서도 적용가능하다는 것이다. 현재 널리 쓰여지는 Peskin의 模型方法은 等方性 亂流流動場에 使用되는 것이다.

本 解析에서 適用한 제트流動보다 더 複雑한 流動형상을 갖는다면 大수응력模型方法을 使用해야 二相亂流 현상을 精確히 예측할 수 있을 것으로 사료된다.

다음은 Modarress 등^(38,39)의 實驗값에 模型들을 적용했다.

Fig. 11, Fig. 12는 Einstein 모델에 의한 계산으로 입자의 직경이 $200\mu\text{m}$ 일 때 第1 流體의 速度는 조금 높게 제 2 유체의 속도는 조금 낮게 예측되었으며 $50\mu\text{m}$ 일 때는 제트중심부분에서 높게 예측되었는데 이는 입자의 교차제도효과를 고려하지 않음으로 인한이다.

Fig. 13, Fig. 14는 Elghobashi⁽¹¹⁾ 등이 Peskin model을 적용하여 계산한 것으로 실험값과 잘 일치한다.

Fig. 15, Fig. 16은 3-방정식 모델에 의한 것으로 $200\mu\text{m}, 50\mu\text{m}$ 에서 실험값과 잘 일치하여 확산비를 K_2/K_1 로 나타낼 수 있다는 어느 정도의 타당성을 보여준다.

Fig. 17, Fig. 18은 4-방정식 모델을 적용한 것으로 $200\mu\text{m}, 50\mu\text{m}$ 에서 제 1 유체와 제 2 유체의 속도분포폭이 좁은 경향이냐 정정적으로 일치한다.

Fig. 19~Fig. 22는 大수 응력모델을 적용한 것으로 $200\mu\text{m}$ 일 때 속도분포는 잘 일치함을 알 수 있으며 난류운동에너지와 $\overline{u_r'v_r'}$ 의 분포도 대체로 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 $50\mu\text{m}$ 일 때는 속도분포가 제 1 유체, 제 2 유체 모두 높게 예측되어 실험값과 차이가 난다.

이 차이는 C_{e3} 를 조정하면 향상될 것으로 보며 제 2 유체에 대한 大수응력모델에 대한 연구가 요망된다. 현재 제 2 유체의 실험상수는 제 1 유체의 실험상수를 그대로 적용하였다.

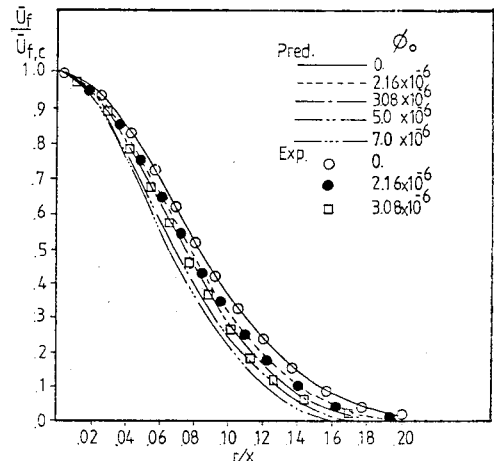


Fig. 1 Mean velocity profiles at $x/D=35$ (EED)

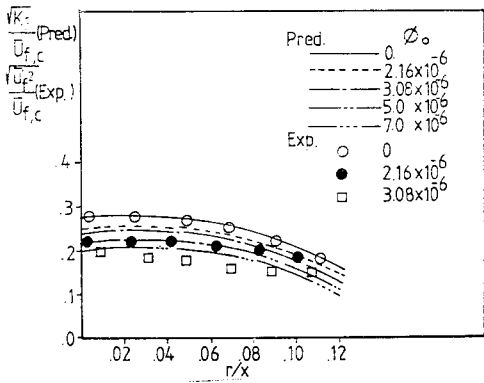


Fig. 2 Turbulent intensity profiles at $x/D=35$ (EED)

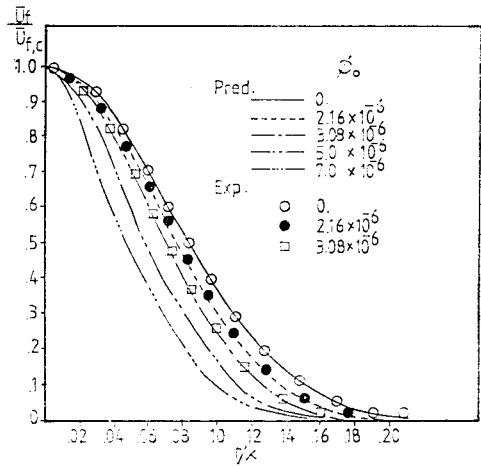


Fig. 5 Mean velocity profiles at $x/D=35$ (TEM)

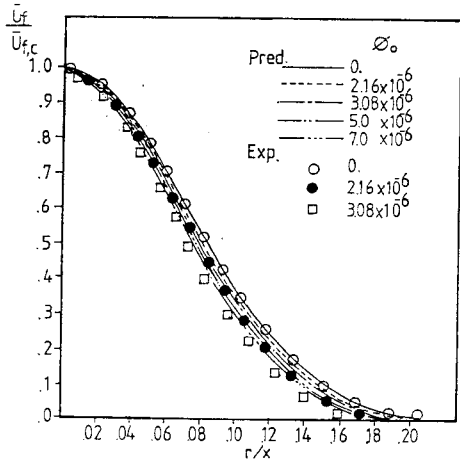


Fig. 3 Mean velocity profiles at $x/D=35$ (PM)

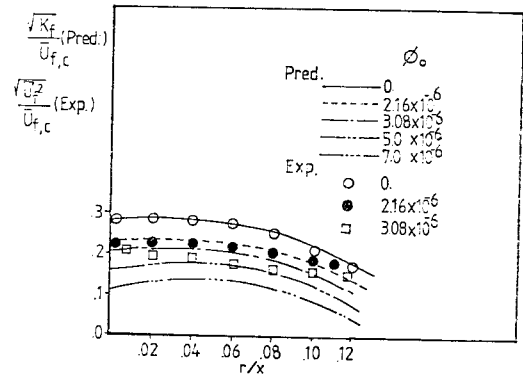


Fig. 6 Turbulent intensity profiles at $x/D=35$ (TEM)

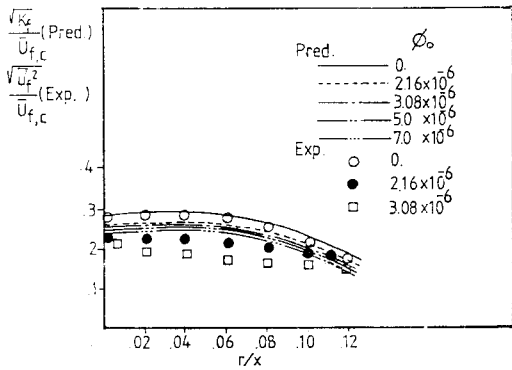


Fig. 4 Turbulent intensity profiles at $x/D=35$ (PM)

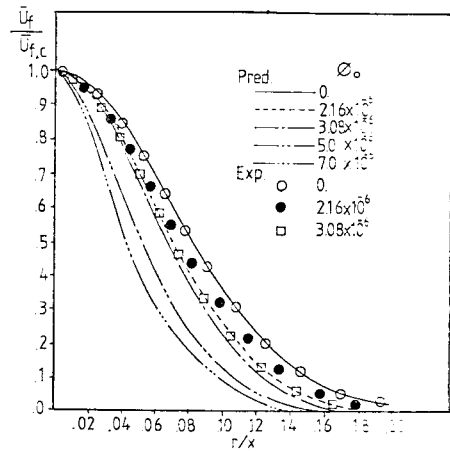


Fig. 7 Mean velocity profiles at $x/D=35$ (FEM)

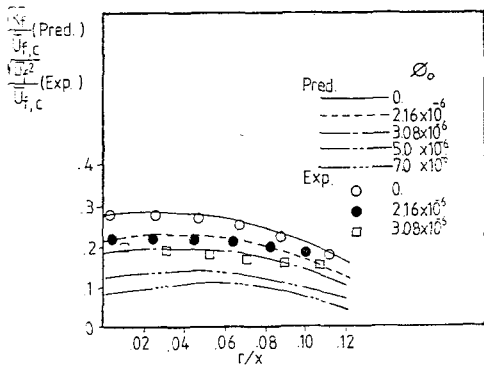


Fig. 8 Turbulent intensity profiles at $x/D=35$ (FEM)

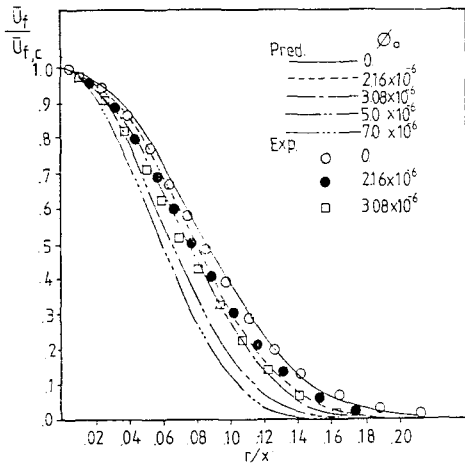


Fig. 9 Mean velocity profiles at $x/D=35$ (ASM)

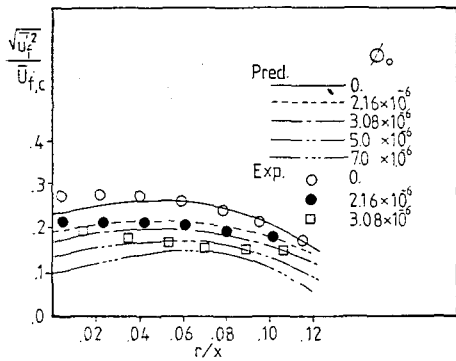


Fig. 10 Turbulent intensity profiles at $x/D=35$ (ASM)

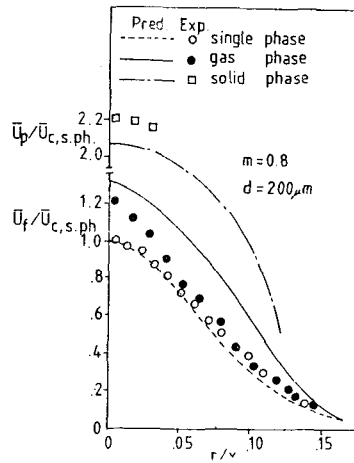


Fig. 11 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (EED)

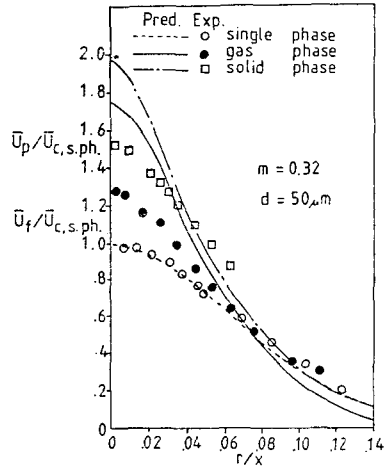


Fig. 12 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (EED)

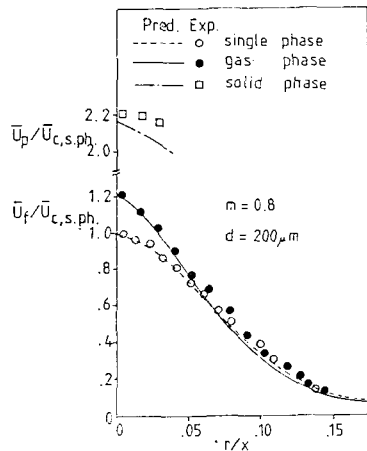


Fig. 13 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (PM)

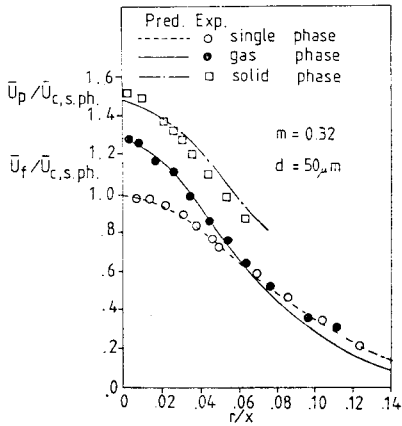


Fig. 14 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (PM)

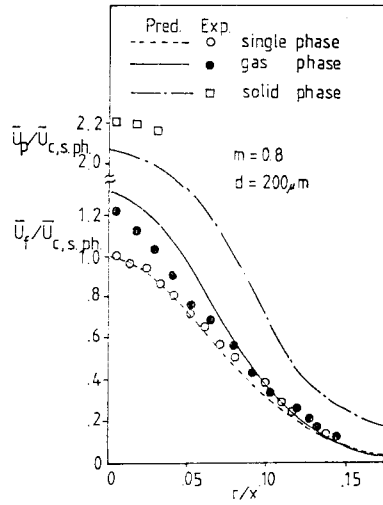


Fig. 17 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (FEM)

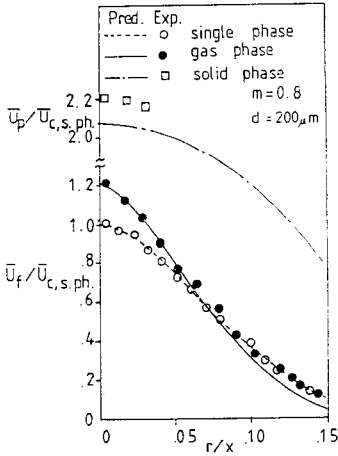


Fig. 15 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (TEM)

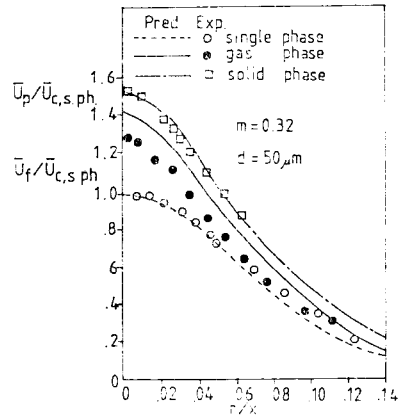


Fig. 18 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (FEM)

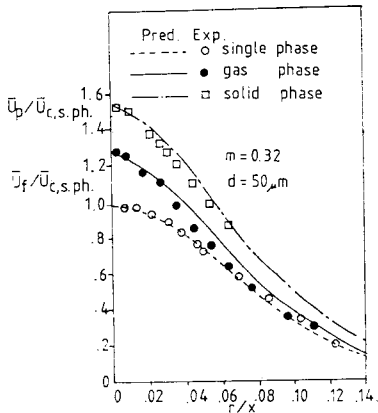


Fig. 16 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (TEM)

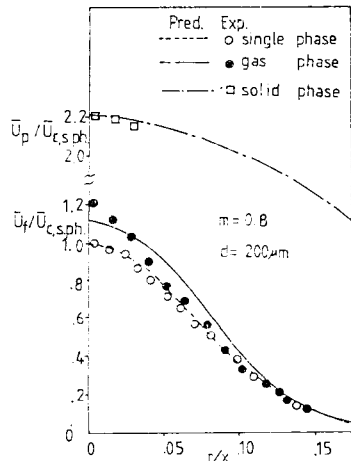


Fig. 19 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (ASM)

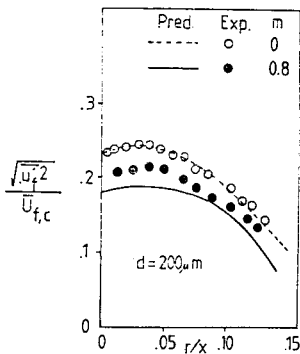


Fig. 20 Turbulence intensity profiles at $x/D=20$ (ASM)

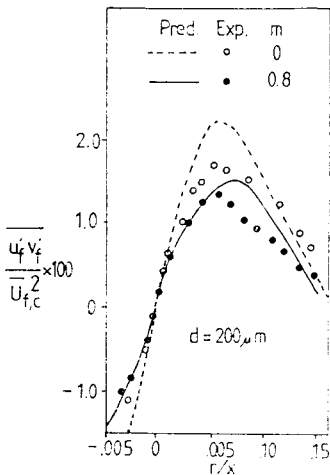


Fig. 21 Turbulence shear stress profiles at $x/D=20$ (ASM)

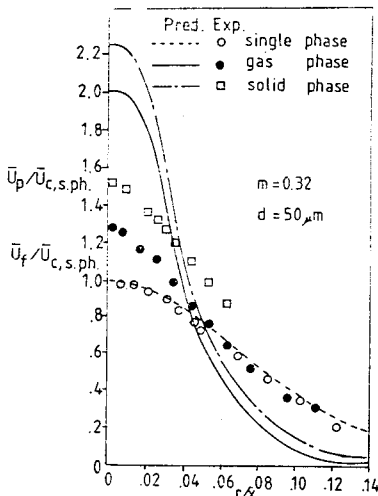


Fig. 22 Mean velocity profiles at $x/D=20$ (ASM)

제 1 유체나 제 2 유체의 확산에 영향을 주는 것은 Pseudo 와점성인데 Pseudo 와점성 ($\tilde{\nu}_{f,t}$)은

$$\tilde{\nu}_{f,t} = \frac{(1-C_2) K_f \bar{v}_f'^2}{P_{f,t} + (C_1-1)\epsilon_{f,t} + (1-C_2) \left(\frac{\partial \bar{U}_f}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_f}{\partial r} \right)} \quad (55)$$

이 된다.

50 μ m 일 때 속도분포가 확산이 안되는 이유는 제 2 유체로 인한 부가 난류에너지 소멸율이 커져서 $\epsilon_{f,t}$ ($= \epsilon_f + \epsilon_{f,e}$)가 커지고 $K_f, \bar{v}_f'^2$ 이 작아져 $\tilde{\nu}_{f,t}$ 가 작아진 때문이다.

5. 結 論

(1) 스펙트럼 이론에 의한 제 1 유체와 제 2 유체의 혼합길이의 비 l_p/l_f 는 난류운동에너지의 비보다 확산계수에 크게 영향을 미친다.

(2) Peskin의 확률이론에 의한 확산모델은 여러가지 유체형태에 공통적으로 정확히 적용되는 일반화형태라 하기 어렵다.

(3) 제 1 유체와 제 2 유체의 난류운동에너지 방정식을 풀어서 구한 난류에너지비로 난류확산계수를 구하는 방법의妥当성이 밝혀졌다.

(4) 제 2 유체에 대하여도 K_p, ϵ_p 방정식을 풀어서 확산계수를 구하는 방법의妥当성이 밝혀졌다.

(5) 對數應力模型方法을 사용하면 粒子의 複雜한 亂流擴散構造를 考慮하여 二相流動 현상을 정확히 해석할 가능성이 크다.

후 기

本 研究는 1986~1987 年度 韓國科學財團의 研究費 支援으로 수행된 것이며, 이에 대해 심심한 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

- (1) G. Arnason and D.E. Stock, Dispersion of Particles in Turbulent Pipe Flow, ASME Energy Sources Technology Conference New Orleans, Louisiana, pp. 25~29, 1984
- (2) W.H. Snyder and J.L. Lumley, Some Measurement of Particle Velocity Autocorrelation Functions in a Turbulent Flow, J. Fluid Mech., Vol. 48, Part 1, pp. 41~71, 1971
- (3) M.R. Wells and D.E. Stock, The Effects of

- Crossing Trajectories on the Dispersion of Particles in a Turbulent Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 136, pp. 31~62, 1983
- (4) R.L. Peskin, *Air: Pollution Control and Clean Energy*, AIChE Symposium Series, Vol. 71, No. 147, pp. 52~59, 1975
- (5) G. Hetsroni, *Handbook of Multiphase Systems*, McGRAW-HILL Book COMPANY, 1982
- (6) S.L. Soo, *Fluid Dynamics of Multiphase Systems*, Blaisdell Publishing Company, 1967
- (7) S.L. Soo, *Statistical Properties of Momentum Transfer in Two-Phase Flow*, *Chemical Engineering Science Genie Chimique*, Vol. 5, No. 2, pp. 57~67, 1956
- (8) J.O. Hinze, *Turbulence, An Introduction to Its Mechanism and Theory*, McGraw Hill New York, 1975
- (9) S.K. Yang and Y.D. Choi, *Calculation of Two-Phase Turbulent Jet with a Two-Equation Model*, *Trans. of KSME*, Vol. 9, No. 6, pp. 714~724, 1985
- (10) S. Elghobashi and T. Abou-Arab, *A Two-Equation Turbulence Model for Two-Phase Flows*, *Phys. Fluids*, Vol. 26, No. 4, pp. 931~938, 1983
- (11) S. Elghobashi, T. Abou-Arab, M. Rizk and A. Mostafa, *Prediction of the Particle Laden Jet with a Two-Equation Turbulence Model*, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 10, pp. 697~710, 1984
- (12) W.K. Melville and K.N.D. Bray, *A Model of the Two-Phase Turbulent Jet*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp. 647~656, 1979
- (13) M.M. Gibson, *An Algebraic Stress and Heat-Flux Model for Turbulent Shear Flow with Streamline Curvature*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 1609~1617, 1978
- (14) R.W. Johnson, *Turbulent Convecting Flow in a Square Duct with 180° Bend*, Ph. D. Thesis, UMIST, 1984
- (15) W. Rodi, *Turbulence Models for Environment Problems*, E.D. by W. Kollman, pp. 259~349, 1980
- (16) W.T. Sha and S.L. Soo, *Multidomain Multiphase Fluid Mechanics*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 1581~1595, 1978
- (17) B.T. Chao, W.T. Sha and S.L. Soo, *On Inertial Coupling in Dynamic Equation of Components in a Mixture*, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 4, pp. 219~223, 1978
- (18) R. Ishii, *Motion of Small Particles in a Gas Flow*, *Phys. Fluids*, Vol. 27, No. 1, pp. 33~41, 1984
- (19) M.A. Rizk and S.E. Elghobashi, *The Motion of a Spherical Particle Suspended in a Turbulent Flow Near a Plane Wall*, *Phys. Fluids*, Vol. 28, No. 3, pp. 806~817, 1985
- (20) S.A. Morsi and A.J. Alexander, *An Investigation of Particle Trajectories in Two-Phase flow Systems*, *J. Fluid Mech.*, Vol. 55, Part 2, pp. 193~208, 1972
- (21) I. Wygnanski and H. Fiedler, *Some Measurements in the Self-Preserving Jet*, *J. Fluid Mech.*, Vol. 38, Part 3, pp. 577~612, 1969
- (22) B.E. Launder and D.B. Spalding, *The Numerical Computation of Turbulent Flows*, *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3, pp. 269~829, 1974
- (23) B.E. Launder and D.B. Spalding, *Mathematical Models for Turbulence*, Academic Press London and New York, 1972
- (24) W.P. Jones and B.E. Launder, *The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301~314, 1972
- (25) A.M. Al Taweel and J. Landau, *Turbulence Modulation in Two-Phase Jets*, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 3, pp. 341~351, 1977
- (26) B.E. Launder, G.J. Reece and W. Rodi, *Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure*, *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, Part 3, pp. 537~566, 1975
- (27) E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 5th Ed., 1983
- (28) B.E. Launder, *Heat and Mass Transport, in Turbulence-Topics in Applied Physics*, Vol. 12, edited by P. Bradshaw, Springer, Berlin, 1976
- (29) M.M. Gibson and B.E. Launder, *On the Calculation of Horizontal, Turbulent Free Shear Flow under gravitaion Influence*, *J. Heat Transfer, Trans. ASME*, 98C, pp. 81~87, 1976
- (30) M.M. Gibson and B.E. Launder, *Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer*, *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, Part 3, pp.

491~511, 1978

- (31) B.E. Launder and A.P. Morse, Numerical Prediction of Axisymmetric Free Shear Flows with a Reynolds Stress Closure, Turbulent Shear Flows 1, Springer-Verlag, pp. 279~294, 1979
- (32) S.V. Patanker and D.B. Spalding, Heat and Mass Transfer in Boundary layer, 2nd Edn., Intertext London, 1970
- (33) M.E. Crawford and W.M. Kays, A Program for Numerical Computation of Two-Dimensional Internal/External Boundary Flows, Rept. HMT-23 Stanford Univ. California, 1975
- (34) D.B. Spalding, GENMIX, A General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena, HMT Vol. 1, Pergamon Press, 1977
- (35) G. Hetsroni and M. Sokolov, Distribution of Mass, Velocity and Intensity of Turbulence in a Two-Phase Turbulent Jet, J. Appl. Mech., Vol. 93, pp. 315~327, 1971
- (36) C.M. Tchen, Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles suspended in a Turbulent Fluid (c.f. J.O. Hinze, Turbulence, McGraw Hill New York, 1975), 1947
- (37) B.T. Chao, Osterr. Ing. Arch. 18, 7(c.f. Ref. 11, 19), 1964
- (38) D. Modarress, J. Wuerer and S. Elghobashi, An Experimental Study of a Turbulent Round Two-Phase Jet. AIAA/ASME 3rd Joint Thermophysics, Fluids, Plasma and Heat Transfer Conf. St. Louis, Missouri, 1982
- (39) D. Modarress, H. Tan and S. Elghobashi, Two-Component LDA Measurement in a Two-Phase Turbulent Jet. AIAA 21st Aerospace Sci. Meeting. Reno, Nevada, 1983

附 錄

1. 레이놀즈應力方程式

第 1 流體

$$\bar{\rho}_f \bar{U}_{fk} \frac{\partial \overline{u'_{fi} u'_{fj}}}{\partial x_k} = + \left[- \bar{\rho}_f \overline{u'_{fk} u'_{fj}} \frac{\partial \bar{U}_{fi}}{\partial x_k} \right. \\ \text{Convection} \\ \left. - \bar{\rho}_f \overline{u'_{fk} u'_{fj}} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} - \overline{\rho_f' u'_{fk} u'_{fj}} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} \right]$$

$$\text{Production} \\ - \overline{\rho_f' u'_{fk} u'_{fj}} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} \left. \right] + \left[- \bar{\phi}_1 \left(\frac{\partial \overline{\rho_f' u'_{fj}}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\rho_f' u'_{fi}}}{\partial x_j} \right) \right. \\ - \overline{\phi_1' u'_{fj}} \frac{\partial \bar{\rho}_f'}{\partial x_i} - \overline{\phi_1' u'_{fi}} \frac{\partial \bar{\rho}_f'}{\partial x_j} - \overline{\rho_f' u'_{fk}} \frac{\partial \overline{u'_{fi} u'_{fj}}}{\partial x_k} \\ \text{Turbulent Diffusion} \\ \left. - \overline{\rho_f' u'_{fk}} \frac{\partial \overline{u'_{fi} u'_{fj}}}{\partial x_k} - \bar{U}_{fk} \overline{\rho_f' \frac{\partial u'_{fi} u'_{fj}}{\partial x_k}} \right] \\ + \left[\bar{\phi}_1 \overline{\rho_f' \left(\frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} \right)} \right] + \left[- \overline{\phi_1' u'_{fj}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \right. \\ \text{Pressure Redistribution or Strain} \\ \left. - \overline{\phi_1' u'_{fi}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} - \overline{\rho_f' u'_{fj}} \bar{U}_{fk} \frac{\partial \bar{U}_{fi}}{\partial x_k} - \overline{\rho_f' u'_{fi}} \bar{U}_{fk} \frac{\partial \bar{U}_{fk}}{\partial x_i} \right. \\ \text{Extra Production} \\ \left. \bar{U}_{fk} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} \right] + \left[\bar{\phi}_1 \overline{\mu_f' u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_i} \right) \right. \\ \text{Dissipation} \\ \left. + \bar{\phi}_1 \overline{\mu_f' u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_j} \right) \right] \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\mu_f \bar{\phi}_1) \overline{u'_{fj}} \left(\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_i} \right) \right. \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu_f \bar{\phi}_1) \overline{u'_{fi}} \left(\frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_j} \right) \\ + \overline{u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \phi_1' \left(\frac{\partial \bar{U}_{fi}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_{fk}}{\partial x_i} \right) \right\} \\ + \overline{u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \phi_1' \left(\frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_{fk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ + \overline{u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \phi_1' \left(\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_i} \right) \right\} \\ + \overline{u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \phi_1' \left(\frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_f \bar{\phi}_1) \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_i} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_f \bar{\phi}_1) \frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_j} \\ \text{Viscous Diffusion and Dissipation} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_f \phi_1') \frac{\partial \bar{U}_{fi}}{\partial x_i} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_f \phi_1') \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_j} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_f \phi_1') \frac{\partial \bar{U}_{fi}}{\partial x_i} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_f \phi_1') \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_j} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fj}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_f \phi_1') \frac{\partial \bar{U}_{fi}}{\partial x_i} \\ - \frac{2}{3} \overline{u'_{fi}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_f \phi_1') \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_j} \\ \left. + \left[\frac{B \bar{\rho}_p}{\bar{t}^*} \overline{u'_{fj} (u'_{pi} u'_{fi})} + \frac{B \bar{\rho}_p}{\bar{t}^*} \overline{u'_{fi} (u'_{pj} - u'_{fi})} \right. \right. \\ + \frac{B}{\bar{t}^*} \overline{\rho_p' u'_{fj}} (\bar{U}_{pi} - U_{fi}) + \frac{B}{\bar{t}^*} \overline{\rho_p' u'_{fi}} (\bar{U}_{pj} - \bar{U}_{fj}) \\ \text{Extra Dissipation} \\ \left. + \frac{B}{\bar{t}^*} \overline{\rho_p' u'_{fj} (u'_{pi} - u'_{fi})} \right]$$

$$+ \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' u'_{fj} (u'_{pj} - u'_{fj})} \quad (\text{A. 1})$$

第2 流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p \bar{U}_{pk} \frac{\partial \overline{u'_{pj} u'_{pj}}}{\partial x_k} = & + \left[-\bar{\rho}_p \overline{u'_{pk} u'_{pj}} \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} \right. \\ \text{Convection} & \\ & - \bar{\rho}_p \overline{u'_{pk} u'_{pj}} \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k'} - \bar{\rho}_p \overline{u'_{pk} u'_{pj}} \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} \\ \text{Production} & \\ & - \overline{\rho_p' u'_{pk} u'_{pj}} \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} \left. \right] + \left[-\bar{\phi}_2 \left(\frac{\partial \overline{p' u'_{pj}}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{p' u'_{pj}}}{\partial x_j} \right) \right. \\ & - \bar{\phi}_2' u'_{pj} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \bar{\phi}_2' u'_{pj} \frac{\partial p'}{\partial x_j} - \bar{\rho}_p u'_{pk} \frac{\partial \overline{u'_{pj} u'_{pj}}}{\partial x_k} \\ \text{Turbulent Diffusion} & \\ & \left. - \rho_p' u'_{pk} \frac{\partial \overline{u'_{pj} u'_{pj}}}{\partial x_k} - \bar{U}_{pk} \rho_p' \frac{\partial \overline{u'_{pj} u'_{pj}}}{\partial x_k} \right] \\ & + \left[\bar{\phi}_2 p' \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_j} \right) \right] + \left[-\bar{\phi}_2' u'_{pj} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \right. \\ \text{Pressure Redistribution or Strain} & \\ & \left. - \bar{\phi}_2' u'_{pj} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} - \bar{\rho}_p' u'_{pj} \bar{U}_{pk} \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} - \bar{\rho}_p' u'_{pj} \right. \\ \text{Extra Production} & \\ & \left. \bar{U}_{pk} \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} \right] + \left[\bar{\phi}_2 \mu_p u'_{pj} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_j} \right) \right. \\ \text{Dissipation} & \\ & + \bar{\phi}_2 \mu_p u'_{pj} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_j} \right) \left. \right] \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\mu_p \bar{\phi}_2) u'_{pj} \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_j} \right) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu_p \bar{\phi}_2) u'_{pj} \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_j} \right) \\ & + u'_{pj} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \bar{\phi}_2' \left(\frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_{pk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ & + u'_{pj} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \bar{\phi}_2' \left(\frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_{pk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ & + u'_{pj} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \bar{\phi}_2' \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ & + u'_{pj} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \bar{\phi}_2' \left(\frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ & - \frac{2}{3} \overline{u'_{pj}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_p \bar{\phi}_2' \frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3} \overline{u'_{pj}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_p \bar{\phi}_2' \frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3} \overline{u'_{pj}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_p \bar{\phi}_2' \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_i} \right) \\ \text{Viscous Diffusion and Dissipation} & \\ & - \frac{2}{3} \overline{u'_{pj}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_p \bar{\phi}_2' \frac{\partial \bar{U}_{pj}}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3} \overline{u'_{pj}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_p \bar{\phi}_2' \frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{3} \overline{u'_{pj}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_p \bar{\phi}_2' \frac{\partial u'_{pj}}{\partial x_i} \right) \left. \right] \\ & + \left[-\frac{B \bar{\rho}_p}{t^*} \overline{u'_{pj} (u'_{pj} - u'_{fj})} \right. \\ & - \frac{B \bar{\rho}_p}{t^*} \overline{u'_{pj} (u'_{pj} - u'_{fj})} - \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' u'_{pj} (\bar{U}_{pj} - \bar{U}_{fj})} \\ & - \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' u'_{pj} (\bar{U}_{pj} - \bar{U}_{fj})} - \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' u'_{pj} (u'_{pj} - u'_{fj})} \\ \text{Extra Dissipation} & \\ & - \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' u'_{pj} (u'_{pj} - u'_{fj})} \left. \right] + \left[\bar{g}_i \overline{u'_{pj} \phi_2' (\rho_s - \rho_c)} \right. \\ & + \bar{g}_i \overline{u'_{pj} \phi_2' (\rho_s - \rho_c)} \left. \right] + \left[\overline{u'_{pj} f_j'} + \overline{u'_{pj} f_j'} \right] \quad (\text{A. 2}) \\ \text{Gravity Effect} \quad \text{External Force} & \end{aligned}$$

2. 物質流動率方程式

第1 流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f \bar{U}_{fk} \frac{\partial \overline{u'_{fj} \rho_f'}}{\partial x_k} = & + \left[-\bar{\rho}_f \overline{u'_{fk} \rho_f'} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} \right. \\ \text{Convection} & \\ & - \bar{\rho}_f \overline{u'_{fk} u'_{fj}} \frac{\partial \bar{\rho}_f}{\partial x_k} - \bar{\rho}_f'^2 u'_{fk} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} \\ \text{Production} & \\ & - \bar{\rho}_f'^2 \bar{U}_{fk} \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} - \bar{U}_{fk} \rho_f'^2 \frac{\partial \overline{u'_{fj}}}{\partial x_k} \\ & - \bar{\rho}_f \overline{u'_{fj} \rho_f'} \frac{\partial \bar{U}_{fk}}{\partial x_k} - \bar{\rho}_f' \phi_1' \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \left. \right] \\ & + \left[-\bar{\rho}_f \overline{u'_{fk}} \frac{\partial \overline{u'_{fj} \rho_f'}}{\partial x_k} - \rho_f'^2 u'_{fk} \frac{\partial \overline{u'_{fj}}}{\partial x_k} \right. \\ & - \bar{\rho}_f'^2 u'_{fj} \frac{\partial \overline{u'_{fk}}}{\partial x_k} - \bar{\rho}_f \overline{u'_{fj} \rho_f'} \frac{\partial \overline{u'_{fk}}}{\partial x_k} - \bar{\phi}_1 \frac{\partial \overline{\rho_f' p'}}{\partial x_i} \\ \text{Diffusion} & \\ & - \rho_f' \phi_1' \frac{\partial p'}{\partial x_i} \left. \right] + \left[\bar{\phi}_1 p' \frac{\partial \rho_f'}{\partial x_i} \right] \\ \text{Pressure-Scalar Strain} & \\ & + \left[\frac{B}{t^*} \bar{\rho}_p \overline{\rho_f' (u'_{pj} - u'_{fj})} + \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' \rho_f' (\bar{U}_{pj} - \bar{U}_{fj})} \right. \\ \text{Dissipation} & \\ & + \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p' \rho_f' (u'_{pj} - u'_{fj})} \left. \right] \\ & + \left[\rho_f' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \bar{\phi}_1 \left(\frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_j} \right) \right\} \right. \\ & + \rho_f' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \phi_1' \left(\frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_{fk}}{\partial x_j} \right) \right\} \\ & + \rho_f' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \bar{\phi}_2 \left(\frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_j} \right) \right\} - \frac{2}{3} \\ & \left. \rho_f' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_f \left(\bar{\phi}_1 \frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_i} + \phi_1' \frac{\partial \bar{U}_{fj}}{\partial x_i} + \phi_1' \frac{\partial u'_{fj}}{\partial x_i} \right) \right\} \right] \\ \text{Viscous Distruction} & \quad (\text{A. 3}) \end{aligned}$$

第2流體

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p \bar{U}_{pk} \frac{\partial \overline{u'_{pi} \rho'_p}}{\partial x_k} &= \left[-\overline{\rho_p u'_{pk} \rho'_p} \frac{\partial \bar{U}_{pi}}{\partial x_k} \right. \\ \text{Convection} & \\ -\overline{\rho_p u'_{pk} u'_{pi}} \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial x_k} - \overline{\rho_p'^2 u'_{pk}} \frac{\partial \bar{U}_{pi}}{\partial x_k} & \\ -\overline{\rho_p'^2 \bar{U}_{pk}} \frac{\partial \bar{U}_{pi}}{\partial x_k} - \overline{\bar{U}_{pk} \rho_p'^2} \frac{\partial u'_{pi}}{\partial x_k} & \\ -\overline{\rho_p u'_{pi} \rho'_p} \frac{\partial \bar{U}_{pk}}{\partial x_k} - \overline{\rho_p' \phi'_2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} & \left. \right] \\ \text{Production} & \\ + \left[-\overline{\rho_p u'_{pk}} \frac{\partial u'_{pi} \rho'_p}{\partial x_k} - \overline{\rho_p'^2 u'_{pk}} \frac{\partial u'_{pi}}{\partial x_k} \right. & \\ -\overline{\rho_p'^2 u'_{pi}} \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_k} - \overline{\rho_p u'_{pi} \rho'_p} \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_k} - \overline{\phi_2} \frac{\partial \rho_p' p'}{\partial x_i} & \left. \right] \\ \text{Diffusion} & \\ -\overline{\rho_p' \phi'_2} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \left[\overline{\phi_2 p'} \frac{\partial \rho'_p}{\partial x_i} \right] & \\ \text{Pressure-Scalar Strain} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left[-\frac{B}{t^*} \overline{\rho_p \rho_p' (u'_{pi} - u'_{fi})} - \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p'^2 (\bar{U}_{pi} - \bar{U}_{fi})} \right. \\ & \text{Dissipation} \\ & - \frac{B}{t^*} \overline{\rho_p'^2 (u_{pi} - u'_{fi})} \left. \right] + \left[\overline{g_i \rho_p' \phi'_2} (\rho_s - \rho_c) \right] \\ & \text{Gravity Effect} \\ & + \left[\overline{\rho_p' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \bar{\phi}_2 \left(\frac{\partial u'_{pi}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_i} \right) \right\}} \right. \\ & + \overline{\rho_p' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \phi'_2 \left(\frac{\partial \bar{U}_{pi}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_{pk}}{\partial x_i} \right) \right\}} \\ & + \overline{\rho_p' \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu_p \phi'_2 \left(\frac{\partial u'_{pi}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{pk}}{\partial x_i} \right) \right\}} - \frac{2}{3} \\ & \left. \overline{\rho_p' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu_p \left(\bar{\phi}_2 \frac{\partial u'_{pi}}{\partial x_i} + \phi'_2 \frac{\partial \bar{U}_{pi}}{\partial x_i} + \phi'_2 \frac{\partial u'_{pi}}{\partial x_i} \right) \right\}} \right] \\ & \text{Viscous Distraction} \\ & + \left[\overline{\rho_p' f'_i} \right] \quad \text{External Force} \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$