

<論 文>

두께가 變化하는 有限幅板材에서의 모드 I 龜裂 應力擴大係數 解析

梁 源 鎬* · 方 時 桓**

(1986年 10月 7日 接受)

Analysis of the Stress Intensity Factor of Mode I Crack in a Finite Width Plate with Variable Thickness

Won-Ho Yang and Si-Hwan Bang

Key Words: Compatibility(適合條件), Complex Potential(複素 포텐셜), Equilibrium Condition(平衡條件), Stress Function(應力函數), Stress Intensity Factor(應力擴大係數), Thickness Ratio(두께比), Width Ratio(板幅比)

Abstract

This paper presents the theoretical analysis of the crack tip stress intensity factor for a center crack in a finite width plate with variable thickness. The analyses were based on Laurent's expansions of complex stress potentials where the expansion coefficients are determined from the boundary conditions. The perturbation method was employed in numerical calculations.

The correction factor $F(\lambda)$ is given in the form of power series of λ .

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}(\beta, \omega) \lambda^{2n}$$

where

$\lambda = a/w_1$; Dimensionless crack length

$\beta = t_2/t$; Thickness ratio

$\omega = w_2/w_1$; width ratio

The correction factor values vary with the width ratio ω and the maximum variation occurs around $\beta=1$. For the case of $\beta=1$ or $\beta=0$ (uniform thickness plate), the correction factor values agree well with Feddersen's formula.

In all cases, as λ approaches to 1 (thickness interface), the correction factor values are decreased rapidly for $\beta > 1$, and increased rapidly for $\beta < 1$.

* 正會員, 成均館大學校 工科大學 機械設計學科

** 正會員, 崇實大學校 工科大學 機械工學科

記號說明

- a : 龜裂半徑이
- $A(m), B(m), G(m), H(m)$: 應力函數의 實係數
- a_n, b_n, A_n, ϵ : 無限級數의 係數
- $a_{2p}^{(2n)}, c_{2p}^{(2n)}$: 係數
- $C_R^A(m), C_S^A(m), C_P^A(m), C_Q^A(m)$: 係數
- $C_R^B(m), C_S^B(m), C_P^B(m), C_Q^B(m)$: 係數
- D_{2n}, F_{2n} : 應力函數의 實係數
- E : 縱彈性係數
- $F(\lambda)$: 修正係數
- $f^A(m, \rho), g^A(m, \rho)$: 係數
- $f^B(m, \rho), g^B(m, \rho)$: 係數
- K_I : 應力擴大係數
- K_{2n}, M_{2n} : 係數
- m, n, ρ, q : 常數
- $P(m), Q(m), R(m), S(m)$: 係數
- r, θ : 極座標
- t, t_2 : 板두께
- u, v : 直角變位
- w_1, w_2 : 板幅
- x : 無次元變數

- x, y : 直角座標
- z : 複素變數
- $\alpha_{2p}^{(2n)}, \beta_{2p}^{(2n)}, \gamma_{2p}^{(2n)}, \delta_{2p}^{(2n)}$: 係數
- β : 두께比
- ζ : 無次元 複素變數
- $Z(\zeta)$: 複素應力函數
- λ : 無次元龜裂길이
- ν : poisson 의 比
- ξ, η : 無次元 複素座標
- σ_x, σ_y : 垂直應力
- τ_{xy} : 剪斷應力
- $\Phi(\zeta), \phi(\zeta), \Psi(\zeta), \psi(\zeta)$: 複素포텐셜函數
- ω : 板幅比

1. 緒 論

現實的으로 두께가 變化する 部材 및 補強材 등이 各種 機械構造物에 多樣하게 使用되고 있음에도 불구하고, 이들 部材들에 대한 破壞力學的인 設計基準이나 安全基準이 아직까지 마련되어 있지 못한 실정이다.

著者 등은 앞서 두께가 變化する 板材試驗片들에 대

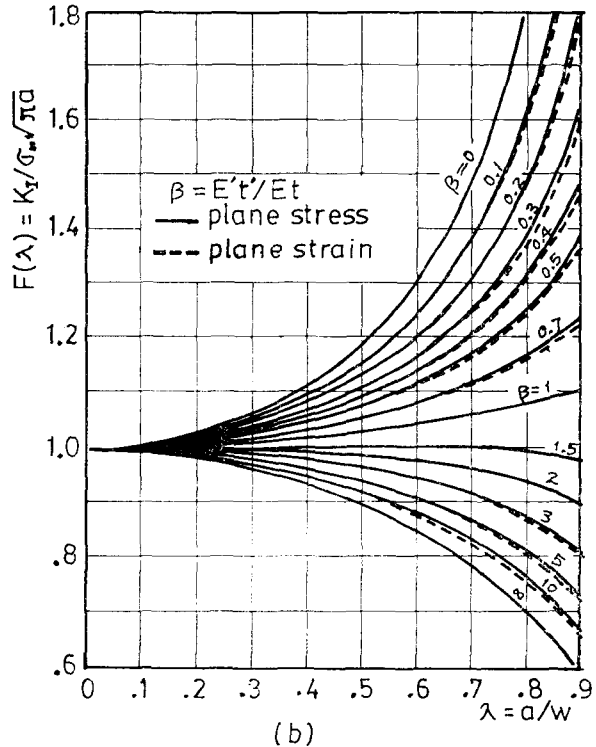
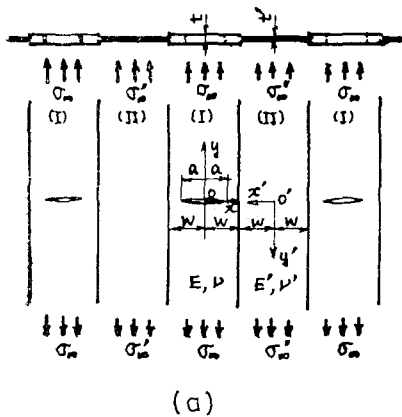


Fig. 1 Correction factor values for the periodic array of cracked strips (Isida)

한 疲勞試驗을 통하여, 두께가 變化하는 境界근방에서의 疲勞龜裂 成長舉動을 파괴역학적으로 高찰해 본 바가 있으나⁽¹⁻³⁾, 이들 두께가 變化하는 板材에서의 應力擴大係數(stress intensity factor)의 解析이 현재까지 確立되어 있지 못하므로 애로가 많았다.

Isida⁽⁴⁾는 Fig. 1a 에서와 같이 두께 및 彈性係數가 다른 異材板材가 무한히 연속적으로 結合되고, 그 한쪽 板材의 中央에 規則적으로 存在하는 龜裂의 應力擴大係數를 Laurent 級數를 利用한 複素應力函數를 써서 二次元 理論解析을 했으며, 그 結果를 Fig. 1b 로 보고 하였다. 그러나 이 Isida의 解析은 無限히 板材가 연속된 모델에 대한 解析이므로, 有限한 境界를 갖는 實際의인 問題에서는 定性的인 指標는 될 수 있겠으나, 그 結果를 그대로 적용하기는 곤란하다.

本 研究은 Isida의 理論解析 方法을 참고로 하여 有限한 幅을 갖는 두께가 變化하는 板材에서의 應力擴大係數를 二次元 理論解析한 것이다.

2. 應力函數

一般的인 平面應力問題에서, Airy의 應力函數는 複素函數 $\phi(z)$ 와 $\psi(z)$ 를 써서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Z(z) = Re[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)] \quad (1)$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

座標를 無次元化하기 위하여, x, y 를 각각 特定길이 w_1 으로 나누어, 無次元變數 ζ 및 無次元座標 ξ 와 η 를

$$\zeta = \frac{z}{w_1} = \xi + i\eta, \quad \xi = \frac{x}{w_1}, \quad \eta = \frac{y}{w_1} \quad (2)$$

로 定義하면, 式 (1)은 다음과 같이 표시될 수 있다 (Fig. 2 참고).

$$Z = \sigma_\infty w_1^2 Re[\bar{\zeta}\phi(\zeta) + \psi(\zeta)] \quad (3)$$

式 (3)에 대응하는 應力場과 變位場은 다음 式들로 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\infty Re[2\phi'(\zeta) - \bar{\zeta}\phi''(\zeta) - \psi''(\zeta)] \\ \sigma_y &= \sigma_\infty Re[2\phi'(\zeta) + \bar{\zeta}\phi''(\zeta) + \psi''(\zeta)] \\ \tau_{xy} &= \sigma_\infty Im[\bar{\zeta}\phi''(\zeta) + \psi''(\zeta)] \\ E(u - iv) &= \sigma_\infty w_1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$[(3-\nu)\bar{\phi}(\zeta) - (1+\nu)\{\bar{\zeta}\phi(\zeta) + \psi(\zeta)\}] \quad (5)$$

Fig. 2 에서와 같이 길이 $2a$ 인 센터크랙(center crack)을 갖는 두께가 變化하는 有限幅板材가 y -方向의 無限遠方에 均一引張應力 σ_∞ 를 받고 있는 경우를 생각하고, 이 材料의 종탄성계수를 E , poisson의 比를 ν 라 한다.

두께가 t 인 中央部를 領域 I, 두께가 t_2 인 양쪽의 各부를 領域 II라 하고, 領域 I의 幅을 $2w_1$, 領域 II의

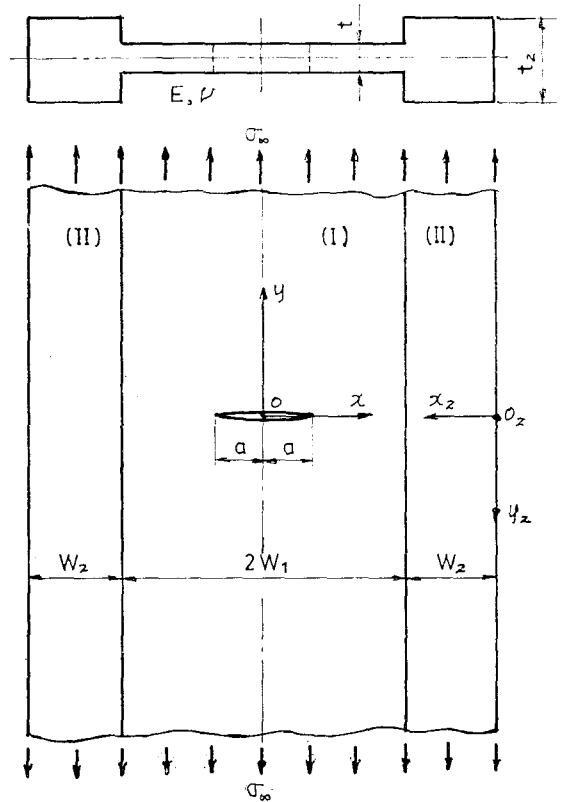


Fig. 2 A center cracked finite width and various thickness strip subjected to uniform extension

한쪽 幅을 w_2 라 한다. $\beta = t_2/t$ 를 두께比(thickness ratio), $\omega = w_2/w_1$ 을 幅比(width ratio) 및 $\lambda = a/w_1$ 을 無次元 龜裂길이로 定義한다. 領域 I과 領域 II에 대하여 座標軸 x, y 및 x_2, y_2 를 그림에서와 같이 設定하고, 各座標를 w_1 으로 나누어 다음과 같이 無次元化한다.

$$\begin{aligned} \text{領域 I;} & \xi = \frac{x}{w_1}, \quad \eta = \frac{y}{w_1}, \quad \zeta = \xi + i\eta (0 \leq \xi \leq 1) \\ \text{領域 II;} & \xi_2 = \frac{x_2}{w_1}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{w_1}, \quad \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2 \\ & (0 \leq \xi_2 \leq \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

Fig. 2에서, 領域 I에 대한 境界條件은

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{\eta=\infty} &= 0, \quad \sigma_y|_{\eta=\infty} = \sigma_\infty, \quad \tau_{xy}|_{\eta=\infty} = 0 \\ \tau_{xy}|_{\xi=0} &= 0, \quad u|_{\xi=0} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

이고, 領域 II에 대한 境界條件은

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2}|_{\eta_2=\infty} &= 0, \quad \sigma_{y_2}|_{\eta_2=\infty} = \sigma_\infty, \quad \tau_{x_2 y_2}|_{\eta_2=\infty} = 0 \\ \sigma_{x_2}|_{\xi_2=0} &= 0, \quad \tau_{x_2 y_2}|_{\xi_2=0} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

이며, 두께가 變化하는 境界에서의 適合條件과 平衡條件으로 다음을 들 수가 있다.

$$\begin{aligned} u|_{\xi=1, \eta=0} &= -u_2|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \\ v|_{\xi=1, \eta=0} &= -v_2|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x t)|_{\xi=1, \eta=0} &= (\sigma_{x_2} t_2)|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \\ (\tau_{xy} t)|_{\xi=1, \eta=0} &= (\tau_{x_2 y_2} t_2)|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 u, v 는 x -方向 및 y -方向 變位를 나타내며, 하첨자가 없는 것은 領域 I 에 대한 것이고, 하첨자 2 는 領域 II 에 대한 것이다.

(1) 領域 I 에 대한 應力函數

領域 I 에 대하여는 다음의 應力函數를 設定한다.

$$\begin{aligned} Z &= Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(2)} \\ Z^{(0)} &= \sigma_\infty w_1^2 Re[\bar{\zeta} \phi_0(\zeta) + \psi_0(\zeta)] \\ Z^{(1)} &= \sigma_\infty w_1^2 Re[\bar{\zeta} \phi_1(\zeta) + \psi_1(\zeta)] \\ Z^{(2)} &= \sigma_\infty w_1^2 Re[\bar{\zeta} \phi_2(\zeta) + \psi_2(\zeta)] \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 $Z^{(0)}$ 는 $\eta = \infty$ 에서의 境界條件을 滿足시키기 위한 것이고, $Z^{(1)}$ 은 龜裂面에서의 境界條件을 해결하기 위한 것이며, $Z^{(2)}$ 는 두께가 變化하는 境界에서의 適合 및 平衡條件을 滿足시키기 위한 것이다.

$Z^{(0)}$ 의 複素포텐셜 (potential) 은

$$\phi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \zeta, \quad \psi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \zeta^2 \quad (12)$$

이며, 이에 대응하는 應力場과 變位場은 式 (4) 와 (5) 에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \sigma_\infty Re \left[2 \left(\frac{1}{4} \right) - \bar{\zeta}(0) - \frac{1}{4} (2) \right] = 0 \\ \sigma_y^{(0)} &= \sigma_\infty Re \left[2 \left(\frac{1}{4} \right) + \bar{\zeta}(0) + \frac{1}{4} (2) \right] = \sigma_\infty \\ \tau_{xy}^{(0)} &= \sigma_\infty Im \left[\bar{\zeta}(0) + \frac{1}{4} (2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Eu^{(0)} &= -\sigma_\infty w_1 \nu \zeta, \quad u^{(0)}|_{\xi=0} = 0 \\ Ev^{(0)} &= \sigma_\infty w_1 \eta, \quad v^{(0)}|_{\eta=0} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$Z^{(1)}$ 의 複素포텐셜은

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} \zeta^{-(2n+1)}, \\ \psi_1(\zeta) &= -D_0 \log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \zeta^{-2n} \end{aligned} \quad (15)$$

이며, 여기에서 解析모델이 x -軸에 대하여 對稱이므로 F_{2n} 및 D_{2n} 은 實常數 (real constant) 이다. $Z^{(1)}$ 에 대응하는 應力과 變位는 式 (15) 를 式 (4) 및 (5) 에 代入하고

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(\eta/\xi) \\ \zeta &= \xi + i\eta = r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (16)$$

을 쓰면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= -2 \sigma_\infty \left[F_0 r^{-2} (\cos 2\theta + \cos 4\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} D_0 r^{-2} \cos 2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1) \right. \\ &\quad \left. (F_{2n} r^{-2(n+1)} \cos 2(n+1)\theta + (n+1) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. \times F_{2n} r^{-2(n+2)} \cos 2(n+2)\theta + n D_{2n} r^{-2(n+1)} \right. \\ &\quad \left. \times \cos 2(n+1)\theta \right] \\ \sigma_x^{(1)} &= 2 \sigma_\infty \left[F_0 \{ r^{-2} \cos 4\theta - r^{-2} \cos 2\theta \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} D_0 r^{-2} \cos 2\theta - \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1) \right. \\ &\quad \left. (F_{2n} r^{-2(n+1)} \cos 2(n+1)\theta - (n+1) \right. \\ &\quad \left. \times F_{2n} r^{-2(n+2)} \cos 2(n+2)\theta - n D_{2n} r^{-2(n+1)} \right. \\ &\quad \left. \cos 2(n+1)\theta \right] \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -2 \sigma_\infty \left[F_0 r^{-2} \sin 4\theta + \frac{1}{2} D_0 r^{-2} \right. \\ &\quad \left. \times \sin 2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1) \{ (n+1) \right. \\ &\quad \left. \times F_{2n} r^{-2(n+1)} \sin 2(n+2)\theta \right. \\ &\quad \left. + n D_{2n} r^{-2(n+1)} \sin 2(n+1)\theta \} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Eu^{(1)} &= \sigma_\infty w_1 \left[F_0 r^{-1} \{ (3-\nu) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) \cos 3\theta \} + D_0 (1+\nu) r^{-1} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [r^{-(2n+1)} \{ (3-\nu) F_{2n} \cos(2n+1)\theta \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) (2n+1) F_{2n} \cos(2n+3)\theta \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu) n D_{2n} \cos(2n+1)\theta \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ev^{(1)} &= \sigma_\infty w_1 \left[F_0 r^{-1} \{ (1+\nu) \sin 3\theta \right. \\ &\quad \left. - (3-\nu) \sin \theta \} + D_0 (1+\nu) r^{-1} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} [r^{-(2n+1)} \{ (3-\nu) F_{2n} \sin(2n+1)\theta \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) (2n+1) F_{2n} \sin(2n+3)\theta \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu) n D_{2n} \sin(2n+1)\theta \} \right] \end{aligned}$$

두께가 變化하는 境界上에서는 $\xi=1$ 이므로, $r = (1+\eta^2)^{1/2}$, $\theta = \tan^{-1}\eta$ 이며, 이 관계를 式 (17) 에 代入하여 정리하면, $Z^{(1)}$ 에 대응하는 두께가 變化하는 境界上에서의 應力과 變位가 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}|_{\xi=1} &= -\sigma_\infty \left[\frac{2F_0 + D_0}{1 + \eta^2} \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(2n+1)(F_{2n} + nD_{2n})}{(1+\eta^2)^{n+1}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2n(2n-1)F_{2n-2}}{(1+\eta^2)^n} \right\} \cos 2(n+1)\theta \right] \\ \tau_{xy}^{(1)}|_{\xi=1} &= -\sigma_\infty \left[\frac{D_0}{1 + \eta^2} \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2n(2n+1)D_{2n}}{(1+\eta^2)^{n+1}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2n(2n-1)F_{2n-2}}{(1+\eta^2)^n} \right\} \sin 2(n+1)\theta \right] \\ Eu^{(1)}|_{\xi=1} &= \sigma_\infty w_1 \left[\frac{(1+\nu)D_0 + (3-\nu)F_0}{(1+\eta^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. \times \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{(1+\nu)2nD_{2n} + (3-\nu)F_{2n}}{(1+\eta^2)^{(2n+1)/2}} \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(1+\nu)(2n-1)F_{2n-2}}{(1+\eta^2)^{(2n-1)/2}} \cos(2n+1)\theta \Bigg] \\
 Ev^{(1)}|_{\epsilon=1} = & \sigma_{\infty} w_1 \left[\frac{(1+\nu)D_0 - (3-\nu)F_0}{(1+\eta^2)^{1/2}} \right. \\
 & \times \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1+\nu)2nD_{2n} - (3-\nu)F_{2n}}{(1+\eta^2)^{(2n+1)/2}} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(1+\nu)(2n-1)F_{2n-2}}{(1+\eta^2)^{(2n-1)/2}} \sin(2n+1)\theta \right] \right]
 \end{aligned}$$

$Z^{(2)}$ 의 複素포텐셜은

$$\begin{aligned}
 \phi_2(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(m) \sin h(m\zeta) dm \\
 \psi_2(\zeta) &= \int_0^{\infty} \left\{ A(m) \cos h(m\zeta) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi}{2} B(m) \sin h(m\zeta) \right\} dm \quad (19)
 \end{aligned}$$

이며, 係가 對稱이므로 $A(m)$ 과 $B(m)$ 은 實係數이다.

$Z^{(2)}$ 에 대응하는 應力場과 變位場은 式 (4)와 (5)에 의하여

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(2)} &= -\sigma_{\infty} \int_0^{\infty} \{ A \cos h(m\xi) \\
 & \quad + \xi B \sin h(m\xi) \} m^2 \cos(m\eta) dm \\
 \sigma_y^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} \{ (m^2 A + 2mB) \cos h(m\xi) \\
 & \quad + \xi m^2 B \sin h(m\xi) \} \cos(m\eta) dm \\
 \tau_{xy}^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} \{ (m^2 A + mB) \sin h(m\xi) \\
 & \quad + \xi m^2 B \cos h(m\xi) \} \sin(m\eta) dm \\
 Eu^{(2)} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [\{ (1-\nu)B - (1+\nu)mA \} \\
 & \quad \sin h(m\xi) - (1+\nu)\xi mB \cos h(m\xi)] \\
 & \quad \times \cos(m\eta) dm \\
 Ev^{(2)} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [\{ 2B + (1+\nu)mA \} \\
 & \quad \times \cos h(m\xi) + (1+\nu)\xi mB \sin h(m\xi)] \\
 & \quad \times \sin(m\eta) dm
 \end{aligned} \quad (20)$$

이며, 式 (13), (14), (17) 및 (20)을 종합하면, $Z(\zeta) = Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(3)}$ 가 式 (7)의 境界條件을 잘 만족하고 있음을 알 수가 있다.

두께가 變化하는 境界에서, $Z^{(2)}$ 에 대응하는 應力과 變位는 式 (20)에 $\xi=1$ 을 代入하고

$$c = \cos h m, \quad s = \sin h m \quad (21)$$

을 써서 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(2)}|_{\epsilon=1} &= -\sigma_{\infty} \int_0^{\infty} (cA + sB) m^2 \cos(m\eta) dm \\
 \tau_{xy}^{(2)}|_{\epsilon=1} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} [msA + (s+mc)B] \\
 & \quad \times m \sin(m\eta) dm \\
 Eu^{(2)}|_{\epsilon=1} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [-(1+\nu)msA \\
 & \quad + \{ (1-\nu)s - (1+\nu)mc \} B] \cos(m\eta) dm
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 Ev^{(2)}|_{\epsilon=1} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [(1+\nu)mcA \\
 & \quad + \{ 2c + (1+\nu)ms \} B] \sin(m\eta) dm
 \end{aligned}$$

(2) 領域 II의 應力函數

領域 II에는 龜裂이 포함되지 않으므로 다음과 같은 應力函數를 導入한다.

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= Z_2^{(0)} + Z_2^{(2)} \\
 Z_2^{(0)} &= \sigma_{\infty} w_1^2 Re [\bar{\zeta}_2 \Phi_0(\zeta_2) + \Psi_0(\zeta_2)] \\
 Z_2^{(2)} &= \sigma_{\infty} w_1^2 Re [\bar{\zeta}_2 \Phi_2(\zeta_2) + \Psi_2(\zeta_2)] \quad (23)
 \end{aligned}$$

여기에서 $Z_2^{(0)}$ 는 無限遠方에서의 境界條件을 만족시키기 위한 것이고, $Z_2^{(2)}$ 는 自由境界($\xi_2=0$)에서와 두께가 變化하는 境界($\xi_2=\omega$)에서의 適合條件과 平衡條件을 만족시키기 위한 것이다.

$Z_2^{(0)}$ 의 複素포텐셜은 다음과 같이 假定한다.

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(\zeta_2) &= \frac{1}{4} \{ \zeta_2 - (1+\omega) \} \\
 \Psi_0(\zeta_2) &= \frac{1}{4} \left\{ \zeta_2 - \frac{3}{2}(1+\omega) \right\}^2 \quad (24)
 \end{aligned}$$

$Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 應力과 變位는 式 (4)와 (5)에 의하여

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_2}^{(0)} &= \sigma_{\infty} Re \left[2 \left(\frac{1}{4} \right) - \bar{\zeta}_2(0) - \frac{1}{4}(2) \right] = 0 \\
 \sigma_{y_2}^{(0)} &= \sigma_{\infty} Re \left[2 \left(\frac{1}{4} \right) + \bar{\zeta}_2(0) + \frac{1}{4}(2) \right] = \sigma_{\infty} \\
 \tau_{x_2 y_2}^{(0)} &= \sigma_{\infty} Im \left[\bar{\zeta}_2(0) + \frac{1}{4}(2) \right] = 0 \\
 Eu_2^{(0)} &= -\sigma_{\infty} w_1 \nu \{ \xi_2 - (1+\omega) \} \\
 Ev_2^{(0)} &= \sigma_{\infty} w_1 \eta_2
 \end{aligned} \quad (25)$$

로서 式 (8)의 境界條件을 만족하고 있으며, $Eu_2^{(0)}|_{\epsilon=1} = \sigma_{\infty} w_1 \nu$ 이므로, 式 (14)에서 $Eu^{(0)}|_{\epsilon=1} = -\sigma_{\infty} w_1 \nu$ 인 것과 比較하면 $Z^{(0)}$ 와 $Z_2^{(0)}$ 는 두께가 變化하는 境界에서의 適合條件(式 9)과 平衡條件(式 10)을 만족하고 있는 것을 알 수가 있다.

$Z_2^{(2)}$ 의 複素포텐셜은 다음과 같이 假定한다.

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(\zeta_2) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ mG(m) \cos h(m\zeta_2) \\
 & \quad + H(m) \sin h(m\zeta_2) \} dm \\
 \Psi_2(\zeta_2) &= \int_0^{\infty} \left[-G(m) \sin h(m\zeta_2) \right. \\
 & \quad + \frac{\zeta_2}{2} \{ mG(m) \cos h(m\zeta_2) \\
 & \quad \left. + H(m) \sin h(m\zeta_2) \} \right] dm \quad (26)
 \end{aligned}$$

여기에서 係가 x_2 -軸에 대칭이므로 $G(m)$ 과 $H(m)$ 은 實係數를 假定한다.

$Z_2^{(2)}$ 에 대응하는 應力場과 變位場은, 式 (4)와 (5)에 式 (26)을 代입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_2}^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} [G \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad - \xi_2 \{mG \cos h(m\xi_2) \\
 &\quad + H \sin h(m\xi_2)\}] m^2 \cos(m\eta_2) dm \\
 \sigma_{x_2}^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} [m^2 G \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad + 2mH \cos h(m\xi_2) \\
 &\quad + \xi_2 m^2 \{mG \cos h(m\xi_2) \\
 &\quad + H \sin h(m\xi_2)\}] \cos(m\eta_2) dm \\
 \tau_{x_2 y_2}^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} [mH \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad + \xi_2 m^2 \{mG \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad + H \cos h(m\xi_2)\}] \sin(m\eta_2) dm \\
 Eu_2^{(2)} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [2mG \cos h(m\xi_2) \\
 &\quad + (1-\nu)H \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad - (1+\nu)\xi_2 m \{mG \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad + H \cos h(m\xi_2)\}] \cos(m\eta_2) dm \\
 Ev_2^{(2)} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [mG(1-\nu) \sin h(m\xi_2) \\
 &\quad + 2H \cos h(m\xi_2) + (1+\nu)\xi_2 m \{mG \cos h \\
 &\quad (m\xi_2) + H \sin h(m\xi_2)\}] \sin(m\eta_2) dm
 \end{aligned} \tag{27}$$

이 되어, $Z_2^{(0)}$ 와 함께 式 (8)의 境界條件을 잘 만족한다.

두께가 변화하는 境界에서는 $\xi_2 = \omega$ 이므로 式 (27)에 代入하고

$$c_2 = \cos h(m\omega), \quad s_2 = \sin h(m\omega) \tag{28}$$

로 표시하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_2}^{(2)} |_{\xi_2=\omega} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} \{ (s_2 - \omega mc_2) G - s_2 H \} \\
 &\quad \times m^2 \cos(m\eta_2) dm \\
 \tau_{x_2 y_2}^{(2)} |_{\xi_2=\omega} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} \{ \omega m^2 s_2 G + (s_2 + \omega mc_2) H \} \\
 &\quad \times m \sin(m\eta_2) dm \\
 Eu_2^{(2)} |_{\xi_2=\omega} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [\{ 2mc_2 - (1+\nu)\omega m^2 s_2 \} \\
 &\quad \times G + \{ (1-\nu)s_2 - (1+\nu)\omega mc_2 \} H] \\
 &\quad \times \cos(m\eta_2) dm \\
 Ev_2^{(2)} |_{\xi_2=\omega} &= \sigma_{\infty} w_1 \int_0^{\infty} [(1-\nu)ms_2 \\
 &\quad + (1+\nu)\omega m^2 c_2 \} G + \{ 2c_2 \\
 &\quad + (1+\nu)\omega ms_2 \} H] \sin(m\eta_2) dm
 \end{aligned} \tag{29}$$

3. 두께가 변화하는 境界에서의 適合 및 平衡條件

領域 I 과 領域 II 에 대하여 獨立的으로 設定된 應力

函數들에 대응하는 應力場 및 變位場은 두께가 변화하는 境界에서의 適合條件인 式 (9)와 平衡條件인 式 (10)을 만족해야 한다. $Z^{(0)}$ 와 $Z^{(1)}$ 는 이미 이들 條件을 만족하고 있으므로 式 (22)와 式 (29)를 式 (9) 및 式 (10)에 代入하고, $\beta = t_2/t$, $\eta_2 = -\eta$ 를 써서, $Z^{(1)}$ 에 대응하는 應力과 變位를 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{\sigma_{\infty} w_1} u^{(1)} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} [\{ (1+\nu)\omega m^2 s_2 - 2mc_2 \} \\
 &\quad \times G + \{ (1+\nu)\omega mc_2 - (1-\nu)s_2 \} H \\
 &\quad + (1+\nu)msA + \{ (1+\nu)mc \\
 &\quad - (1-\nu)s \} B] \cos(m\eta) dm \\
 \frac{E}{\sigma_{\infty} w_1} v^{(1)} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} [\{ (1-\nu)ms_2 \\
 &\quad + (1+\nu)\omega m^2 c_2 \} G + \{ 2c_2 \\
 &\quad + (1+\nu)\omega ms_2 \} H - (1+\nu)mcA \\
 &\quad - \{ 2c + (1+\nu)ms \} B] \sin(m\eta) dm \\
 \frac{\sigma_x^{(1)}}{\sigma_{\infty}} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} [\beta \{ s_2 - \omega mc_2 \} G - \beta s_2 H \\
 &\quad + cA + sB] m^2 \cos(m\eta) dm \\
 \frac{\tau_{xy}^{(1)}}{\sigma_{\infty}} \Big|_{\xi=1} &= - \int_0^{\infty} [\beta m^2 s_2 G + \beta \{ s_2 + \omega mc_2 \} H \\
 &\quad + msA + (s + mc) B] m \sin(m\eta) dm
 \end{aligned} \tag{30}$$

式 (30)의 積分을 해결하기 위하여 Fourier 變換을 行하고, 다음을 定義한다.

$$\begin{aligned}
 R(m) &= \frac{2E}{\pi \sigma_{\infty} w_1} \int_0^{\infty} u^{(1)} \Big|_{\xi=1} \cos(m\eta) d\eta \\
 S(m) &= \frac{2E}{\pi \sigma_{\infty} w_1} \int_0^{\infty} v^{(1)} \Big|_{\xi=1} \sin(m\eta) d\eta \\
 P(m) &= \frac{2}{\pi \sigma_{\infty}} \int_0^{\infty} \sigma_x^{(1)} \Big|_{\xi=1} \cos(m\eta) d\eta \\
 Q(m) &= \frac{2}{\pi \sigma_{\infty}} \int_0^{\infty} \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{\xi=1} \sin(m\eta) d\eta
 \end{aligned} \tag{31}$$

Fourier 의 逆變換에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{\sigma_{\infty} w_1} u^{(1)} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} R(m) \cos(m\eta) dm \\
 \frac{E}{\sigma_{\infty} w_1} v^{(1)} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} S(m) \sin(m\eta) dm \\
 \frac{\sigma_x^{(1)}}{\sigma_{\infty}} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} P(m) \cos(m\eta) dm \\
 \frac{\tau_{xy}^{(1)}}{\sigma_{\infty}} \Big|_{\xi=1} &= \int_0^{\infty} Q(m) \sin(m\eta) dm
 \end{aligned} \tag{32}$$

式 (32)를 式 (30)에 代入하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\{ (1+\nu)\omega m^2 s_2 - 2mc_2 \} G + \{ (1+\nu)\omega mc_2 \\
 &\quad - (1-\nu)s_2 \} H + (1+\nu)msA \\
 &\quad + \{ (1+\nu)mc - (1-\nu)s \} B = R(m) \\
 &\{ (1-\nu)ms_2 + (1+\nu)\omega m^2 c_2 \} G + \{ 2c_2 \\
 &\quad + (1+\nu)\omega ms_2 \} H - (1+\nu)mcA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -[2c + (1+\nu)ms]B = S(m) \\
 & \beta m^2(s_2 - \omega mc_2)G - \beta m^2 s_2 H + m^2 c A \\
 & + m^2 s B = P(m) \\
 & \beta m^3 s_2 G + \beta m(s_2 + \omega mc_2)H + m^2 s A \\
 & + m(s + mc)B = -Q(m)
 \end{aligned} \tag{33}$$

式 (33)의 연립방정식을 풀어 $B(m)$ 과 $A(m)$ 을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 B(m) &= C_R^B(m)R + C_S^B(m)S \\
 & + C_P^B(m)P + C_Q^B(m)Q \\
 A(m) &= C_R^A(m)R + C_S^A(m)S \\
 & + C_P^A(m)P + C_Q^A(m)Q
 \end{aligned} \tag{34}$$

여기에서 $C_R^B(m) \sim C_Q^A(m)$ 은 式 (33)의 解의 $R \sim Q$ 의 係數이다. R, S, P 및 Q 는 式 (18)을 式 (31)에 代入하여 積分하므로써, 다음과 같이 구해진다. 이 때의 積分은 다음 公式⁽⁴⁾을 使用한다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{\cos n\theta \cos m\eta d\eta}{(1+\eta^2)^{n/2}} &= \int_0^\infty \frac{\sin n\theta \sin m\eta d\eta}{(1+\eta^2)^{n/2}} \\
 &= \frac{\pi e^{-m} m^{n-1}}{2(n-1)!} \\
 \int_0^\infty \frac{\cos(n+2)\theta \cos m\eta d\eta}{(1+\eta^2)^{n/2}} & \\
 &= \int_0^\infty \frac{\sin(n+2)\theta \sin m\eta d\eta}{(1+\eta^2)^{n/2}} \\
 &= \frac{\pi e^{-m} m^{n-1} (2m-n)}{2n!}
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 R(m) &= e^{-m} \\
 & \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{2\{(1+\nu) + (1+\nu)(m-n)\} F_{2n} m^{2n}}{(2n)!} \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^\infty \frac{(1+\nu) D_{2n} m^{2n}}{(2n-1)!} \right] \\
 S(m) &= e^{-m} \\
 & \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{2\{(1+\nu)(m-n) - 2\} F_{2n} m^{2n}}{(2n)!} \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^\infty \frac{(1+\nu) D_{2n} m^{2n}}{(2n-1)!} \right] \\
 P(m) &= -2e^{-m} \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(m-n) F_{2n} m^{(2n+1)}}{(2n)!} \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^\infty \frac{D_{2n} m^{(2n+1)}}{2(2n-1)!} \right] \\
 Q(m) &= -2e^{-m} \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(m-n-1) F_{2n} m^{(2n+1)}}{(2n)!} \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^\infty \frac{D_{2n} m^{(2n+1)}}{2(2n-1)!} \right]
 \end{aligned} \tag{36}$$

式 (36)에서 n 을 p 로 代치하고, 式 (34)에 代入하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 B(m) &= 2e^{-m} \sum_{p=0}^\infty \frac{f^B(m, p)}{(2p)!} F_{2p} \\
 & + e^{-m} \sum_{p=0}^\infty \frac{g^B(m, p)}{(2p-1)!} D_{2p} \\
 A(m) &= 2e^{-m} \sum_{p=0}^\infty \frac{f^A(m, p)}{(2p)!} F_{2p} \\
 & + e^{-m} \sum_{p=0}^\infty \frac{g^A(m, p)}{(2p-1)!} D_{2p}
 \end{aligned} \tag{37}$$

여기에서

$$\begin{aligned}
 f^B(m, p) &= C_R^B(m) \{(1-\nu) \\
 & + (1+\nu)(m-p)\} m^{2p} \\
 & + C_S^B(m) \{(1+\nu)(m-p) - 2\} m^{2p} \\
 & - C_P^B(m)(m-p) m^{2p+1} \\
 & - C_Q^B(m)(m-p-1) m^{2p+1} \\
 g^B(m, p) &= (1+\nu) m^{2p} \{C_R^B(m) + C_S^B(m)\} \\
 & - m^{2p+1} \{C_P^B(m) + C_Q^B(m)\} \\
 f^A(m, p) &= C_R^A(m) \{(1-\nu) \\
 & + (1+\nu)(m-p)\} m^{2p} \\
 & + C_S^A(m) \{(1+\nu)(m-p) - 2\} m^{2p} \\
 & - C_P^A(m)(m-p) m^{2p+1} \\
 & - C_Q^A(m)(m-p-1) m^{2p+1} \\
 g^A(m, p) &= (1+\nu) m^{2p} \{C_R^A(m) + C_S^A(m)\} \\
 & - m^{2p+1} \{C_P^A(m) + C_Q^A(m)\}
 \end{aligned} \tag{38}$$

式 (37)을 式 (19)에 代入하고, $\sinh(m\zeta)$ 와 $\cosh(m\zeta)$ 를 級數로 표시하여 정리하면 $\phi_2(\zeta)$ 와 $\psi_2(\zeta)$ 가 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \phi_2(\zeta) &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{p=0}^\infty \left[\left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-m} m^{2n+1} f^B(m, p)}{(2n+1)!(2p)!} dm \right\} F_{2p} \right. \\
 & \left. + \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-m} m^{2n+1} g^B(m, p)}{2(2n+1)!(2p-1)!} dm \right\} D_{2p} \right] \zeta^{(2n+1)} \\
 & = \sum_{n=0}^\infty M_{2n} \zeta^{(2n+1)}
 \end{aligned} \tag{39}$$

여기에서 M_{2n} 은 다음과 같이 定義한다.

$$M_{2n} = \sum_{p=0}^\infty (\delta_{2p}^{(2n)} F_{2p} + \gamma_{2p}^{(2n)} D_{2p}) \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{2p}^{(2n)} &= \int_0^\infty \frac{e^{-m} m^{2n+1} f^B(m, p)}{(2n+1)!(2p)!} dm, \\
 \gamma_{2p}^{(2n)} &= \int_0^\infty \frac{e^{-m} m^{2n+1} g^B(m, p)}{2(2n+1)!(2p-1)!} dm
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2(\zeta) &= A_0 + \sum_{n=0}^\infty \sum_{p=0}^\infty \left[\int_0^\infty \frac{2e^{-m} m^{2n+1}}{(2n+2)!(2p)!} \right. \\
 & \left. \{m f^A(m, p) + (n+1) f^B(m, p)\} dm F_{2p} \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \frac{e^{-m} m^{2n+1}}{(2n+2)!(2p-1)!} \{m g^A(m, p) \right. \\
 & \left. + (n+1) g^B(m, p)\} dm D_{2p} \right] \zeta^{2n+2} \\
 & = A_0 + \sum_{n=0}^\infty K_{2n} \zeta^{2n+2}
 \end{aligned} \tag{42}$$

여기에서 $A_0 = \int_0^\infty A(m) dm$ 이고, K_{2n} 은 다음과 같이 定義한다.

$$K_{2n} = \sum_{p=0}^{\infty} (\beta_{2p}^{(2n)} F_{2p} + \alpha_{2p}^{(2n)} D_{2p}) \quad (43)$$

$$\beta_{2p}^{(2n)} = \int_0^\infty \frac{2 e^{-m} m^{2n+1}}{(2n+2)! (2p)!} \{m f^A(m, p) + (n+1) f^B(m, p)\} dm$$

$$\alpha_{2p}^{(2n)} = \int_0^\infty \frac{e^{-m} m^{2n+1}}{(2n+2)! (2p-1)!} \{m g^A(m, p) + (n+1) g^B(m, p)\} dm \quad (44)$$

위의 $\alpha_{2p}^{(2n)}, \beta_{2p}^{(2n)}, \gamma_{2p}^{(2n)}$ 및 $\delta_{2p}^{(2n)}$ 은 指定된 β, ν, ω 값에 대하여 Gauss-Laguerre 數值積分法을 써서 상당히 精密한 값을 얻을 수 있다. 이 값들은 n 가 0에서 ∞ 까지, 또 p 가 0에서 ∞ 까지 無限히 구해지겠으나, 應力解析 또는 應力擴大係數解析의 경우 λ 에 관한 無限級數형태로 나타나며, 이 級數들이 一般的으로 매우 빨리 수렴하게 되므로, n 와 p 에 대하여 어떤 有限한 값까지 계산하면 충분하다.

4. 應力擴大係數

應力函數 $Z^{(1)}$ (式 15)에 대응하는 龜裂面에서의 境界條件을 다음과 같이 표시할 수 있다⁽⁵⁾.

$$D_{2n} = \frac{1}{2} a_0^{(2n)} \lambda^{2n+2} + \sum_{p=0}^{\infty} (K_{2p} + M_{2p}) a_{2p}^{(2n)} \lambda^{2n+2p+2}$$

$$F_{2n} = -\frac{1}{2} C_0^{(2n)} \lambda^{2n+2} - \sum_{p=0}^{\infty} (K_{2p} + M_{2p}) C_{2p}^{(2n)} \lambda^{2n+2p+2} \quad (45)$$

여기에서

$$a_0^{(2n)} = b_n = \frac{1}{2^{2n} \cdot n} (2n-1)$$

$$a_{2p}^{(2n)} = \frac{p+1}{2^{2p}} (2p+1)$$

$$C_0^{(2n)} = a_{n+1} = \frac{1}{2^{2n+1} (n+1)} (2n)$$

$$a_{2p}^{(2n)} = \frac{1}{2^{2p+2}} \left[4 \left(\frac{2p+1}{p} \right) \delta_n + 2p \sum_{q=1}^{p+1} \left(\frac{2p+2}{p-q+1} \right) A_{n-q, 2q} \right] \quad (46)$$

$$C_{2p}^{(2n)} = \frac{p+1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^p \left(\frac{2p+1}{p-q} \right) A_{n-q, 2q+1}$$

이며, a_n 와 b_n 및 $A_{n,q}$ 는 각각 다음과 같은 級數의 係數이다.

$$\sqrt{1-X^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^{2n}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{2n-1} n} (2n-2)$$

$$\log(1 + \sqrt{1-X^2}) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n X^{2n}$$

$$b_n = \frac{1}{2^{2n} n} (2n-1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) a_n \quad (47)$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1-X^2}}{X}\right)^q = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,q} X^{2n+q}$$

$$A_{n,q} = 2 A_{n+1, q-1} - A_{n+1, q-2}$$

$$A_{0,q} = 1/2^q, \quad A_{n,1} = a_{n+1}, \quad A_{n,2} = 2 a_{n+2}$$

$$A_{n,3} = 4 a_{n+3} - a_{n+2}, \quad A_{n,4} = 4(2 a_{n+4} - a_{n+3})$$

.....

式 (40), (43) 및 式 (45)를 연립으로 풀어서 M_{2n} , K_{2n} 및 D_{2n}, F_{2n} 을 구해내기 위하여는 逐次計算法 (perturbation method)⁽⁶⁾을 쓴다. 즉 $K_{2n} \sim F_{2n}$ 을 λ 에 관한 無限級數로 표시하여 다음과 같이 假定한다.

$$K_{2n} = \sum_{q=0}^{\infty} K_{2n}^{(2q)} \lambda^{2q+2}$$

$$= K_{2n}^{(2)} \lambda^2 + K_{2n}^{(4)} \lambda^4 + K_{2n}^{(6)} \lambda^6 + \dots$$

$$M_{2n} = \sum_{q=0}^{\infty} M_{2n}^{(2q)} \lambda^{2q+2}$$

$$= M_{2n}^{(2)} \lambda^2 + M_{2n}^{(4)} \lambda^4 + M_{2n}^{(6)} \lambda^6 + \dots$$

$$D_{2n} = \sum_{q=0}^{\infty} D_{2n}^{(2n+2q)} \lambda^{2n+2q+2} \quad (48)$$

$$= D_{2n}^{(2n+2)} \lambda^{2n+2} + D_{2n}^{(2n+4)} \lambda^{2n+4} + D_{2n}^{(2n+6)} \lambda^{2n+6} + \dots$$

$$F_{2n} = \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n}^{(2n+2q)} \lambda^{2n+2q+2}$$

$$= F_{2n}^{(2n+2)} \lambda^{2n+2} + F_{2n}^{(2n+4)} \lambda^{2n+4} + F_{2n}^{(2n+6)} \lambda^{2n+6} + \dots$$

式 (40), (43), (45) 및 式 (48)을 연립으로 풀면 다음을 얻는다.

$$K_{2n}^{(2q+2)} = \sum_{p=0}^q (\alpha_{2p}^{(2n)} D_{2p}^{(2q+2)} + \beta_{2p}^{(2n)} F_{2p}^{(2q+2)})$$

$$M_{2n}^{(2q+2)} = \sum_{p=0}^q (\gamma_{2p}^{(2n)} D_{2p}^{(2q+2)} + \delta_{2p}^{(2n)} F_{2p}^{(2q+2)})$$

$$D_{2n}^{(2n+2)} = \frac{1}{2} a_0^{(2n)}$$

$$D_{2n}^{(2n+2q+4)} = \sum_{p=0}^q a_{2p}^{(2n)} (K_{2p}^{(2q-2p+2)} + M_{2p}^{(2q-2p+2)}) \quad (49)$$

$$F_{2n}^{(2n+2)} = -\frac{1}{2} C_0^{(2n)}$$

$$F_{2n}^{(2n+2q+4)} = -\sum_{p=0}^q C_{2p}^{(2n)} (K_{2p}^{(2q-2p+2)} + M_{2p}^{(2q-2p+2)})$$

크랙팁 (crack tip)에서의 應力擴大係數 K_I 은 다음 式으로 定義된다⁽⁷⁾.

$$K_I = 2 \sqrt{2\pi} \sigma_\infty \sqrt{\omega_1} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \sqrt{\zeta - 1} \phi'(\zeta)$$

$$= \sigma_\infty \sqrt{\pi a} F(\lambda) \quad (50)$$

여기에서 $\sigma_0 \sqrt{\pi a}$ 는 均一無限板內에 있는 龜裂의 應力擴大係數이며, $F(\lambda)$ 는 修正係數(correction factor)이다. $\lambda = a/w_1$ 이고, $X = \lambda/\zeta$ 로 定義하면 $F(\lambda)$ 는 다음 式으로 표시할 수 있다.

$$F(\lambda) = 2\sqrt{2} \lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} \sqrt{1-X} \phi'(X, \lambda) \quad (51)$$

$\phi(\zeta)$ 는 $\phi_0(\zeta)$ (式 12), $\phi_1(\zeta)$ (式 15) 및 $\phi_2(\zeta)$ (式 19)의 합이며, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 \\ &= \frac{1}{4}\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\zeta^{-(2n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n}\zeta^{2n+1} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\phi'(\zeta) = \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \{M_{2n}\zeta^{2n} - F_{2n}\zeta^{-(2n+2)}\} \quad (53)$$

式 (53)에 式 (48)을 代入하고 $X = \lambda/\zeta$ 를 쓰면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi'(X, \lambda) &= \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left[\sum_{q=0}^{\infty} \{M_{2n}^{(2q+2)} \lambda^{2q+2}\} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\lambda}{X} \right)^{2n} - \sum_{q=0}^{\infty} \{F_{2n}^{(2q+2)} \lambda^{2q}\} X^{2n+2} \right] \end{aligned} \quad (54)$$

式 (54)를 式 (51)에 代入하여 極限值를 구하면

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}(\beta, \omega) \lambda^{2n} \quad (55)$$

를 얻으며 이 級數는 매우 빨리 수렴하므로 $n=12$ 까지 계산하면 충분하다.

5. 數值計算 및 考察

數值計算을 위한 컴퓨터 프로그램의 플로우 차트(flow chart)는 Fig. 3과 같다. 本解析에 들어가기 전

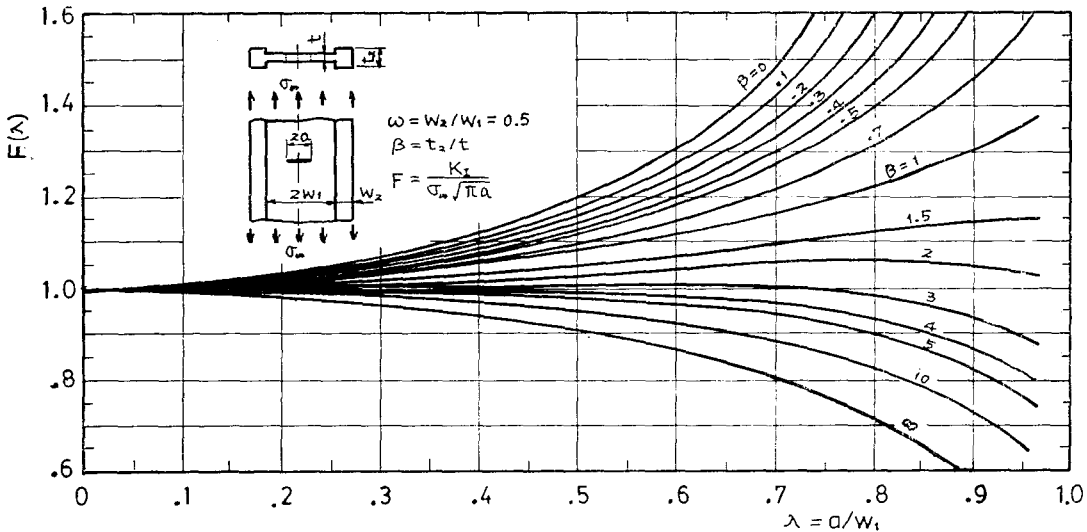


Fig. 4 Correction factor values for center cracked finite width and various thickness plate for width ratio $\omega=0.5$

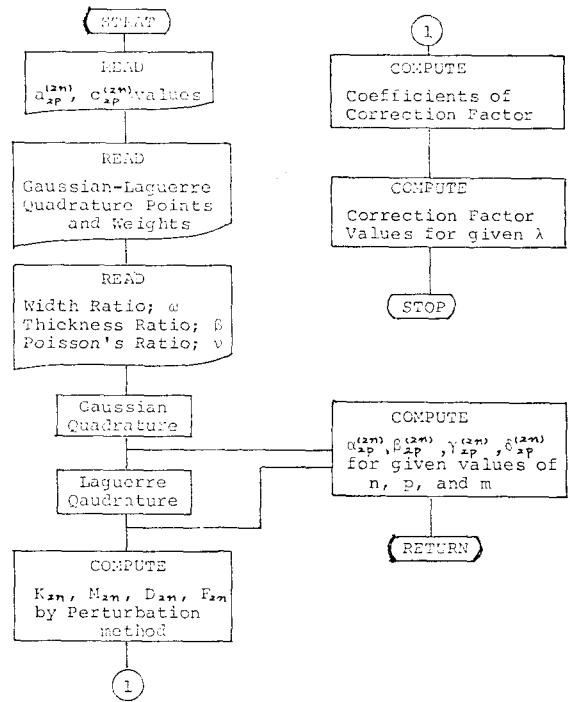


Fig. 3 Flow chart of the program to calculate the correction factor values for the center crack which is in a finite width plate with variable thickness

에 프로그램의 신뢰도를 검토하기 위하여 Isida⁽⁴⁾가 설정했던 應力函數와 境界條件을 써서 計算을 行한 結果 Fig. 1b와 一致했으며 특히 $\beta=1$ (두께가 均一한 板

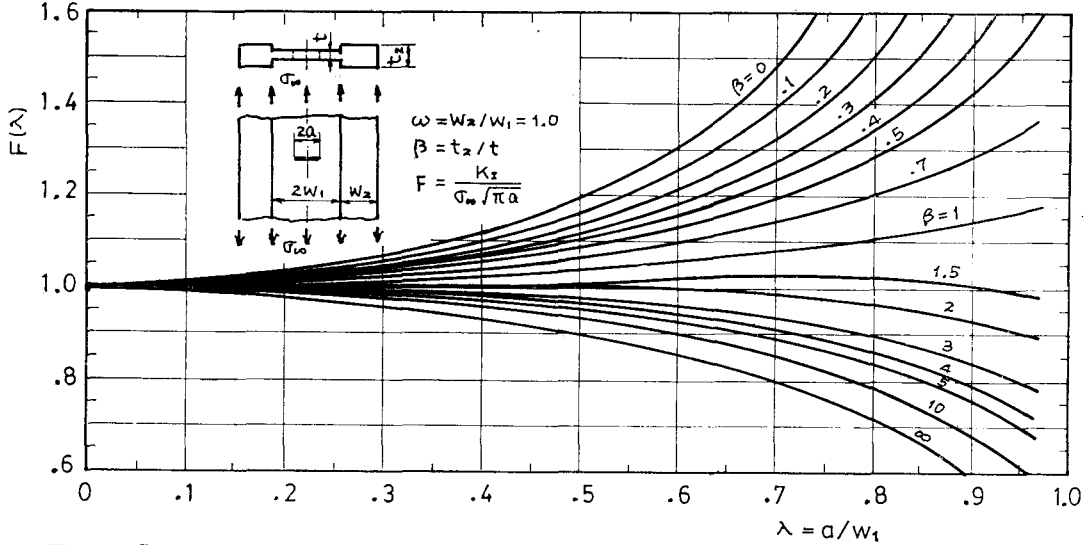


Fig. 5 Correction factor values for center cracked finite width and various thickness plate for width ratio $\omega=1.0$

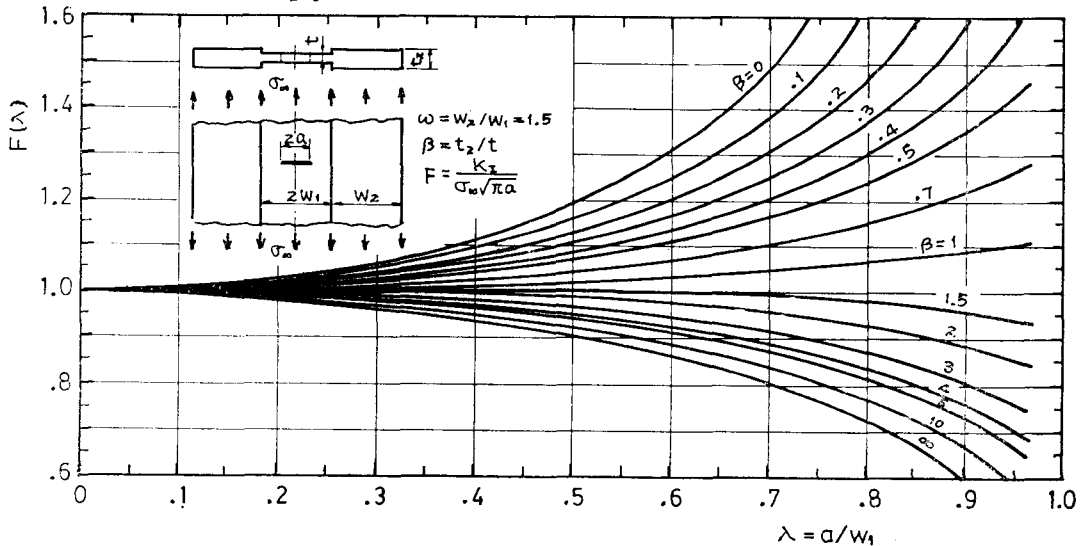


Fig. 6 Correction factor values for center cracked finite width and various thickness plate for width ratio $\omega=1.5$

材)일 때의 修正係數값은 均一無限板內에 龜裂이 規則的으로 存在하는 경우, Westergard의 應力函數에 의한 解析結果인⁽⁸⁾

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{4}{\pi \lambda} \tan \frac{\pi \lambda}{4}}$$

와 $\lambda=0 \sim 0.98$ 사이에서 小數點以下 4 자리까지 一致 (誤差: $\pm 0.01\%$ 以下)했다.

두께가 變化하는 有限幅板材에 대한 本解析에서, 幅比 ω 가 0.5, 1.0, 1.5 인 경우의 數值解析結果가 Fig. 4~Fig. 6에 주어져 있다. 各 경우에 있어서 $\beta=1$ 일

때에는 板幅이 $2W=2(1+\omega)w_1$ 인 두께가 均一한 有限幅板材의 경우가 되며, 이 경우의 修正係數들을 Feddersen 式⁽⁹⁾에 의한 값들과 比較해 놓은 것이 Table 1이며, 本解析 結果가 $\beta=1$ 인 경우에는 Feddersen 式과 잘 一致하고 있는 것을 알 수가 있다.

또 ω 값이 임의인 各 경우에서 $\beta=0$ 인 特別한 경우에는 板幅이 $2w=2w_1$ 인 ($\omega=0$) 두께가 均一한 板材의 경우가 되며, 이 경우의 修正係數값을 Feddersen 式에 의한 값과 比較한 것이 Table 2로서, 이 경우에도 Feddersen 式과 잘 一致하고 있는 것을 볼 수가 있다.

Table 1 Comparison of computed correction factor values for $\beta=1$ with corresponding Feddersen's

λ	$\omega=0.5$			$\omega=1.0$			$\omega=1.5$		
	Computed $F(\lambda)$	Feddersen's F	Difference %	Computed $F(\lambda)$	Feddersen's F	Difference %	Computed $F(\lambda)$	Feddersen's F	Difference %
0.1	1.0026	1.0028	0.02	1.0014	1.0015	0.01	1.0009	1.0010	0.01
0.2	1.0107	1.0111	0.04	1.0060	1.0062	0.02	1.0038	1.0040	0.02
0.3	1.0245	1.0254	0.09	1.0136	1.0141	0.05	1.0086	1.0090	0.04
0.4	1.0448	1.0462	0.13	1.0246	1.0254	0.08	1.0154	1.0161	0.07
0.5	1.0726	1.0746	0.19	1.0392	1.0404	0.12	1.0244	1.0254	0.10
0.6	1.1093	1.1118	0.23	1.0578	1.0594	0.15	1.0357	1.0371	0.13
0.7	1.1573	1.1600	0.23	1.0810	1.0830	0.18	1.0495	1.0513	0.17
0.8	1.2202	1.2225	0.19	1.1095	1.1118	0.02	1.0661	1.0682	0.20
0.9	1.3033	1.3043	0.08	1.1444	1.1468	0.21	1.0857	1.0883	0.24

Table 2 Comparison of computed correction factor values for $\beta=0(\omega=0)$ with corresponding Feddersen's

λ	Computed $F(\lambda)$	Feddersen's $F(\lambda)$	Difference %
0.1	1.0059	1.0062	0.03
0.2	1.0245	1.0254	0.09
0.3	1.0577	1.0594	0.16
0.4	1.1093	1.1118	0.22
0.5	1.1866	1.1892	0.22
0.6	1.3033	1.3043	0.08
0.7	1.4883	1.4841*	0.28*
0.8	1.8111	1.7990*	0.67*
0.9	2.4692	2.5380*	2.33*

* The Feddersen's correction factor values for $\lambda > 0.7$ are incredible.

Fig. 4~Fig. 6을 比較해 보면, $\beta=0$ 및 $\beta=\infty$ 인 경우에는 ω 에 상관없이 修正係數값이 一定曲線을 이루며, $\beta \rightarrow \infty$ 인 경우에는 Isida의 解析結果인 Fig. 1b의 $\beta=\infty$ 인 경우에 수렴한다.

$0 < \beta < \infty$ 인 경우에는 ω 값이 커질수록 같은 β 값에서 修正係數값이 작게 나타나며, 修正係數값이 ω 의 영향을 가장 크게 받는 것은, β 값이 1 內外일 때이다. $\beta=1$ 인 경우, $\lambda=0.9$ 에서, $\omega=0.5$ 인 경우는 $\omega=1.0$ 인 경우에 比하여 修正係數값이 13.89%만큼 크며, $\omega=1.5$ 일 때는 $\omega=1.0$ 일 때에 比하여 5.12%만큼 작게 나타났다. $\beta=0, 0.3, 1.0, 3.0$ 및 $\beta=\infty$ 인 경우의 修正係數를 比較해 놓은 것이 Fig. 7이다.

모든 경우에서 $\beta > 1$ 인 경우에는, λ 값이 1 (두께가 變化하는 境界)에 가까워짐에 따라 修正係數값이 急減

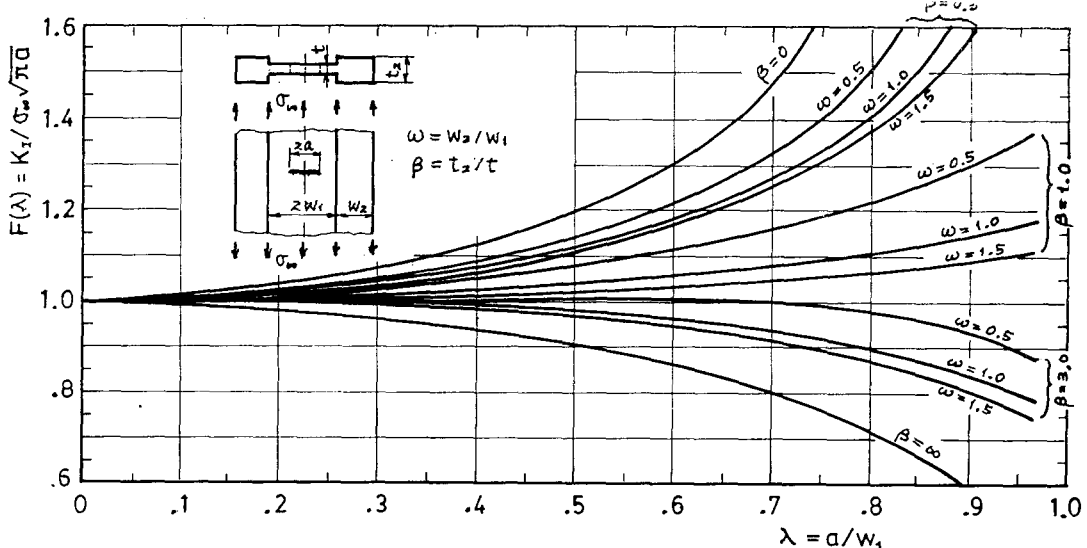


Fig. 7 Variation of correction factor values with width ratio ω for $\beta=0, 0.3, 1.0, 3.0$, and ∞

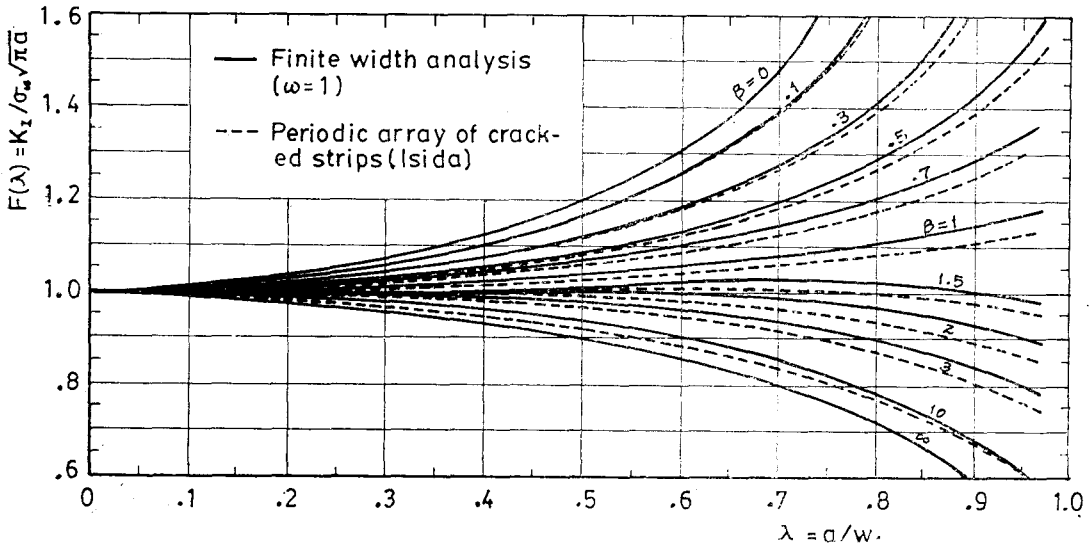


Fig. 8 Comparison of correction factor values between the analysis on finite width strip ($\omega=1$) and the periodic array of cracked strips (Isida)

하며, β 값이 클 때에는 修正係數값이 상당히 작아져서, 경우에 따라서는 龜裂의 成長이 停止될 수도 있다는 점에서, 이러한 현상은 파괴역학적인 설계분야에서 무척 중요한 현상이라 할 수 있다.

모든 경우에서 $\beta < 1$ 인 경우에는, λ 값이 1에 가까워짐에 따라 修正係數값이 급증하고 있으며, 이러한 현상도 설계분야에서 고려해야 할 중요한 현상이다.

本解析에서 $\omega=1$ 인 경우는 Isida의 解析모델(Fig. 1a)에서의 1개 패턴에 대응하는 것으로서, Fig. 8에 $\omega=1$ 인 경우의 本解析結果와 Isida의 解析結果(Fig. 1b)를 같이 보였는데, 有限幅板材의 경우와, 板材가 무한히 연속된 경우의 修正係數의 差異를 알 수가 있다.

6. 結 論

二次元 複素應力函數를 써서, 임의의 幅比(ω)를 갖는 두께가 변화하는 有限幅板材의 中央에 龜裂이 存在하는 경우에 대한 應力擴大係數의 理論解析을 行하였다.

三次元的인 境界條件을 갖는 두께가 변화하는 板材의 問題를 二次元的으로 解析했다는 점에서, 그 解析結果가 實際 三次元的인 問題의 엄밀해일 수는 없겠으나, 設定된 應力函數가 二次元모델(model)의 境界條件을 잘 만족하고 있으며, 임의의 ω 값에 대하여, $\beta=1$ 및 $\beta=0$ 인 두께가 均一한 板材에서의 修正係數값이 각각 대응하는 모델에 대한 Feddersen 式과 잘 一致하고

있고, 또 $\beta \rightarrow \infty$ 인 경우의 修正係數값이 Isida의 解析結果에서 $\beta = \infty$ 인 경우에 수렴하고 있으므로, 本解析結果는 엄밀해에 가까운 近似解로서, 實際의 工學問題에 적용해도 무리가 없을 것으로 생각된다.

다만 두께가 변화하는 境界에서의 平衡條件으로서 式(10)을 썼기 때문에, 두께가 변화하는 境界 가까이에서 修正係數값의 辛빙성이 결여되었으리라 생각되나, 이러한 현상은 두께가 변화하는 境界 가까이에서의 應力場의 엄밀해가 구해지지 않는 한 도리가 없으리라 생각된다.

참 고 문 헌

- (1) 梁源鎬, 崔鎔混, “變厚境界近傍에서의 疲勞龜裂成長學動研究”, 成均館大學校 科技報, Vol. 4, pp. 55~68, 1976
- (2) 梁源鎬, “變厚境界 및 異材結合境界 근방에서의 crack tip stress Intensity Factor”, 成均館大學校 科技報, Vol. 7, pp. 26~36, 1979
- (3) Won-ho Yang, H. Houssny-Emam, and M.N. Bassim, “An Experimental K -analysis on the Fatigue Crack near the Interface where plate Thickness Varies Discontinuously”, Eng. Fracture Mech., Vol. 19, No. 2, pp. 295~303, 1984
- (4) M. Isida, “On the Determination of Stress Intensity Factors for Some Common Structural Problems”, Eng. Fracture Meh., Vol. 2, pp. 61~79, 1970

- (5) 石田誠, “自由だ圓孔を有する二次元弾性體の應力關數について”, 日本機械學會誌 第21卷 第107號(第1部), pp. 502~506, 1955
- (6) M. Isida, “On the Tension of a Semi-infinite Plate with an Elliptic Hole”, Scientific Papers of Faculty of Eng., Tokushima Univ., Vol. 5, No. 1, pp. 75~95, 1955
- (7) G.C. Sih, P.C. Paris and F. Erdogan, “Crack tip Stress Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems”, J. appl. Mech., Vol. 29, Trans. ASME 84 (Series E), pp. 306~312, 1962
- (8) P.C. Paris and G.C. Sih, ASTM STP 381, pp. 35, 1964
- (9) C.E. Feddersen, ASTM STP 410, p. 11, 1966