

<論 文>

上向流動 領域에서 傾斜等溫平面에 의하여 惹起된
定常狀態 自然對流의 多重解

劉 甲 鍾* · 金 炳 河** · 崔 秉 喆**

(1987年 3月 31日 接受)

Multiple Solutions for Steady State Natural Convection Adjacent to an
Inclined Isothermal Flat Plate in the Region of Largely Upflow

Kap-Jong Riu, Byung-Ha Kim and Byung-Cheol Choi

Key Words: Natural Convection(自然對流), Multiple Steady State(多重定常狀態), Similarity Analysis(相似解析), Inclined Isothermal Flat Plate(傾斜等溫平面), Cold Water(低溫의 물)

Abstract

This study has been performed on multiple steady-state natural convection in the upflow region induced by an inclined isothermal plate immersed in pure cold water. The newly found additional steady-state solutions are of considerable practical interest because the heat-transfer rates for a pair of solutions with determining physical parameters and boundary conditions otherwise identical are sometimes vastly different. The results are as follows: First, in the largely upflow region, two solutions exist for $0.15157 < R \leq 0.15180$ and 3 solutions exist for $0.15149 \leq R \leq 0.15157$ (R =density extremum parameter). The range of the region was constant regardless of inclination angle. Second, as the inclination angle increases, the velocity boundary layer, thermal boundary layer and buoyant boundary layer increase along the downstream. Third, as the inclination angle increases, mean Nusselt number decreases.

記 號 說 明

C_p : 定壓比熱, J/kg°C
 f : 無次元 流動函數
 G : $4\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}$

Gr_x : 局所 Grashof 數, $\frac{gx^3}{\nu^2} \alpha |T_s - T_\infty|$
 g : 重力加速度, m/s²
 g_x : 重力加速度의 x 方向成分, m/s²
 g_y : 重力加速度의 y 方向成分, m/s²
 h : 平均熱傳達係數, W/m²·°C
 h_x : 局所熱傳達係數, W/m²·°C

* 正會員, 慶北大學校 工科學 機械工學科

** 慶北大學校 大學院

- k : 熱傳導率, $W/m \cdot ^\circ C$
 L : 試片의 길이, m
 Nu : 平均 Nusselt 數
 Nu_x : 局所 Nusselt 數
 P_n : 無次元 局所動壓力
 Pr : Prandtl 數
 p_n : 局所動壓力, $kg/m \cdot s^2$
 q : 密度式의 指數
 R : 密度最大파라미터, $(T_n - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$
 T : 溫度, $^\circ C$
 u : x 方向의 速度成分, m/s
 v : y 方向의 速度成分, m/s
 W : 無次元 局所浮力
 X : x 方向의 體積力, $kg/m^3 \cdot s^2$
 x : 前緣에서부터 等溫面을 따른 下流方向의 距離
 Y : y 方向의 體積力, $kg/m^3 \cdot s^2$
 y : 等溫面에서 垂直方向의 距離

希臘文字

- α : 密度式의 係數, $(^\circ C)^{-1}$
 β : 壓力勾配係數
 η : 無次元 길이 $(yG/4x)$
 θ : 等溫面의 傾斜角
 μ : 粘性係數, $kg/m \cdot s$
 ν : 動粘性係數, m^2/s
 ρ : 密度, kg/m^3
 τ : 局所 表面 剪斷應力, $kg/m \cdot s^2$
 ϕ : 局所 無次元 溫度, $(T - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$

下添字

- \cdot : 最大密度의 물의 條件
 \circ : 等溫試片面의 條件
 ∞ : 周圍流體의 條件

1. 序 論

同一한 物理的인 因子와 境界條件 下에서 서로 다른 두 種類 以上의 定常狀態의 流動 혹은 熱傳達이 發生되는 解를 얻었을때 이러한 現象을 多重定常狀態라 한다. 이 多重定常狀態는 自然科學 및 工業에서 매우 重要視되어지고 있다. 이에 대한 研究로서는 K. Stewartson⁽¹⁾이 세기면 위의 흐름에 대해서 제일 처음 多重解를 研究한 後, T. Cebeci⁽²⁾는 parallel shooting 方法을 使用해서 K. Stewartson의 結果를 再確認 하였으며

T. Saitoh⁽³⁾는 수평얼음 원기둥 주위의 흐름에서 多重解가 일어남을 暗示하였고, P. J. Zandbergen 등⁽⁴⁾은 回轉平板上의 흐름에서 多重解를 發見하였고, M. Lentini 등⁽⁵⁾은 Karman Swirling 흐름에 대해서 多重解를 研究하였고, D.L. Turcotte 등⁽⁶⁾은 Boussinesq 流體의 垂直流動에 關한 研究에서 多重解를 얻었고 K.J. Riu 등⁽⁷⁾은 세기면 위에서 多重 強制對流 熱傳達을 理論解析하였다.

大氣壓下에 比較的 低溫의 물속에 잠겨있는 $0^\circ C$ 의 垂直等溫面에 依하여 惹起되는 多重定常狀態의 流動 및 熱傳達에 對해서 El-Henawy 등⁽⁸⁾이 研究하였다. 이들은 上向流動 領域에서는 $4.7504^\circ C \leq T \leq 4.7887^\circ C$, 下向流動 領域에서는 $5.6895^\circ C \leq T \leq 7.7335^\circ C$ 일때 多重解를 얻었다. 이들이 理論的으로 求한 多重解는 N.W. Wilson 등⁽⁹⁾이 實驗的으로 求한 結果와 대체로 일치함을 보였다. K.J. Riu⁽¹⁰⁾는 垂直面으로부터 傾斜角이 60° 以下인 $0^\circ C$ 의 傾斜等溫面이 低溫의 물속에 잠겨있을때, 下向流動이 支配的인 領域에서 多重定常狀態의 流動 및 熱傳達을 研究하였다. 그는 주위 물의 溫度가 $5.689^\circ C \leq T_\infty \leq 7.7^\circ C$ 일때 多重解를 얻었다.

本 論文은 K.J. Riu⁽¹⁰⁾의 研究를 擴張하여, 上向流動 領域에서 垂直面으로부터 傾斜角이 60° 以下인 傾斜等溫面이 低溫의 물속에 잠겨있을때 일어나는 多重定常狀態 領域을 밝혀내고, 이 領域에서 傾斜角이 熱傳達, 溫度分布, 速度分布, 浮力分布 및 Nusselt 數에 미치는 影響을 究明하였다. 또한 解析方法은 이제까지 發表된 研究結果와 比較檢討하기 위하여 既存 論文에서와 같이 相似解析을 使用하였다.

2. 理論解析

2.1 支配方程式

Fig. 1은 傾斜된 等溫平面의 幾何學的인 系의 概要圖이다. x 는 前緣에서부터 等溫面에 나란한 方向의 距離이고, y 는 等溫面에서 垂直方向의 距離이며, θ 는 等溫面이 重力의 作用 方向과 이루는 角이다. 上向流動에서는 等溫面의 下端이 前緣, 即 $x=0$ 이고, 重力 加速度의 x 方向과 y 方向의 成分은 (-)이다. 等溫平面에 의한 自然對流 現象을 解析하는데 있어서 다음과 같은 몇가지 假定을 하여 一般的인 Navier-Stokes 方程式과 에너지方程式을 單純化하였다.

(1) 流動은 二次元 定常層流이다.

(2) 溫度差에 의한 密度變化를 除外한 流體의 모든

物理的 性質은 一定하다.

(3) 粘性消散, 壓縮性 效果, 輻射熱傳達은 無視한다. 위의 假定과 Boussinesq approximation 을 이 系에 適用하면 支配方程式들은 二次元 定常層流流動方程式으로 表示되고 局所動壓力 p_* 으로 나타내면 支配方程式들은 다음과 같다(參考文獻 8 參照).

(1) 連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

(2) 運動量方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_*}{\partial x} + g_x F(T, T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_*}{\partial y} + g_y F(T, T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

(3) 에너지方程式

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Fig. 1에 表示된 바와 같이 低溫도의 物속에 傾斜된 等溫面이 잠겨 있을때 境界條件은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, \infty) = 0 \\ v(x, 0) &= 0 \\ T(x, 0) - T_\infty &= T(x, \infty) - T_\infty = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

위의 式에 表示된 $\rho, g_x, g_y, \nu, k, C_p, T_\infty$ 및 T_* 는 物의 密度, 重力加速度의 x 方向의 成分, 重力加速度의 y 方向의 成分, 物의 動粘性係數, 物의 熱傳導係數, 物의 定壓比熱, 等溫面의 溫度 및 주위물의 溫度이다. 物의 밀도 ρ 는 B. Gebhart와 J. C. Mollendorf⁽¹¹⁾의 研究結果인 다음 式을 使用하였다.

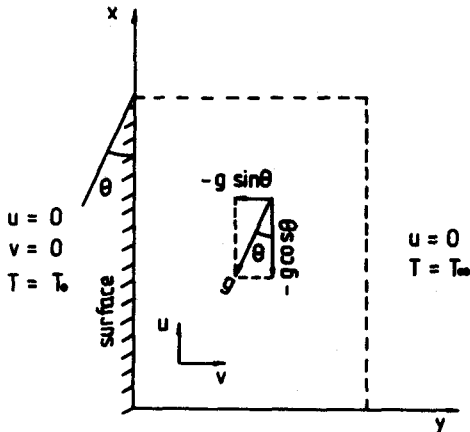


Fig. 1 Schematic diagram of an inclined plate and boundary conditions

$$\rho(T) = \rho_* [1 - \alpha | (T - T_*) |^q] \quad (6)$$

式 (6)에서의 T_* 은 物의 密度가 最大가 되는 溫度이고, ρ_* 은 最大密度이다. 標準大氣壓下에서 순수물의 T_* 은 4.029325°C 이고, 순수물의 ρ_* 은 999.9720kg/m^3 이다. 또한 係數 α 는 $9.297173 \times 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-q}$ 이고, 指數 q 는 1.894816이다.

위의 式 (2) 및 (3)의 項들중 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_*}{\partial x}$ 및 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_*}{\partial y}$ 과 式 (4)의 $\frac{k}{\rho C_p}$ 에 包含된 密度 ρ 는 相似變數로 支配方程式을 變換할때 消去된다. 또한 式 (2)와 (3)의 浮力項 $g_x F(T, T_\infty)$ 와 $g_y F(T, T_\infty)$ 에 表示된 $F(T, T_\infty)$ 는 熱境界層內의 物의 溫度 T 와 주위물의 溫度 T_∞ 의 函數로서, $[\rho(T) - \rho(T_\infty)] / \rho(T)$ 이다. $[\rho(T) - \rho(T_\infty)] / \rho(T)$ 의 分母 $\rho(T)$ 를 近似的인 값 $\rho(T_\infty)$ 으로 代置한 후 이 式에 式 (6)을 代入하여 整理하면 浮力 $g_x F(T, T_\infty)$ 와 $g_y F(T, T_\infty)$ 는 다음과 같이 된다. (參考文獻 11 參照)

$$g_x F(T, T_\infty) = (-g \cos \theta) \alpha | T_* - T_* |^q \times (|\phi - R|^q - |R|^q) \quad (7)$$

$$g_y F(T, T_\infty) = (-g \sin \theta) \alpha | T_* - T_* |^q \times (|\phi - R|^q - |R|^q) \quad (8)$$

上記 式에서 局所無次元 溫度 ϕ 와 密度最大 파라미터 (density extremum parameter) R 은 다음과 같이 定義하였다.

$$\phi = \frac{T - T_\infty}{T_* - T_\infty}, \quad R = \frac{T_* - T_\infty}{T_* - T_\infty} \quad (9)$$

密度 最大 파라미터 R 은 流體의 密度가 溫度의 變化에 따라서 線形的으로 變化하지 않을때 密度變化를 나타내는 중요한 파라미터가 된다.

支配方程式 (1), (2), (3) 및 (4)를 相似解析하기 위하여 相似變數 η , 局所 Grashof 數 Gr_x , Grashof 數 G 를 參考文獻 (8)과 같이 定義하면 다음과 같다.

$$\eta = \frac{yG}{4x}, \quad G = 4 \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad Gr_x = \frac{g x^3}{\nu^2} \alpha | T_* - T_\infty |^q \quad (10)$$

또한 流動函數 ϕ 와 局所無次元 動壓力 P_* 을 다음과 같이 定義하였다.

$$\phi(x, y) = \nu G f(\eta), \quad P_* = \frac{\rho \nu^2 G^2 P_*}{(4x)^2} \quad (11)$$

上記 式의 $f(\eta)$ 는 η 의 函數이다. 새로운 獨立變數 η 와 從屬變數 f 및 ϕ 로서 x 方向速度 u 와 y 方向速度 v 를 나타내면 다음과 같다.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{G^2 f'(\eta)}{4x} \quad (12)$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\nu G}{4x} (3f - \eta f') \quad (13)$$

위의 식에서 '은 $\frac{\partial}{\partial y}$ 을表示한다. 새로운變數들로서

式 (2), (3) 및 (4)를變換하면 다음과 같다.

x 方向 運動量 方程式

$$2(f'')^2 - 3ff'' = \frac{2P_n + P_n'}{G^2} + f'''' - (|\phi - R|' - |R|') \cos \theta + \frac{-4f' + \eta f'' + \eta^2 f'''}{G^2} \quad (14)$$

y 方向 運動量 方程式

$$9ff' - \eta(f')^2 - 3\eta ff'' = -P_n' + \eta f'''' - f'' - (|\phi - R|' - |R|') G \sin \theta + \frac{-15f - 9\eta f' + 6\eta^2 f'' + \eta^3 f'''}{G^2} \quad (15)$$

에너지方程式

$$\phi'' + 3P_n f \phi' + \frac{\eta^2 \phi'' + 5\eta \phi'}{G^2} = 0 \quad (16)$$

물의 α 는 9.8×10^{-6} ($^{\circ}\text{C}$) $^{-1}$ 이고 물의 ν 는 1.67×10^{-6} m^2/sec 이며, g 가 $9.81 \text{m}/\text{sec}^2$ 일때 式 (14), (15) 및 (16)의 G^2 의 값은 다음과 같다.

$$G^2 = 45800 |T_s - T_{\infty}|^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$x \geq 0.02 \text{m}$ 이고, $T_s - T_{\infty} = 1^{\circ}\text{C}$ 일 때에도 G^2 의 값은 매우 크므로 式 (14), (15) 및 (16)의 項들 中 G^{-2} 을 包含하는 項은 無視하고, 整理하면 다음과 같다.

$$f'''' = (|\phi - R|' - |R|') \cos \theta + 2(f'')^2 - 3ff'' \quad (18)$$

$$P_n' = 3\eta(f')^2 - 9ff'' - f'' + (|\phi - R|' - |R|') \times (-G \sin \theta + \eta \cos \theta) \quad (19)$$

$$\phi'' = -3P_n f \phi' \quad (20)$$

式 (5)의 境界條件을 새로운變數들로서變換하면 다음과 같다.

$$u(x, 0) = \frac{\nu G^2}{4x} f'(0) = 0 \therefore f'(0) = 0$$

$$v(x, 0) = \frac{\nu G \eta}{4x} f'(0) - \frac{3\nu G}{4x} f(0) = 0 \therefore f(0) = 0$$

$$u(x, \infty) = \frac{\nu G^2}{4x} f'(\infty) = 0 \therefore f'(\infty) = 0 \quad (21)$$

$$T(x, 0) = T_s + (T_s - T_{\infty}) \phi(0) = T_s \therefore \phi(0) = 1$$

$$T(x, \infty) = T_s + (T_s - T_{\infty}) \phi(\infty) = T_{\infty} \therefore \phi(\infty) = 0$$

위의 結果를 整理하면 다음과 같다.

$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) = 1 - \phi(0) = \phi(\infty) = 0 \quad (22)$$

局所無次元浮力 W , 局所 Nusselt 數 Nu_x 및 平均 Nusselt 數 Nu 는 다음과 같이 定義하였다.

$$W = [|\phi - R|' - |R|'] \cos \theta \quad (23)$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = -\frac{\phi'(0)}{\sqrt{2}} Gr_x^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

$$Nu = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx \quad (25)$$

上記는 h_x 및 h 는 局所熱傳係數 및 平均熱傳係

數이고, $-\phi'(\theta)$ 는 相似變數로서 나타내는 熱傳達率이다.

式 (18)과 (20)은 非線型常微分 聯立方程式이며, 境界條件 (22)와 함께 二點境界值問題가 된다. Diekhoff 等⁽¹²⁾, EL-Henawy 等⁽⁸⁾과 Deufhard⁽¹³⁾ 境界值問題를 bulirschstoer rational extrapolation algorithm⁽¹⁴⁾ 을 適用한 multiple shooting 方法인 code BOUNDS

Table 1 Solution data at $P_n=11.6$ and $q=1.894816$ computed by continuation with respect to $f(\infty)$ in the region of largely upflow

$f(\infty)$	R			η
	$\theta=30^{\circ}$	45°	60°	
.05800	.15144	—	—	200
.05700	.15150	—	—	200
.05600	.15155	—	—	200
.05500	.15194	.15145	—	200
.05400	.15163	.15151	—	200
.05300	.15167	.15156	—	200
.05200	.15170	.15160	—	200
.05100	.15172	.15165	.15141	200
.05000	.15175	.15168	.15148	200
.04900	.15176	.15171	.15154	200
.04800	.15178	.15174	.15159	200
.04700	.15179	.15176	.15164	200
.04600	.15180	.15177	.15168	200
.04500	.15180	.15179	.15171	200
.04400	.15180	.15179	.15174	200
.04200	.15180	.15180	.15178	200
.03900	.15178	.15179	.15180	500
.03800	.15176	.15178	.15180	500
.03300	.15170	.15172	.15176	500
.03000	.15165	.15167	.15172	500
.02700	.15160	.15162	.15166	500
.02600	.15159	.15161	.15165	500
.02400	.15156	.15158	.15161	500
.02000	.15152	.15153	.15155	500
.01300	.15149	.15149	.15149	500
.01200	.15149	.15149	.15149	500
.01000	.15149	.15149	.15149	500
.00500	.15153	.15153	.15153	500
.00400	.15154	.15154	.15153	500
.00300	.15154	.15154	.15154	500
.00200	.15155	.15155	.15155	500
.00140	.15156	.15157	.15158	500

을 사용한 結果, 計算上 많은 長點이 있는 것을 發見 하였다. 그래서 本計算에서도 BOUNDS를 使用하였다. 물의 物性値는 Kukulka⁽¹⁸⁾의 研究結果를 利用하였다. 特別히 多重定常狀態 領域을 求하기 위해서는 Prandtl 數를 11.6으로 하여 相似解를 計算하였다. 이 값은 $T_{\infty}=7^{\circ}\text{C}$ 와 $T_0=0^{\circ}\text{C}$ 일때 熱境界層內의 물의 溫度를 위의 두값의 平均값 3.5°C 로 하여 求한 것이다. 參考文獻 (8)에서도 이 값을 使用하였기 때문에 比較考察 하는 데에도 便利하도록 하였다. 또한 $T_0=0^{\circ}\text{C}$ 와 $T_{\infty}=4.8^{\circ}\text{C}$ 일때에는 열경계층내의 물의 온도를 2.4°C 로 하면 Prandtl 數는 12.1이다. 그러나 이 境遇에도 相似解析으로 求한 無次元값을 有次元 값으로 換算할 때 便利하도록 11.6의 Prandtl 數를 使用하여 計算하였다. 이때, Prandtl 數의 誤差는 4% 程度가 되나 熱境界層內의 물의 溫度分布의 特性을 考慮하면 充分히 無視할 수 있는 誤差이다. 그리고 最大 Grashof 數는 10^8 程度이다. 計算領域은 垂直과 傾斜角이 30° , 45° 및 60° 이고, 計算機는 CDC Cyber 170-815를 使用하였고, CPU 時間은 3000초 程度 所要되었다.

3. 結果 및 考察

本 研究에서는 計算過程의 信賴性을 얻기 위하여 垂直等溫平面에 대한 結果와 EL-Henawy 等⁽⁶⁾의 結果와

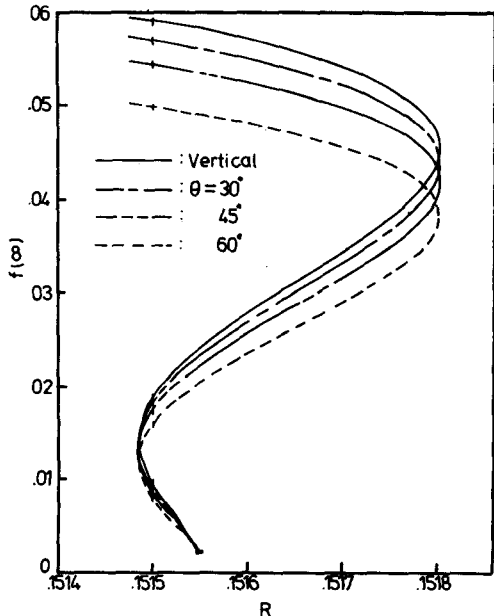


Fig. 2 The variation of mass flow rate $f(\infty)$ with R in the region of largely upflow

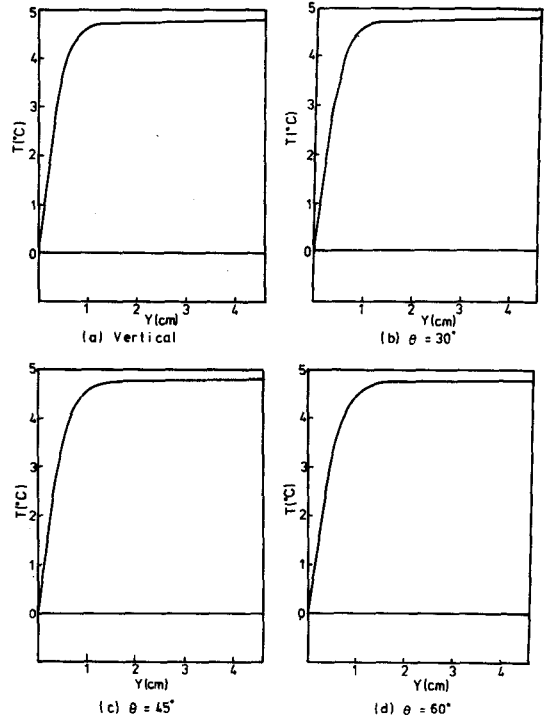


Fig. 3 Temperature profiles for different inclination angles at $x=0.043023\text{m}$, $T_{\infty}=4.74877^{\circ}\text{C}$ and $T_0=0^{\circ}\text{C}$

同一條件 下에서 一致하는 것을 確認한 後 모든 計算을 遂行하였고, 計算時 수렴치를 얻을 수 있는 상사변수 η_{∞} 의 값은 $100 \sim 500$ 으로 充分한 값을 取하였다.

Table 1은 傾斜角이 30° , 45° 및 60° 일때 求한 相似解를 表示한 것이다. 垂直等溫平面에 對한 값을 初期值로 하여, 傾斜角을 增加시키면서 연속적으로 계산하였다. Table 1의 相似變數로 나타내는 質量流動率 $f(\infty)$ 에 對한 R 의 變化를 그림으로 表示한 것이 Fig. 2이다. $f(\infty)$ 가 減小함에 따라 逆 S字 形態를 나타내고 있다. 즉 $f(\infty)$ 를 10^{-4} 까지 計算하였을 때 지배 방정식 (13)과 (15)는 $0.15149 \leq R \leq 0.15157$ 에서 3개의 解를, $0.15157 < R \leq 0.15180$ 에서는 2개의 解를 갖는다. 이 多重定常狀態의 領域은 垂直 및 傾斜平面이 같음을 알 수 있다. 그러나 R 이 일정할 때 傾斜角이 增加하면 $f(\infty)$ 는 減少하고 있다. 이러한 多重定常狀態 領域에서는 不安定 定常狀態 流動사이의 振動(Oscillation between unstable steady-state flows)이 存在하는 것을 Wilson 等⁽⁹⁾은 垂直等溫面에 對해서 밝혔으며, Riu⁽¹⁰⁾은 垂直 및 傾斜等溫面일 때에 全流動場을

可視化하여 不安定한 流動이 일어남을 觀察하였다. Riu⁽¹⁰⁾의 結果인 下向流動의 多重定常狀態의 領域보다 매우 좁은 領域에서 上向流動 多重定常狀態가 일어나고 있다.

다음부터 考察하게 될 表와 그림은 計算值中 一例로서, 等溫面의 溫度 T_w 가 0°C 일때, 相似解析으로 求한 無次元 값을 次期에 發表할 實驗의 研究와 比較하기 위하여 有次元 값으로 換算하여 나타내었다.

等溫面의 溫度가 0°C 일때 多重定常狀態의 溫度領域中에서 代表的인 溫度로 3個의 解가 求하여지는 $T_w = 4.74877^\circ\text{C}$ 와 前緣에서부터 x 方向의 距離가 0.043023 m 일때, 垂直 및 傾斜角이 $30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 에서 溫度分布을 나타낸 것이 Fig. 3이다. 等溫面에 인접한 물의 溫度勾配는 傾斜角이 增加할수록 減少하고 있으며, 그림에 表示하지 않았지만 計算值로부터, 前緣으로부터 x 가 增加할수록 溫度勾配가 減少하고 있는 것을 알수 있었다. 이것은 熱傳達이 傾斜角이 增加할수록, x 가 증가할수록, 減少함을 意味한다.

Table 2에서는 $T_w = 0^\circ\text{C}$, $T_w = 4.74877^\circ\text{C}$ 일때, 前緣에서부터 x 方向의 距離와 傾斜角의 變化에 따른 熱境界層 두께, 즉 周圍물의 溫度의 99%가 되는 溫度場의 y 방향의 距離를 나타내었다. 表에서 알수 있는 바와 같이 熱境界層의 두께는 傾斜角이 增加할수록 x 가 증가할수록 增加한다.

Fig. 4는 $T_w = 0^\circ\text{C}$, $T_w = 4.74877^\circ\text{C}$, $x = 0.043023\text{ m}$ 에서 垂直 및 傾斜角이 $30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 일때 y 에 따른 無次元 浮力分布이다. 浮力이 發生하는 境界層은 Fig. 3에 나타나 있는 熱境界層과 一致하고 있다. 이는 浮力이 溫度만의 函數로 表示되기 때문이다. 等溫面 附近에서는 浮力의 값은 (+)이고, 절대치가 큰 값이며, 等溫面에서 먼 부분의 浮力의 값은 (-)이고, 절대치가 작은 값을 나타내고 있다. 이러한 性向으로부터 等溫面 附近에서는 上向流動이 대단히 크게 나타나고, 等溫面에서 먼 부분에서는 극히 미소한 下向流動이 일

Table 2 Thermal boundary layer thickness with respect to x and inclination angle in the region of largely upflow at $T_w = 0^\circ\text{C}$

		(unit : $10^4 \times \text{m}$)		
θ	x	0.9523	4.3023	16.3027
	0°	0.816	1.195	1.657
	30°	0.843	1.233	1.728
	45°	0.897	1.303	1.804
	60°	0.965	1.383	1.979

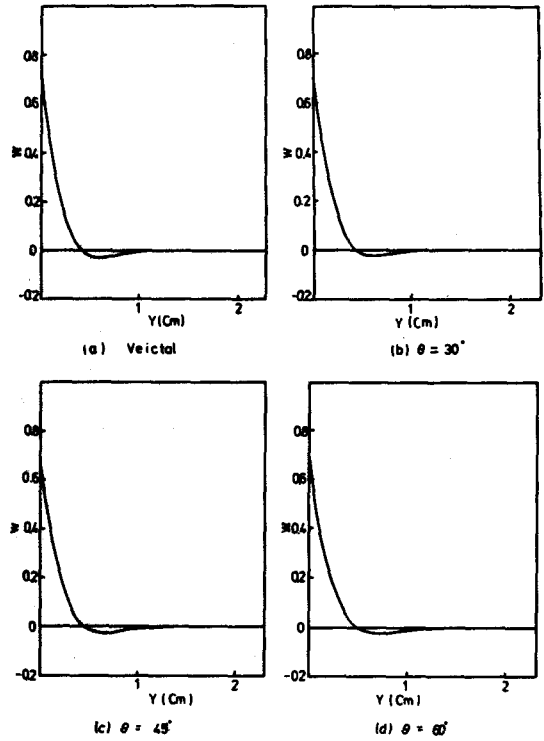


Fig. 4 Buoyancy force profiles for different inclination angles at $x = 0.043023\text{ m}$, $T_w = 4.74877^\circ\text{C}$ and $T_w = 0^\circ\text{C}$

어남을 豫測할 수 있다. 이 性向은 垂直인 境遇, EL-Henawy 등⁽¹¹⁾의 計算結果와 一致한다. 또한 傾斜角이 增加할수록 浮力境界層의 두께는 增加하며, 浮力의 絶對값의 最大値는 거의 一定하다. 이는 前緣으로부터 x 가 增加하면 熱境界層內에서 浮力이 最大가 되는 溫度가 發生하는 位置는 移動하지만 값은 같기 때문이다.

Fig. 5는 $T_w = 0^\circ\text{C}$, $T_w = 4.74877^\circ\text{C}$, $x = 0.043023\text{ m}$ 에서 垂直 및 傾斜角이 $30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 일때, y 에 따른 速度分布 u 를 나타낸 것이다. Fig. 2에서 알수 있는 바와 같이, 같은 T_w 에 대한 速度分布 曲線이 3個가 나타남을 알수 있다. $f(\infty)$ 가 가장 큰 狀態에서는 上向流動만 일어나고, $f(\infty)$ 가 작은 두 狀態에서는 速度反轉이 일어나고 있다. 傾斜角이 增加하면 速度 u 는 減少하고 있다. 이것은 傾斜角이 增加하면 重力加速度의 x 方向成分이 減少하기 때문이다. 또한 傾斜角이 增加하면 速度境界層의 두께는 增加하고 있다. 이는 浮力이 反重力方向으로 作用하기 때문이다. x 가 增加할수록 速度 u 는 增加하며, 速度境界層의 두께도 增加

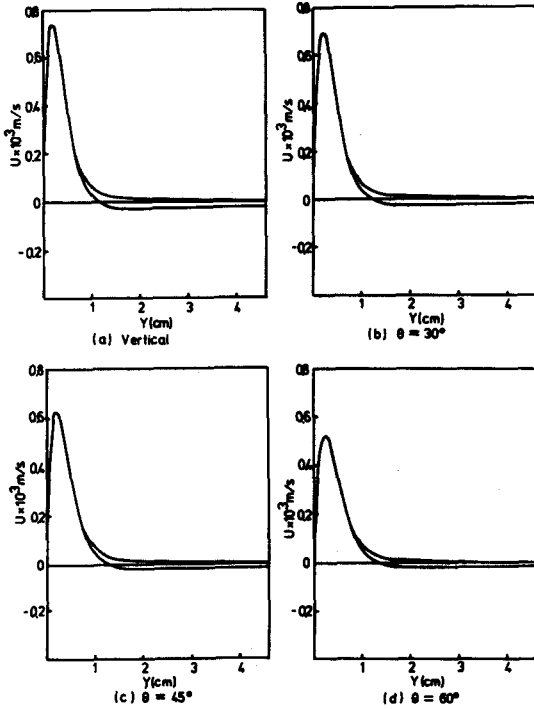


Fig. 5 u -velocity profiles for different inclination angles at $x=0.043023m$, $T_w=4.74877^\circ C$ and $T_c=0^\circ C$

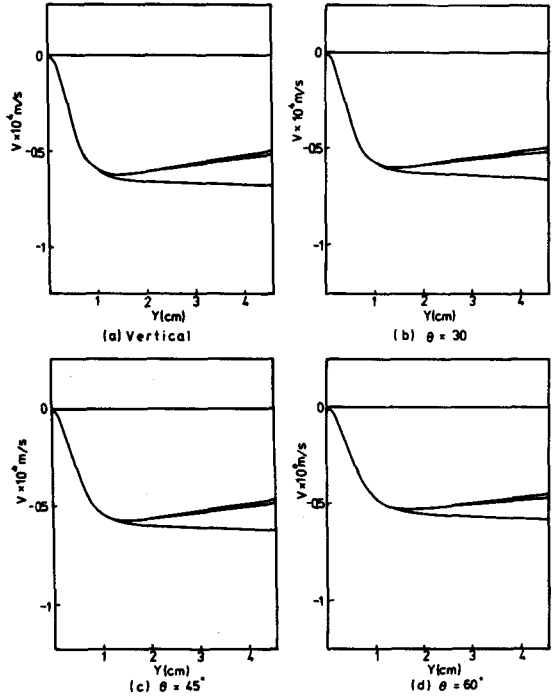


Fig. 6 v -velocity profiles for different inclination angles at $x=0.043023m$, $T_w=4.74877^\circ C$ and $T_c=0^\circ C$

하는 것을 計算値로부터 알 수 있었다. 이는 慣性力의 영향으로 解析된다.

Fig. 6은 $T_c=0^\circ C$, $T_w=4.74877^\circ C$, $x=0.043023m$ 에서 垂直 및 傾斜角이 $30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 일때, y 에 따른 等溫面에서 垂直 方向의 速度分布 v 를 나타낸 것이다.

傾斜角이 增加할수록 v 의 절대값은 減少한다. 等溫面에서부터 距離가 멀어질수록 v 의 절대값은 增加하고, 速度 境界層의 外部境界에서는 一定速度로 수렴한다. 같은 T_w 값에 대한 속도분포가 서로 다른 값으로 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 7은 $T_c=0^\circ C$ 일때, T_w 의 變化에 따른 平均 Nusselt 數를 나타낸 것이다. Fig. 8은 Fig. 7의 垂直인 境遇를 擴大한 것이다. 傾斜角이 增加하면 平均 Nusselt 數는 減少한다. T_w 이 增加하면 平均 Nusselt 數는 減少하면서 解의 첫번째 集團(A)가 일어나게 되고, T_w 이 最大値에서 減少함에 따라 解의 두번째 集團(B)가 일어난다. 다시 T_w 이 最少値에서 增加함에 따라 活潑하지 못한 흐름의 集團(C)가 일어난다. 이와 같은 性向은 傾斜角에 관계 없이 같게 나타나고

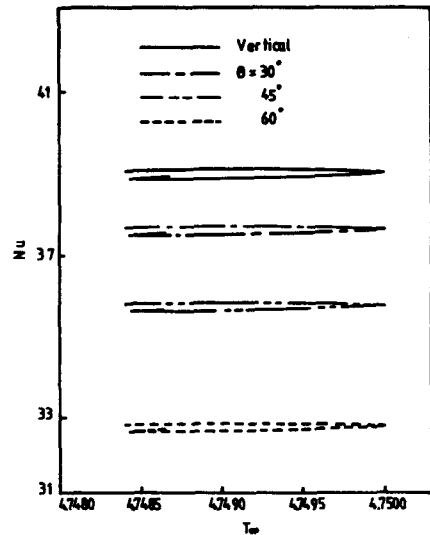


Fig. 7 The variation of mean Nusselt number for different angles with T_w in the region of largely upflow at $T_c=0^\circ C$

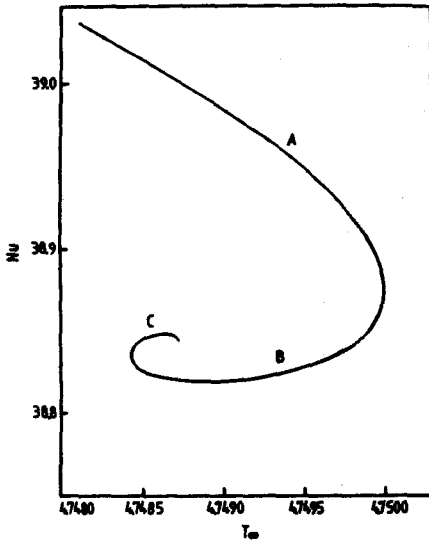


Fig. 8 The variation of mean Nusselt number for the vertical flat plate with T_{∞} in the region of largely upflow at $T_{\infty}=0^{\circ}\text{C}$

있다. 또한 傾斜角에 關係없이 平均 Nusselt 數의 最小값은 $R=0.15158$ 에서 나타난다. 한個의 T_{∞} 의 값에서 發生하는 3個 혹은 2個의 平均 Nusselt 數의 差異는 Riu⁽¹⁰⁾의 研究 結果인 下向流動 일때보다 매우 작게 나타나고 있다.

上記의 考察에서 나타난 性向은 傾斜等溫面의 溫度 T_{∞} 가 0°C 가 아닌 다른 溫度에서도 같음을 計算值로부터 알수 있었다.

4. 結 論

垂直 및 傾斜角이 30° , 45° 및 60° 인 等溫面이 물 속 에 잠겨있을 때, 上向流動領域에서 일어나는 多重定常 狀態領域과 이 領域에서의 流動 및 熱傳達을 理論解析 하여 다음과 같은 結果를 얻었다.

上向流動이 支配인 領域에서 2個의 解는 $0.15157 < R \leq 0.15180$ 에서, 3個의 解는 $0.15149 \leq R \leq 0.15157$ 에서 存在하였다. 그 領域의 幅은 傾斜角에 關係없이 一定하였다.

傾斜角이 增加할수록, α 가 증가할수록 速度境界層, 熱境界層 및 浮力境界層의 두께는 增加하였다. 또한 平均 Nusselt 數는 傾斜角이 增加할수록 減少하였고, $R=0.15158$ 일때 平均 Nusselt 數는 傾斜角에 關係없이 最小가 되었다.

參 考 文 獻

- (1) Stewartson, K., 1953, "Further Solutions of the Falkner-Skan Equation", Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 50, pp. 454~465.
- (2) Cebeci, T. and Keller, H.B., 1971, "Shooting and Parallel Shooting Methods for Solving the Falkner-Skan Boundary Layer Equation", J. of Comput. Phys., Vol. 7, pp. 289~300.
- (3) Saitoh, T., 1976, "Natural Convection Heat Transfer from a Horizontal Ice Cylinder", Appl. Sci. Res., Vol. 32, pp. 429~451.
- (4) Zandbergen, P.J. and Dijkstra, D., 1977, "Non-Unique Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Karman Swirling Flow", J. of Engineering Math., Vol. 11, No. 2, pp. 167~188.
- (5) Lentini, M. and Keller, H.B., 1978, "Computation of Karman Swirling Flows", Lecture Notes in Computer Sci. 76, Springer-Verlag, München, pp. 89~100.
- (6) Turcotte, D.L., Spence, D.A. and Bau, H.H., 1981, "Multiple Solutions for Natural Convective Flows in an Internally Heated, Vertical Channel with Viscous Dissipation and Pressure Work", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 25, No. 5, pp. 699~706.
- (7) Riu, K.J., Jang W.I. and Kim, B.H., 1984, "Forced Convective Heat Transfer over Wedge in the Region of Multiple Steady State", KSME, Vol. 8, No. 5, pp. 505~515.
- (8) El-Henawy, I., Kasarinoff, N., Gebhart, B. and Mollendorf, J.C., 1982, "Numerically Computed Multiple Steady States of Vertical Buoyancy induced Flows in Cold Pure Water", J. of Fluid Mech., Vol. 107, pp. 37~55.
- (9) Wilson, N.W. and Vyas, B.D., 1979, "Velocity Profiles Near a Vertical Ice Surface Melting into Fresh Water", Trans. ASME, J. of Heat Transfer, Vol. 101, pp. 313~317.
- (10) Riu, G.J., 1984, "Natural Convection from Inclined Plate Ice Surface Immersed in Water its Density Extremum", Doctor Thesis, Seoul Univ.

- (11) Gebhart, B. and Mollendorf, J.C., 1977, "A New Density Relation for Pure and Saline Water", *Deep-Sea Res.*, Vol. 24, pp. 831~848.
- (12) Diekhoff, H.J., Lavy, P., Oberle, H.J., Pesch, J.J., Rentrop, P. and Seydel, R., 1977, "Comparing Routines for the Numerical Solution of Initial Value Problem of Ordinary differential Equations in the Multiple Shooting", *Numerische Mathematik*, Vol. 27, pp. 449~469.
- (13) Deuilhard, P., 1978, "Nonlinear Equation Solves in Boundary Value Problem, Codes-An Invited Survey Paper", *Lecture Notes in Computer the Sci.*, Vol. 76, Springer-Verlag, München, pp. 40~66.
- (14) Bulirsch, R. and Stoer, J., 1966, "Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods", *Numerische Mathematik*, Vol. 8, pp. 1~13.
- (15) Kukulka, D. J., 1981, "Thermodynamic and Transport Properties of Pure and Saline Water", Master Thesis, State University of New York at Buffalo, pp. 46~50.