

<論 文>

Z형상 균열의 응력세기계수에 대한 경계요소 해석

이 강 용* · 원 동 성** · 최 형 집***

(1986년 8월 16일 접수)

Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Z-Shaped Cracks

Kang Yong Lee, Dong Sung Won and Hyung Jip Choi

Key Words: Boundary Element Method(경계요소법), Double-Point Concept(이중절점 개념), Multiregion Technique(다중영역 기법), Z-Shaped Crack(Z형상 균열)

Abstract

Stress intensity factors are computed by the boundary element method employing the multiregion technique along with the double-point concept. To demonstrate the validity of the current method, the stress intensity factors of the well-known simple models such as a slanted edge crack and an arcular crack are determined, in advance, which are proved to be in good agreement within 5% with the pre-existing solutions. Z-shaped cracks are analyzed with various branch crack lengths and branching angles.

1. 서 론

균열의 응력세기계수를 해석적 엄밀해의 형태(closed form)로 얻지 못할 경우에 많은 연구자들은 유한요소법이나 경계요소법과 같은 수치해석적 방법을 이용하고 있다. 그러나 응력세기계수 산정에서는 요소의 분할이 경계에서만 이루어지는 경계요소법이 더욱 효과적이다^(1,2).

경계요소법에 의해서 균열문제를 풀고자 최초로 시

도한 자는 Cruse⁽³⁾였으며 그 이후 Blanford 등⁽⁴⁾이 다중영역법(multi-region method)을 경계요소법에 적용함으로써 하중방향에 경사진 직선균열 문제에도 성공적으로 적용할 수 있음을 보였다. 그리고 Chaudonneret⁽⁵⁾는 탄성문제에서 트랙션 벡터의 불연속 현상을 해결하기 위해서 이중절점(double-point) 개념을 경계요소법에 도입하였다.

그러나, 다중영역법과 이중절점법을 동시에 사용하여 균열을 해석한 바는 아직 없는 것 같다. 이중절점 개념이 다중영역법과 함께 균열해석에 도입될 경우에 기하학적 형상(모서리 부분) 및 경계조건(균열선단) 등으로 인해 발생하는 트랙션 불연속 현상에 대해 정확한 수치모델을 제시할 수 있다.

* 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

** 두산컴퓨터

*** 연세대학교 대학원

따라서 본 연구에서는 다중영역법과 이중절점법을 이용하여 응력세기 계수를 산정할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하고, 개발된 프로그램을 기존결과가 있는 직선균열 및 곡선균열에 적용하여 그 타당성을 검토한 후 엄밀해가 존재하지 않는 Z형상 균열에 대한 응력세기계수 값을 제시하고자 한다.

2. 이 론

경계적분방정식은 다음과 같다⁽⁶⁾.

$$C_{ij}(P)u_j(P) + \int_s T_{ij}(P, Q)u_j(Q)ds(Q) = \int_s U_{ij}(P, Q)t_j(Q)ds(Q) \quad (1)$$

여기서 P 와 Q 는 경계면 s 상의 점으로서, 점 P 는 고정된 점이고, 점 Q 는 경계면을 따라 위치가 변화하는 점이다. 좌변의 적분기호는 Cauchy의 주치적분(principal value integral)을 뜻한다. 또한 u_j 와 t_j 는 각각 경계면 상에서의 변위와 트래션이고 C_{ij} 는 경계면의 기하학적 형상에 따라 영향을 받는 상수로써 경계면이 원할(smooth)하면 $(1/2)\delta_{ij}$ 이다. δ_{ij} 는 Kronecker delta이다. $T_{ij}(P, Q)$ 와 $U_{ij}(P, Q)$ 는 경계상의 P 점에서 i 방향 단위점력(unit point load)으로 인한 경계상의 Q 점에서의 j 방향 기초해로써 각각 기초트래션해(fundamental traction solution)와 기초변위해(fundamental displacement solution)라 칭하며 평면변형률 상태에서 다음과 같이 표현된다.

$$T_{ij}(P, Q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \cdot \frac{\partial r}{\partial n} - (1-\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (2-a)$$

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right\} \quad (2-b)$$

여기서 G 는 전단계수, ν 는 프와송비이다. r 은 P 와 Q 점 사이의 거리이며 $r_{,i}$ 는 r 을 점 Q 에서 편미분한 것을 뜻한다. n_i 는 Q 점에서의 단위 수직 벡터이며 평면응력상태 일때는 식 (2)의 ν 는 $\nu/(1+\nu)$ 로 대체된다.

식 (1)에 경계요소법을 적용하여 수치근사해를 구하기 위해서는 경계면 s 를 N 개의 요소로 분할하면 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$C_{ij}(P)u_j(P) + \sum_{m=1}^N \int_{s_m} T_{ij}(P, Q_m)t_j(Q_m)ds(Q_m) = \sum_{m=1}^N \int_{s_m} U_{ij}(P, Q_m)t_j(Q_m)ds(Q_m) \quad (3)$$

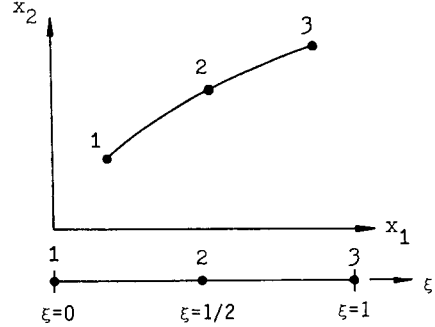


Fig. 1 Local coordinates system for a boundary element

Fig. 1과 같은 $0 \leq \xi \leq 1$ 의 국부좌표계(local coordinates system)에서 등매개 2차요소(isoparametric quadratic element)를 사용할 경우에 형상함수(shape function)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^1(\xi) &= 2(\xi-1/2)(\xi-1) \\ \phi^2(\xi) &= -4\xi(\xi-1) \\ \phi^3(\xi) &= 2\xi(\xi-1/2) \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에 의해서 경계에서의 각 요소내의 범위와 트래션 및 기하학적 형상은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i^m &= \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi) u_{i,m,k} \\ t_i^m &= \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi) t_{i,m,k} \\ x_i^m &= \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi) x_{i,m,k} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에 의해서 식 (3)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} C_{ij}(P^{n,l})u_j(P^{n,l}) + \sum_{m=1}^N \int_0^1 T_{ij}[P^{n,l}, Q_m(\xi)] \cdot \phi^k(\xi) J(\xi) d\xi u_{j,m,k} &= \sum_{m=1}^N \int_0^1 U_{ij}[P^{n,l}, Q_m(\xi)] \cdot \phi^k(\xi) J(\xi) d\xi t_{j,m,k} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 $J(\xi)$ 는 경계요소를 직교좌표계 x_i 에서 국부좌표계 ξ_i 로 변환시킬 때의 Jacobian이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J(\xi) &= \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d\phi^k}{d\xi} x_{1,m,k}\right)^2 + \left(\frac{d\phi^k}{d\xi} x_{2,m,k}\right)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (5), (6)과 (7)에서 상첨자 m 과 k 는 적분이 수행되는 임의의 m 번째 경계요소와 그 요소에서 k 번째 절점을 그리고 n 과 l 은 점 P 가 속한 요소와 거기서의 절점을 각각 나타낸다. 식 (6)을 편미분 다음과 같이 표현한다.

$$C_{ij}(P^{n,i})u_j(P^{n,i}) + \sum_{n=1}^N \overset{*}{T}_{ij}{}^{m,k} u_j{}^{m,k} = \sum_{n=1}^N U_{ij}{}^{m,k} t_j{}^{m,k} \quad (8)$$

여기서 $\overset{*}{T}_{ij}$ 와 U_{ij} 는 식 (6)의 $u_j{}^{m,k}$ 와 $t_j{}^{m,k}$ 에 대한 계수의 적분을 각각 나타낸다.

전체 요소에 대해서 수치적분을 수행하고 요소와 요소사이의 절점에서 변위의 연속성을 고려하면 식 (6)은 다음의 행렬식 형태로 나타낸다.

$$[T]\{u\} = [U]\{t\} \quad (9)$$

여기서,

$$[T] = [C] + [\overset{*}{T}] \quad (10)$$

식 (9)의 $\{c\}$ 는 점 P 가 원활곡면에 있을 때는 $(1/2)\delta_{ii}$ 이다. 그렇지 않을 경우에는 강제변형운동 조건⁽⁷⁾으로부터 구하여진다. 이와같이 $[T]$ 와 $[U]$ 가 모두 결정되면 경계면에서의 미지수를 구하기 위해 식 (9)를 다음의 형태로 재구성하고 그 해를 구한다.

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (11)$$

여기서 $\{x\}$ 는 경계에서 미지의 변위 u_i 와 트렉션 t_i 로 구성된 벡터이다. 식 (9)로부터 행렬 $[A]$ 를 구성할 때 절점에서 트렉션의 불연속이 일어나면 이중절점을 그 점에 부여하고 해당 이중절점에 다음의 보조방정식⁽⁵⁾을 이용하여 행렬식의 특이화를 막을 수 있다.

$$t_1^{m+1,1} n_1^{m,3} - t_1^{m,3} n_1^{m+1,1} = t_2^{m+1,1} n_2^{m,3} - t_2^{m,3} n_2^{m+1,1} \quad (12)$$

여기서 t_i 와 n_i 는 각 절점에서의 트렉션 벡터와 단위 수직 벡터의 성분을 각각 나타낸다.

이제 균열해석에 경계요소법의 다중영역법을 적용하기 위해서 균열면이 접합경계면(interface boundary)에 포함되도록 Fig. 2에서와 같이 물체를 소영역(subregion)들로 분할한다. 그리고 식 (1)의 경계적분 방정식이 각 소영역에 대해서도 적용되므로 각 영역에서 식 (9)와 같은 형태의 행렬식이 다음과 같이 구성된다.

$$[\overset{\circ}{T}_1^b \overset{\circ}{T}_1^b T_1^I] \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{u}_1^b \\ \overset{\circ}{u}_1^b \\ u_1^I \end{Bmatrix} = [\overset{\circ}{U}_1^b \overset{\circ}{U}_1^b U_1^I] \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{t}_1^b \\ \overset{\circ}{t}_1^b \\ t_1^I \end{Bmatrix} \quad (13-a)$$

$$[\overset{\circ}{T}_2^b \overset{\circ}{T}_2^b T_2^I] \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{u}_2^b \\ \overset{\circ}{u}_2^b \\ u_2^I \end{Bmatrix} = [\overset{\circ}{U}_2^b \overset{\circ}{U}_2^b U_2^I] \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{t}_2^b \\ \overset{\circ}{t}_2^b \\ t_2^I \end{Bmatrix} \quad (13-b)$$

여기서 삼첨자 b 와 I 는 분할이전의 외부경계면(outer boundary)와 분할 이후의 접합경계면을 각각 의미하고, 하첨자는 분할된 소영역들을 나타낸다. 그리고 기호 \wedge 은 경계조건이 주어지지 않은 것을 뜻하고 기호 \circ 은 경계조건이 주어진 것을 의미한다.

접합경계면에서는 변위의 적합조건과 트렉션의 평형

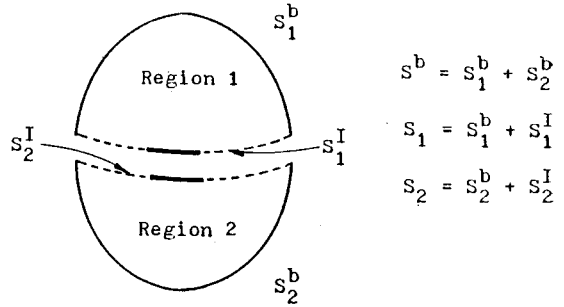


Fig. 2 Subregion for crack analysis

조건이 만족되어야 하므로 다음 식을 얻는다.

$$u^I = u_1^I = u_2^I \quad (14-a)$$

$$t^I = t_1^I = -t_2^I \quad (14-b)$$

식 (14)를 이용하여 식 (13)을 하나의 행렬식으로 조합한 뒤 미지수를 좌변에 그리고 경계조건에 의한 미지수를 우변에 정돈하면 최종적으로 식 (11)과 같은 형태의 행렬식을 전체영역에 대하여 아래와 같이 재구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{T}_1^b - \overset{\circ}{U}_1^b & -U_1^I & T_1^I & \circ \\ \circ & U_2^I & T_2^I & \overset{\circ}{T}_2^b - \overset{\circ}{U}_2^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{u}_1^b \\ \overset{\circ}{t}_1^b \\ t_1^I \\ u_1^I \\ \overset{\circ}{u}_2^b \\ \overset{\circ}{t}_2^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overset{\circ}{T}_1^b & \overset{\circ}{U}_1^b & \circ \\ \circ & -\overset{\circ}{T}_2^b & \overset{\circ}{U}_2^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{u}_1^b \\ \overset{\circ}{t}_1^b \\ u_2^b \\ \overset{\circ}{t}_2^b \end{Bmatrix} \quad (15)$$

따라서 식 (15)에 의해서 접합경계면을 포함하는 모든 외부 경계의 변위와 트렉션을 결정할 수 있다.

3. 응력세기계수 결정

2차 등매개 요소를 사용할 경우 Fig. 3와 같이 직선 또는 곡선균열에서 Mode I과 Mode II 응력세기계수 K_I 과 K_{II} 는 다음 식으로 구해진다⁽⁸⁾.

$$K_I = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} (v_D - v_B) \quad (16-a)$$

$$K_{II} = \frac{2G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} (u_D - u_B) \quad (16-b)$$

여기서

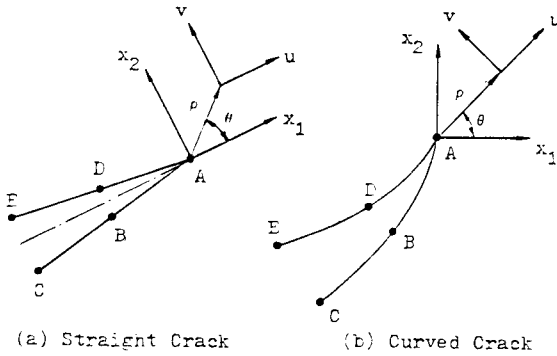


Fig. 3 Crack tip element

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{평면응력 상태} \\ 3-4\nu & \text{평면변형률 상태} \end{cases}$$

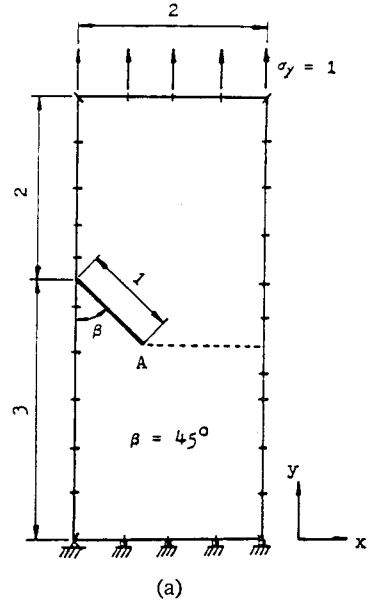
v 및 u 는 각 절점에서의 각각 x_2 방향 또는 θ 방향의 변위와 x_1 방향 또는 ρ 방향의 변위이다.

4. 수치해석 방법과 결과 및 검토

본 연구에 사용된 프로그램은 Brebbia⁽²⁾, Banerjee⁽⁹⁾ 등이 제시한 경계요소법과 영역분할 방법에 대한 알고리즘을 이용하여 작성하였다. 해석 모델의 모든 요소에 2 차의 등매개요소(isoparametric quadratic element)가 사용되었고 특히 적분시에는 입력자료에 의해 적분점수(number of integration points)를 지정하게 하였으며 특이적분을 제외한 곳에서는 자동으로 적분점수를 결정하도록⁽¹⁰⁾ 작성하였다. 특히 corner 점, 트랙션 불연속점, 균열선단 등에는 이중절점을 부여하도록 작성하였다. 또한 식 (9)와 (10)에서 $[u]$ 와 $[\dot{T}]$ 를 구하기 위하여 각 경계요소에 대해 다음과 같이 수치적분을 하였다. 즉 U_{ij} 와 \dot{T}_{ij} 의 피적분 함수 U_{ij} 와 T_{ij} 는 식 (2)에서와 같이 $O(\ln \frac{1}{r})$ 과 $O(\frac{1}{r})$ 의 차수를 가지므로 P 점과 Q 점이 일치하지 않을 경우에는 일반 Gauss의 수치적분에 의해서 U_{ij} 와 \dot{T}_{ij} 가 구하여지나 P 점과 Q 점이 일치하면 특이 현상이 발생하므로 해당 인접 요소들을 소요소(subelement)들로 분할한 뒤 U_{ij} 를 포함하는 항은 logarithmic Gauss 수치적분⁽¹¹⁾에 의해 구하고, T_{ij} 를 포함하는 항인 Cauchy의 수치적분은 Kutt⁽¹²⁾가 제시한 적분공식을 적용하였다.

최종행렬식인 식 (15)를 풀기 위해서 요소 수가 적은 모델문제에는 컴퓨터의 주기억 장치만을 사용하였고 요소 수가 많은 모델문제에서는 Crotty 등⁽¹³⁾이 제시한 block solution 방법을 사용하였다.

Fig. 4(a)에서 보이는 경사진 가장자리균열(slanted



(a)

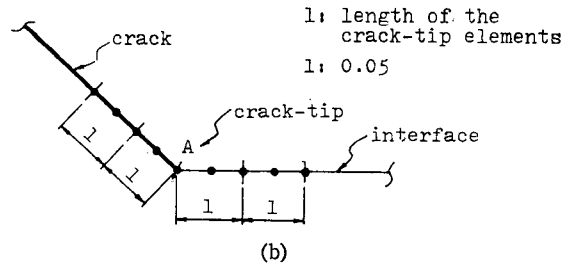


Fig. 4 (a) A slanted edge crack and (b) element partition at the crack tip

Table 1 The stress intensity factors of a slanted edge crack

	Ref. (14)	Present	% diff.
$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	1.20	1.22	-1.67
$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	0.57	0.54	5.26

$$\% \text{ diff.} = \frac{\text{ref. (14)} - \text{present}}{\text{ref. (14)}} \times 100$$

edge crack)은 균열선단 A에서 x축에 나란하게 두 영역으로 분할하고 각 영역의 경계는 상부영역에서 33개 하부영역에서 34개씩 모두 67개로 분할하였으며 균열선단 좌우 4 요소의 길이는 Fig. 4(b)에서 보는 바와 같이 균열길이의 5%로 하였다. 계산된 응력세기계수 K_I 과 K_{II} 는 Table 1에서 보는 바와 같이 기존 결과⁽¹⁴⁾와 K_I 은 -1.67%, K_{II} 는 5.26% 차이를 보였다.

Fig. 5(a)와 같은 원호균열(arcular crack)은 무한체인 경우에 엄밀해가 존재한다. 이 모델은 곡선균열, 그

리고 영역분할 방법 등을 복합적으로 테스트할 수 있는 문제이다. 엄밀해와 비교하기 위해 Fig. 5(a)와 같이 균열길이에 비해 상당히 큰 물체를 선정했다. 모델은 y 축에 대해 대칭이므로 반으로 나누어 해석하였으며 접합경계면은 균열선단 A에서 x 축에 평행하게 분할하여 각 영역에서 47개씩 모두 94개의 요소로 분할하였다. 균열선단 A에서 요소분할은 Fig. 5(b)에서 보는 바와 같이 균열면 및 접합경계면 쪽으로 각각 2개 요소들은 모두 전체 균열길이의 3.3%로 분할하였

다. 계산된 응력세기계수의 결과는 Table 2에서 보는 바와 같이 엄밀해와 K_I 응력세기계수 값은 2%, K_{II} 응력세기계수 값은 4%의 차이를 보였다.

Fig. 6(a)에서와 같은 Z형상 균열은 β 는 45° , 90° 로 α 는 45° , 90° , 135° 로 변화를 주었다. 그리고 b/a 는 $1/40$, $2/40$, $3/40$, $4/40$ 로 변화시켰다. 영역분할은 균열선단 A에서 가지친 균열 방향으로 일직선으로 분할하였다. 균열선단 A에서 좌우요소의 길이는 Fig. 6(b)에서 보는 바와 같이 $b/36$ 로 하였고 그 요소와 연결된 요소는 $b/18$ 로 하여 각 영역에 60개씩 총 120개의 요소로 분할하였다.

Z균열에서의 3가지 변수 b/a , β , α 를 변화시켰을 때의 응력세기계수의 변화는 Table 3과 Fig. 7, Fig. 8에서 보면 기존의 엄밀해가 존재하는 β 와 α 가 일치하는 경우는, 본 연구에서 산출된 값과 비교하여 0.3~4% 사이의 오차내에서 일치하고 있다. $\beta=45^\circ$, $\alpha=90^\circ$ 일 경우에, 가지친 균열의 길이가 증가할 때 K_{II} 가 감소하는 값을 보여주고 있다. 이때 전체 균열형상을 하중이 수직하게 투영시켰을 때의 길이 $2c$ 의 균열에 대한 Mode I 응력세기계수 (K_I) projection과 투영이전의 K_I 과 비교했을 때 많은 차이를 주고 있으므로

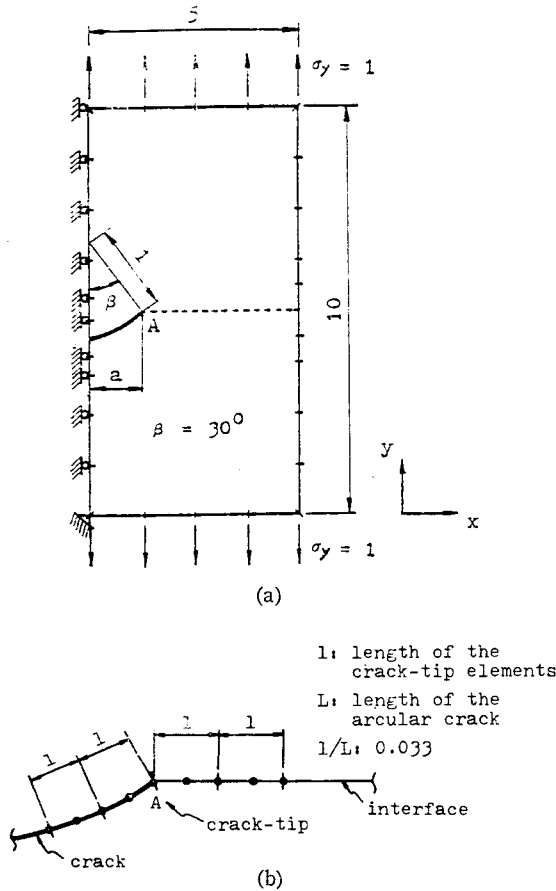


Fig. 5 (a) Half of an arcular crack and (b) element partition at the crack tip

Table 2 The stress intensity factors of an arcular crack

	Ref. (15)	Present	% diff.
$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	0.90	0.88	2.2
$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	0.24	0.23	4.2

$$\% \text{ diff.} = \frac{\text{ref. (15)} - \text{present}}{\text{ref. (15)}} \times 100$$

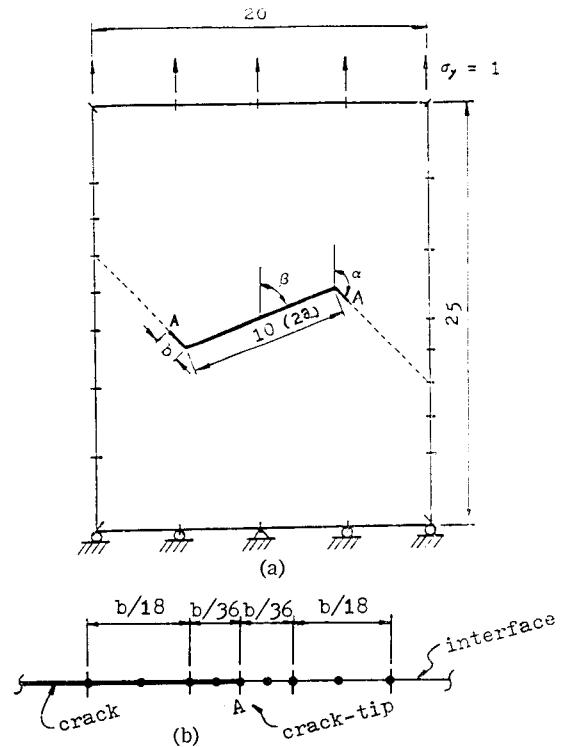


Fig. 6 (a) A Z-Shaped crack and (b) element partition at the crack tip

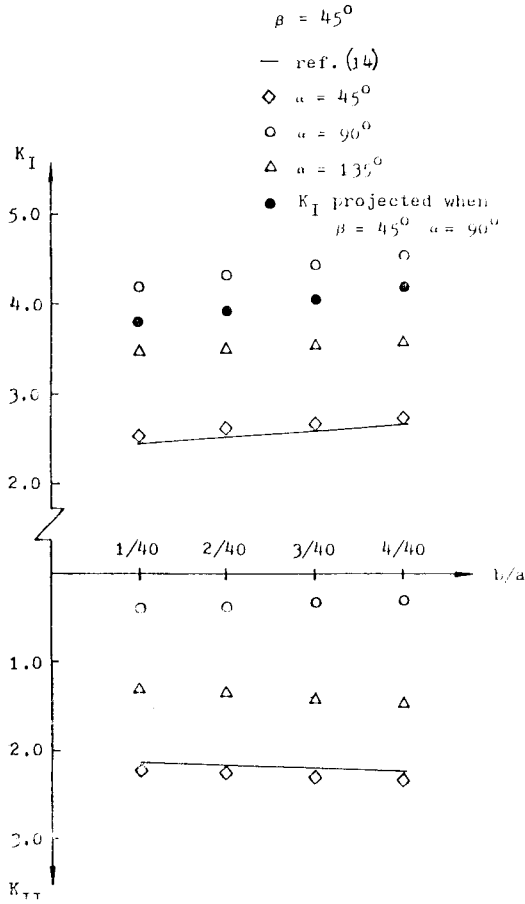


Fig. 7 Variation of stress intensity factors with branch crack length for $\beta=45^\circ$

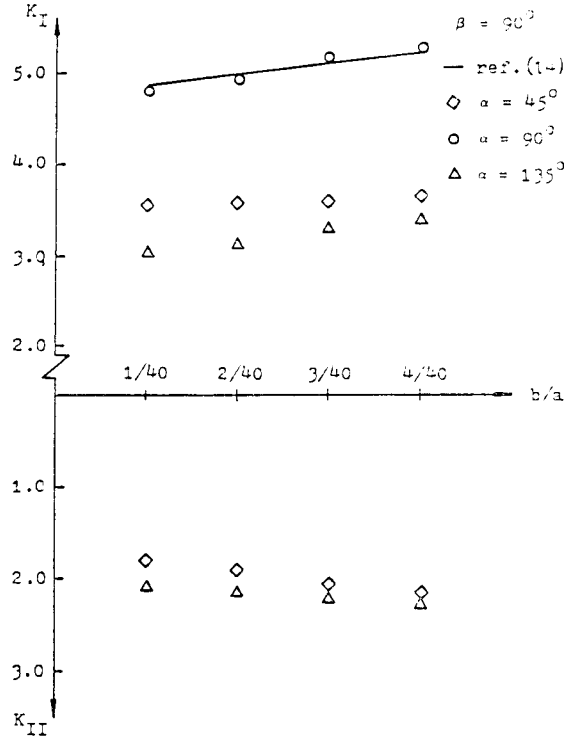


Fig. 8 Variation of stress intensity factors with branch crack length for $\beta=90^\circ$

투영된 균열로부터 응력세기계수를 측정하는 것은 무리가 있다 하겠다. 그리고 $\alpha=135^\circ$ 일 때 $\beta=45^\circ, 90^\circ$ 에 대해서 K_{II} 가 음의 값을 가지는 것은 전단응력의 방향

Table 3 Stress intensity factors for Z-shaped cracks

b/a		1/40		2/40		3/40		4/40	
β	α	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}
45°	45°	2.514 (2.472)*	2.208 (2.163)*	2.594 (2.526)*	2.264 (2.199)*	2.674 (2.589)*	2.318 (2.235)*	2.745 (2.660)*	2.366 (2.270)*
	90°	4.197	0.407	4.321	0.381	4.442	0.358	4.555	0.335
	135°	3.477	-1.329	3.495	-1.384	3.516	-1.441	3.531	-1.495
90°	45°	3.568	1.827	3.570	1.984	3.584	2.114	3.613	2.221
	90°	4.817 (4.855)*	0	4.969 (4.959)*	0	5.117 (5.095)*	0	5.253 (5.196)*	0
	135°	3.043	-2.078	3.132	-2.143	3.258	-2.213	3.399	-2.308
45°	90°	(K_I) projection		(K_I) projection		(K_I) projection		(K_I) projection	
		3.815		3.931		4.066		4.202	

(*) : Ref. (14)

이 바뀌므로 인해서 연유한 것이며, Fig. 7 와 Fig. 8 에서 이 경우에 한하여 K_{II} 를 음의 값으로 읽어야 한다.

또한 $\beta=45^\circ$ 일 때는 $\alpha=135^\circ$ 의 경우가 $\alpha=45^\circ$ 일 때보다 K_I 은 더 큰 값을, K_{II} 는 더 작은 값을 주고 있다. 이는 $\alpha=135^\circ$ 의 균열형상은 균열의 축 부분에서 가지친 균열이 모서리를 형성하여 균열면에서의 미끄럼(sliding)을 어느 정도 억제하는데 기인한다고 풀이된다.

그리고 $\beta=90^\circ$ 이고 $\alpha=45^\circ$, 135° 일 때, 이론적으로는 양 끝에서 하중을 가함으로 인하여 K_I 과 K_{II} 의 절대값이 각각의 α 에 대해서 같아야 하나 본 수치결과에서는 강제운동을 방지하기 위하여 하단을 교차시켰으므로 아래로 향하는 가지친 균열을 중심으로 굽힘이 작용하여 K_I 은 $\alpha=45^\circ$ 에서 K_{II} 는 $\alpha=135^\circ$ 의 경우에서 그 밖의 α 값일 때보다 더 큰 값을 보여준 것으로 풀이된다. 그러나 가지친 균열의 길이가 증가함에 따라 $\alpha=45^\circ$ 와 135° 일 때에 응력세기계수의 값들은 서로 접근하는 경향을 보여주고 있다.

5. 결 론

다중영역법과 이중절점법을 동시에 경제요소적분법에 적용하여 균열의 응력세기 계수를 산정하는 연구에서 다음의 결과를 얻었다.

(1) 본 연구의 수치결과 중 기존의 해가 존재하는 경우는 산출된 응력세기계수가 기존 결과와 잘 일치한다.

(2) Z형상 균열의 축(web) 부분이 하중과 45° 를 이루고, 가지친 부분이 하중과 수직인 경우에, Mode I 응력세기계수 값은 축부분과 가지친 부분을 하중에 수직으로 투영시킨 균열길이로 계산한 결과와 많은 차이를 주고 있다.

(3) 경제요소법의 다중영역법과 이중절점법을 동시에 사용할 경우 Z형상의 균열에 대해서도 응력세기계수를 효과적으로 산정할 수 있다는 가능성을 제시하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 연구비에 의해 수행되었으며 이에 깊이 감사하는 바이다.

또한 연세대학교 기계공학과 대학원생 백충현, 설창원, 최청호, 최홍섭군의 컴퓨터 계산 및 원고 작성에

도움을 준 것에 감사한다.

참 고 문 헌

- (1) O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly and P. Bettess, The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, pp. 355~375, 1977
- (2) C.A. Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1980
- (3) T.A. Cruse and W. Van Buren, The Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack, Int. J. Fracture Mech., Vol. 7, pp. 1~16, 1971
- (4) G.E. Blanford, A.R. Ingraffea and J.A. Liggett, Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computation using the Boundary Element Method, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 387~404, 1981
- (5) M. Chaudonnerret, On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis, in Recent Advances in Boundary Element Methods, Edited by C.A. Brebbia, Pentech Press, London, pp. 185~194, 1978
- (6) T.A. Cruse, An Improved Boundary Integral Equation Method in Engineering Science, McGraw-Hill, pp. 177~201, 1981
- (7) T.A. Cruse, An Improved Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Stress Analysis, Comp. and Struct., Vol. 4, pp. 741~754, 1974
- (8) C.F. Shih, H.G. Delorenzi and M.D. German, Crack Extension Modelling with Singular Quadratic Isoparametric Element, Int. J. Fracture, Vol. 12, pp. 647~651, 1976
- (9) P.K. Banerjee, Integral Equation Methods for Analysis of Piecewise Non-Homogeneous Three Dimensional Elastic Solids of Arbitrary Shape, Int. J. Mech. Sci., Vol. 18, pp. 293~303, 1976
- (10) J.C. Lachat and J.O. Watson, Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 991~1005, 1976
- (11) A.H. Stroud and D. Secrest, Gaussian Quadrature Formula, Prentice Hall, New York, 1966
- (12) H.R. Kutt, On the Numerical Evaluation of

- Finite Part Integrals Involving an Algebraic Singularity, Report WISK 179, The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1975
- (13) J.M. Crotty, A Block Equation Solver for Large Unsymmetric Matrices Arising in the Boundary Integral Equation Method, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, pp.997~1017, 1982
- (14) D.P. Rooke and D.J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, London Her Majesty's Stationary Office, 1976
- (15) G.C. Sih, *Handbook of Stress Intensity Factors*, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1973