大韓機械學會論文集 第11卷 第6號, pp.1001~1004, 1987.

<論 文>

선형 탄성 문제의 경계적분식 해와 변분해의 동등성 증명

유 영 면*·박 찬 우*·권 길 헌**

(1987年 8月 19日 接受)

Proof of Equivalence of Solutions of Boundary Integral and Variational Equations of the Linear Elasticity Problem

Yung M. Yoo, Chan W. Park and Kil H. Kwon

Key Words : Boundary Integral Equation(경계적분식), Boundary Element Method(경계요소법), Variational Solution(변분해), Sobolev Space(Sobolev 공간)

Abstract

In this study mathematical properties of variational solution and solution of the boundary integral equation of the linear elasticity problem are studied. It is first reviewed that a variational solution for the three-dimensional linear elasticity problem exists in the Sobolev space $[H^1(\Omega)]^3$ and, then, it is shown that a unique solution of the boundary integral equation is identical to the variational solution in $[H^1(\Omega)]^3$. To represent the boundary integral equation, the Green's formula in the Sobolev space is utilized on the solution domain excluding a ball, with small radius ρ, centered at the point where the point load is applied. By letting ρ tend to zero, it is shown that, for the linear elasticity problem, boundary integral equation is valid for the variational solution. From this fact, one can obtain a numerical approximation of the variational solution by the boundary element method even when the classical solution does not exist.

기 호 설 명

$B_\rho(\xi)$: 중심이 $x=\xi$이고 반경이 ρ인 작은 구

e_l^ξ : $x=\xi$에서 l방향으로의 단위 하중

H^k : k차 Sobolev 공간

p : 표면력

p_{lm}^* : l방향 하중으로 인한 m방향의 점하중 표면력

u : 변위 변분해

u_{lm}^* : l방향 하중으로 인한 m방향의 점하중해

Ω : 문제의 영역

Γ : 문제의 경계

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

** 한국과학기술원 응용수학과

1. 서 론

최근에 경계요소법(BEM)이 많이 발달하여 유한요소법이 응용되는 분야에 널리 사용되고 있으며 또 그 효용성이 높음이 알려져 있다. 경계요소법을 사용할 경우의 장점은 영역의 경계에서만 방정식이 작용하므로 수치적인 해를 구하기 위해 작성되는 대수 방정식의 크기가 상당히 작아진다. 또 다른 장점은 영역의 경계에서 구해지는 해가 FEM 또는 FDM에 의해서 구해

지는 해보다 비교적 정확하다는 점이다[1,2]. 그러므로 경계에서의 해만이 필요할 경우 경계요소법의 활용이 바람직하다고 하겠다. 경계요소법을 사용할 때는 경계적분식을 수치적으로 근사화하여 해를 구하게 되는데 경계적분식에 대한 수학적 고찰이 부족하여 그 해의 존재여부, 유일성 등이 잘 알려져 있지 않다.

본 논문에서는 우선 선형 탄성문제의 변분해(variational solution)가 Sobolev 공간$[H^1(\Omega)]=H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$에서 유일하게 존재함을 재 검토하고 다음으로 경계적분식의 해도 변분해와 같음을 보인다. 이것은 선형 탄성문제의 경우 고전해(classical solution)가 존재하지 않을 경우에도 BEM을 사용하여 변분해의 수치적 근사치를 구할 수 있다는 수학적 근거가 된다. 이를 위해서 Sobolev 공간 내에서의 Green's formula를 적용하는데 점하중해의 특이점(singularity) 때문에 Green's formula를 적용하기가 곤란해진다. 이 문제는 적분영역 Ω를 $\Omega\text{-}B_\rho$로 치환하고 ρ를 0으로 접근시키는 방법으로 해결한다. 이 때 B_ρ는 특이점에 중심을 두고 매우 작은 반경 ρ를 갖는 구이다.

2. 변 분 해

3차원 공간에서 유한하고 Lipschitz 경계 Γ를 갖는 탄성체의 영역을 Ω로 하고 변위를

$$\bar{u}=(u_1, u_2, u_3)^T \tag{1}$$

로 나타내면 변형도(strain)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\varepsilon_{ij}(\bar{u})=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\ \ i,j=1,2,3 \tag{2}$$

이때 $u_{i,j}$는 u_i의 x_j에 대한 편미분을 나타낸다. 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij}(\bar{u})=\lambda\Big(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\bar{u})\Big)\delta_{ij}+2\,\mu\varepsilon_{ij}(\bar{u}),\quad i,j=1,2,3 \tag{3}$$

여기서 λ,μ는 Lame 상수이고 δ_{ij}는 Kronecker delta이다. 영역 Ω에서 중력, 관성력 등을 포함하는 체적력(body force)을

$$\bar{f}=(f_1, f_2, f_3)^T \tag{4}$$

로 나타내면 응력은 다음의 평형방정식을 만족시킨다.

$$-\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}=f_i,\ \ i=1,2,3. \tag{5}$$

등방성 물체의 경우 식(5)는 다음과 같은 지배식 형태로도 표현된다.

$$A\bar{u}=(\lambda+\mu)\ \text{grad}\ \text{div}\bar{u}+\mu\Delta\bar{u}=\bar{f}. \tag{6}$$

경계조건은 다양하게 주어질 수 있으나 다음의 대표적인 세가지 형태를 고려한다.

(1) 변위 경계조건

$$u_i=0\ \text{on}\ \Gamma,\ i=1,2,3. \tag{7}$$

(2) 표면력 경계조건

$$p_i(\bar{u})=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\bar{u})\ n_j=p_i\ \text{on}\ \Gamma,\ i=1,2,3. \tag{8}$$

여기서 n_j는 외향법선여현(outward unit normal vector) $\bar{n}$의 j성분이다.

(3) 변위, 표면력 경계조건

$$u_i=0\ \text{on}\ \Gamma_1,\ i=1,2,3. \tag{9}$$

$$p_i(\bar{u})=p_i\ \text{on}\ \Gamma_2,\ i=1,2,3. \tag{10}$$

여기서 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\phi$이다.

식(5)의 양변에 $[H^1(\Omega)]^3$에 속하고 변위 경계조건이 주어진 경계에서 0인 임의의 변위 벡터 $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)^T$를 곱하고 영역 Ω에 대하여 적분하면 다음과 같이 된다. 이때 $H^1(\Omega)$의 정의는 $H^1(\Omega)=\{u\in D'(\Omega)\,|\,u\in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x}\in L^2(\Omega)\}$이다. 이때 $D'(\Omega)$는 distribution space, $L^2(\Omega)$는 square integrable 함수들의 집합이다.

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}v_i\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}dx=-\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}f_iv_i\ dx. \tag{11}$$

식(11)을 부분적분하면 다음과 같은 변분형을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}a(\bar{u},\bar{v})&\equiv\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(\bar{u})\ \varepsilon_{ij}(\bar{v})\ dx\\&=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(\bar{u})\ \sigma_{ij}(\bar{v})dx\\&=\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}f_iv_idx+\int_\Gamma\sum_{i=1}^{3}p_iv_i\ ds_x\equiv b(\bar{v})\end{aligned} \tag{12}$$

여기서 ds는 경계적분 요소이다. 식(7)의 경계조건에 대해서는 식(6)의 지배식 A가 $[H^1(\Omega)]^3$에서 positive definite함을 보일 수 있다. 식(8) 또는 식(9)와 식(10)으로 주어진 경계조건에 대해서는 다음의 정적 평형조건(static equilibrium)과 모우멘트 평형조건(moment equilibrium)이 만족되어야 해가 존재하며

$$\int_\Omega\bar{u}dx=0 \tag{13}$$

$$\int_\Omega\bar{R}\times\bar{u}dx=0 \tag{14}$$

이때 지배식 A는 역시 positive definite함을 보일 수 있다[3]. 윗 식에서 $\bar{R}$는 x점의 반경방향 벡터이다. 지배식 A가 positive definite하고 $b(v)$가 bounded linear functional이면 Lax-Milgram theorem[3,4]으로부터 그 해는 $[H^1(\Omega)]^3$에서 유일하게 존재한다. 선형 탄성문제의 해를 $[H^1(\Omega)]$에서 찾는다는 의미는 평형방정식과 경계조건이 요구하는 미분차수를 모두 만족시키는 고전해가 존재하지 않을 경우에도 체적력 f가 $L^2(\Omega)$

에 속할 때 다음과 같이 표현되는 전체 포텐셜 에너지 (total potential energy, T.P.E)가 유한한 범위 내에서 해를 구한다는 의미가 된다. 이때 이 해가 변분해이다.

$$\mathrm{T.P.E}=\int_{\Omega}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,dx-\int_{\Omega}\bar{f}\bar{u}dx \qquad (15)$$

3. 경제적분식

탄성문제에 대하여 점하중해로 표시되는 경계적분식을 고려한다. 점하중해는 다음의 평행방정식을 만족시키는 해이다.

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{lj,j}^{*}=-e_l^{\xi},\quad i,l=1,2,3,\quad \xi\in\Omega \qquad (16)$$

여기서 e_l^{ξ}은 ξ점에서 l방향으로 크기 1인 하중을 뜻한다. 등방성 물체에 대한 식(16)의 해는 다음과 같이 주어진다[5].

$$u_{lm}^{*}=\frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\ \frac{1}{r}\left[(3-4\nu)\delta_{lm}+\frac{\partial r}{\partial x_l}\ \frac{\partial r}{\partial x_m}\right] \qquad (17)$$

$$p_{lm}^{*}=-\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\delta_{lm}+3\frac{\partial r}{\partial x_l}\ \frac{\partial r}{\partial x_m}\right\}-(1-2\nu)\left\{\frac{\partial r}{\partial x_l}n_m-\frac{\partial r}{\partial x_m}n_l\right\}\right] \qquad (18)$$

여기서 G,ν,r은 전단탄성계수, 포아송 비, ξ로부터 x까지의 거리를 각각 나타내고 u_{lm}^{*}, p_{lm}^{*}는 l방향의 하중으로 인한 m방향의 변위, 표면력을 각각 나타내며 u_{lm}^{*}, p_{lm}^{*}의 관계는 다음과 같다.

$$p_{lm}^{*}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{mj}^{*}(u_{lm}^{*})n_j \qquad (19)$$

식(16)의 양변에 변분해 u를 곱하고 Ω에 대하여 적분하면 다음 식이 구해진다.

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}u_i\sum_{j=1}^{3}\sigma_{lj,j}^{*}dx=-\int_{\Omega}e_l^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\right)dx. \qquad (20)$$

식(11), (20)에 Sobolev space상에서의 Green's formula를 적용하여 점하중해로 표시되는 경계적분식을 얻으려면 $\bar{v}$를 점하중해로 치환해야 한다. 이때 $\bar{u}\in[H^1(\Omega)]^3$ $\sigma_{ij}\in H^0(\Omega)$이므로 다음의 lemma로부터 v가 $[H^1(\Omega)]^3$에 속하면 Green's formula를 적용할 수 있다.

lemma 1) 영역 Ω의 경계 Γ가 뾰족한 부분이 없는 정도의 부드러운 곡선 즉, Lipschitzian일 때

$$\int_{\Omega}f\mathrm{div}\bar{g}dx=-\int_{\Omega}\mathrm{grad}\ f\cdot\bar{g}dx+\int_{\Gamma}f\bar{g}\cdot n\ ds_x \quad (21)$$

이 모든 $f\in H^1(\Omega)$, $\bar{g}\in H^0(\Omega,\mathrm{div})$에 대하여 성립한다. 이때 $H^0(\Omega,\mathrm{div})=\{\bar{g}\in[L^2(\Omega)]^n,\ \mathrm{div}\bar{g}\in L^2(\Omega)\}$이며 n은 문제의 차원이다.

그러나 점하중해 $u_{lm}^{*}\in C^{\infty}(R^3-\{\xi\})$이며 $[H^1(\Omega)]^3$에 속하지 못한다. 그러므로 바로 Green's formula를 적용할 수 없으며 이의 극복을 위하여 적분영역 Ω를 Ω-B_{ρ}로 치환한다. 여기서 B_{ρ}는 특이점을 중심으로 하고 충분히 작은 반경 ρ를 갖는 구이다. u_{lm}^{*}는 Ω-B_{ρ}에서 $[H^1(\Omega)]^3$에 속하므로 Green's formula를 적용할 수 있다. Ω-B_{ρ}상에서 식(20)로부터 식(11)을 빼고 Green's formula를 적용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega-B_{\rho}}&\left\{\sum_{i=1}^{3}f_iu_{li}^{*}+e_l^{\xi}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\right)\right\}dx\\&=\int_{\Gamma}\sum_{i=1}^{3}u_{li}^{*}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\bar{u})n_jds_x+\int_{\partial B_{\rho}}\sum_{i=1}^{3}u_{li}^{*}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\bar{u})n_jds_x\\&-\int_{\Gamma}\sum_{i=1}^{3}u_i\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{*}(u_{li}^{*})n_jds_x-\int_{\partial B_{\rho}}\sum_{i=1}^{3}u_i\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{*}(u_{li}^{*})n_jds_x\end{aligned} \qquad (22)$$

식(22)의 좌변 두번째 적분항은 0이고 우변의 두번째 적분항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial B_{\rho}}\sum_{i=1}^{3}u_{li}^{*}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\bar{u})n_jds_x\right|=\left|\sum_{i=1}^{3}u_{li}^{*}(\rho)\int_{\partial B_{\rho}}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\bar{u})n_jds_x\right|=\left|-\sum_{i=1}^{3}u_{li}^{*}(\rho)\int_{B_{\rho}}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}dx\right|\\&\leq 3\omega_3\sum_{i=1}^{3}u_{li}^{*}(\rho)\rho^2\sup_{\substack{B_{\rho}\\ i,j=1,2,3}}|\sigma_{ij,j}|\to 0\ \text{as}\ \rho\to 0\end{aligned} \qquad (23)$$

여기서 $\omega_3=4\pi$는 R^3상의 단위 구의 표면적이다. 식(22)의 우변 네번째 적분항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_{\rho}}\sum_{i=1}^{3}u_i\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{*}(u_{li}^{*})n_j\ ds_x&=\int_{\partial B_{\rho}}\sum_{i=1}^{3}u_ip_{li}^{*}\ ds_x\\&=-\int_{\partial B_{\rho}}\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\sum_{i=1}^{3}u_i\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\delta_{li}+3\frac{\partial r}{\partial x_l}\ \frac{\partial r}{\partial x_i}\right\}-(1-2\nu)\left\{\frac{\partial r}{\partial x_l}n_i-\frac{\partial r}{\partial x_i}n_l\right\}\right]ds_x\end{aligned} \qquad (24)$$

여기서 $\frac{\partial}{\partial n}$는 외향법선여현에 대한 미분이며 $\frac{\partial r}{\partial n}=-1$이다. 식(24)의 우변 마지막 항은 다음과 같다.

$$\frac{\partial r}{\partial x_l}n_i-\frac{\partial r}{\partial x_i}n_l=\frac{r_l}{r}\ \frac{r_i}{r}-\frac{r_i}{r}\ \frac{r_l}{r}=0 \quad (25)$$

$l=1$일 때 구좌표계를 쓰면 식(24)의 우변은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\partial B_{\rho}}\left\{u_1(1-2\nu)+3u_1e_1e_1+3u_2e_2e_2+3u_3e_1e_3\right\}\frac{\sin\theta\ d\theta d\phi}{8\pi(1-\nu)} \qquad (26)$$

여기서 $e_i=n_i=\frac{\partial r_i}{\partial r}=\frac{r_i}{r}$이다. 식(26)을 직접 계산하면 다음과 같이 된다.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{u_1(1-2\nu)+3u_1\sin^2\theta\cos^2\theta+3u_2\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi+3u_3\sin\theta\cos\theta\cos\phi\frac{\sin\theta}{8\pi(1-\nu)}d\theta d\phi=u_1 \tag{27}$$

마찬가지 방법으로 $l=2, 3$일 때 각각 식(24)의 우변은 u_2, u_3가 됨을 보일 수 있다. 그러므로 식(22)은 다음과 같이 표현된다.

$$u_l-\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}f_iu_{li}^*\,dx=\int_\Gamma\sum_{i=1}^{3}u_{li}^*\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j\,ds_x-\int_\Gamma\sum_{i=1}^{3}u_i\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^*n_j\,ds_x \tag{28}$$

결론적으로 응력-표면력 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

Thm 1) Lipschitz 경계 Γ를 갖는 3차원 등방성 탄성체에서 $u\in[H^1(\Omega)]^3$에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$u_l+\int_\Gamma\sum_{i=1}^{3}u_ip_{li}^*\,ds_x=\int_\Gamma\sum_{i=1}^{3}u^l{}_i^*p_i\,ds_x+\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}f_iu_{li}^*\,dx \tag{29}$$

위에서 보인 바와 같이 경계적분식인 식(29)의 해는 변분해와 같으며 이 해는 $[H^1(\Omega)]^3$에서 유일함을 알 수 있다. 식(29)로부터 경계 Γ를 잘게 나누어 경계요소법을 사용하면 변분해의 수치적 근사치를 얻을 수 있다.

4. 검토 및 결론

본 논문에서는 3차원 탄성문제에 대하여 경계적분식의 해는 바로 변분해이고 그 해는 $[H^1(\Omega)]^3$에서 유일함을 보였다. 그러므로 고전해가 존재하지 않을 경우에도 경계적분식을 이용하여 변분해를 구할 수 있다. 본 논문의 방법은 2차원 탄성문제에도 그대로 적용되며 유사한 타원형(elliptic) 경계치문제에 대하여도 적용시킬 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

(1) C.S. Lee and Y.M. Yoo, 1985, "Investigation of the Boundary Element Method for Engineering Application": Boundary Element VII: Proceedings of the 7th International Conference, Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, New York.

(2) C.A. Mota Soares and K.K. Choi, 1986, "Boundary Element in Shape Optimal Design of Structures", NATO/NASA/NSF/USAF Advanced Study Institute on Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems, Troia, Portugal.

(3) K. Rektorys, 1980, "Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering", D. Reidel Pub. Co., Boston, Mass.

(4) D. Gilbarg and N.S. Trudinger, 1977, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag, New York.

(5) C.A. Brebbia, J.C.F. Telles and L.C. Wrobel, 1984, "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, New York.

(6) J.P. Aubin, 1979, "Applied Functional Analysis", John Wiley & Sons Inc., New York.

(7) F. John, 1978, "Partial Differential Equations", 3rd Edition, Springer-Verlag, New York.

(8) José Barros-Neto, 1973, "An Introduction to the Theory of Distributions", Marcel Dekker Inc., New York.

(9) Lars Hörmander, 1983, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators II", Springer-Verlag, New York.

(10) W,L, Wendland, E. Stephan, Darmstadt, and G.C. Hsiao, 1979, "On the Integral Equation Method for the Plane Mixed Boundary Value Problem of the Laplacian", Math. Meth, in the Appl., Vol.1, pp.265~321.