884 大韓機械學會論文集 第11卷 第6號, pp. 884~894, 1987.

<論 文>

접합재료 경계면 균열의 응력세기계수에 대한 경계요소해석

이 강 용*·최 형 집**

(1987년 6월 3일 접수)

Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for the Bimaterial Interface Cracks

Kang Yong Lee and Hyung Jip Choi

Key Words: Stress Intensity Factor(응력세기계수), Boundary Element Method(경계요소법), Multiregion Technique(다중영역 기법), Double-Point Concept(이중절점개념)

Abstract

Stress intensity factors for the bimaterial interface cracks are determined by the boundary element method employing the multiregion technique along with the double-point concept. For this purpose, the formulas relating the stress intensity factors to the crack surface displacements, which are applicable to both the homogeneous and the bimaterial systems, are derived and the accuracy of the results is discussed using the preexisting analytic solutions. Besides, the stress intensity factors for the edge-cracked bimaterial plates are computed with various crack lengths and shear modulus ratios under the biaxial and the uniaxial loadings, respectively, to demonstrate the dependence of stress intensity factors on the loading conditions and the material properties.

1. 서 론

경계요소법은 근사해를 찾기위한 요소의 분할이 경계에서만 이루어지므로 노치나 균열과 같이 결함을 내포하는탄성체의 응력해석에 특히 유효하다. Cruse[1]가 경계요소법에 의해서 균열문제를 풀고자 최초로 시작한 후 Blanford등[2]이 Banerjee[3]가 개발한 다중영역법(multi-region method)을 하중방향에 경사진 균열문제에 성공적으로 적용하므로써 균열선단의 응력특이현상에 대한 수치해석상의 어려움을 해결하였다. Chaudonneret[4]는 탄성문제에서 기하학적 형상이나 외부하중의 불연속으로 인한 트랙션벡터의 불연속현상을 해결하기 위해서 이중절점(double-point)개념을 경계요소법에 도입하였다.

접합재료(bimaterial)의 경계면균열(interface crack)에 대한 연구는 암석역학(rock mechanics)에서 단층사이의 결합[5] 그리고 인체의 뼈와 PMMA(Polymethylmethacrylate)의 접합결합[6]등의 해석에 직접 응용될 수 있음에도 불구하고 아직 이러한 접합재료의 경계면 균열문제에 다중영역법과 이중절점법에 의한 경계요소법이 적용된 바는 없는 것 같다.

접합재료의 경계면 균열에 대한 해석학적 연구는 Williams[8]에 의해서 최초로 이루어졌고 그 뒤에 Er-

* 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과
** 연세대학교 대학원

dogan[7], England[8], Rice와 Sih[9] 등이 Muskhelishvili의 복소함수 이론을 적용한 바 있다. 그러나 William와 England는 파괴역학의 기본 매개변수인 응력세기계수에 대해서는 언급하지 않았고 Erdogan은 응력세기계수가 양 재료의 물성치에 무관하다는 결론을 얻었다. 그에 반해, Rice와 Sih는 양 재료의 상호영향을 고려하고 균질재료까지도 해석할 수 있는 합축성 있는 복소포텐샬을 유도함으로써 무한체에서의 이론적인 응력세기계수를 제시하였다. 이들의 이론은 Wang등[10]의 실험결과로 부터 그 타당성이 입증되었다. 본 연구에서는 접합재료의 경계면 균열에 대한 응력세기계수를 경계요소법의 다중영역법과 이중절점기법을 이용하여 산출하고자 한다.

2. 본 론

경계요소적분방정식은 다음과 같다[11].

$$C_{ij}(P)u_j(P)+\int_s T_{ij}(P,Q)u_j(Q)ds(Q)=\int_s U_{ij}(P,Q)t_j(Q)ds(Q) \quad (1)$$

여기서 P와 Q는 경계면 s상의 점으로서 점 P는 고정점이고 점 Q는 경계면을 따라 위치가 변하는 점이다. 그리고 좌변의 적분기호는 Cauchy의 주치적분(principal value integral)을 뜻한다. 또한 u_j와 t_j는 각각 경계면 상에서의 변위와 트랙션이고 C_{ij}는 경계면의 기하학적 형상에 따라 영향을 받는 상수로서 경계면이 원활(smooth)이면 $(1/2)\delta_{ij}$이다. δ_{ij}는 Kronecker delta이다. $T_{ij}(P,Q)$와 $U_{ij}(P,Q)$는 경계상의 P점에서 i방향 단위점력(unit point load)으로 인한 경계상의 Q점에서의 j방향 기초해로서 각각 기초 트랙션해(fundamental traction solution)와 기초변위해(fundamental displacement solution)라 칭하며 평면변형율상태에서 다음과 같이 표현된다[11].

$$T_{ij}(P,Q)=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{[(1-2\nu)\delta_{ij}+2r_{,i}r_{,j}]\cdot\frac{\partial r}{\partial n}-(1-2\nu)(r_{,i}n_j-r_{,j}n_i)\right\} \quad (2\text{-a})$$

$$U_{ij}(P,Q)=\frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij}+r_{,i}r_{,j}\right\} \quad (2\text{-b})$$

여기서 G는 전단계수, ν는 프와송비이다. r은 P와 Q점사이의 거리이며 $r_{,i}$는 r을 Q점에서 편미분한 것을 뜻한다. n은 Q점에서의 단위 수직벡터이며 평면응력상태일때는 식(2)의 ν는 $\nu/(1+\nu)$로 대체된다. 식(1)에 경계요소법을 적용하여 수치근사해를 구하기 위해서 경계면 s를 N개의 요소로 분할하면 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$C_{ij}(P)u_j(P)+\sum_{m=1}^{N}\int_{ds_m}T_{ij}(P,Q_m)u_j(Q_m)ds(Q_m)=\sum_{m=1}^{N}\int_{ds_m}U_{ij}(P,Q_m)t_j(Q_m)ds(Q_m) \quad (3)$$

$0\le\xi\le1$의 국부좌표계(local coordinates system)에서 등매개 2차요소(isoparametric quadratic elements)를 사용할 경우에 형상함수(shape function)는 다음과 같다.

$$\phi^1(\xi)=2(\xi-1/2)(\xi-1)$$
$$\phi^2(\xi)=-4\xi(\xi-1) \quad (4)$$
$$\phi^3(\xi)=2\xi(\xi-1/2)$$

식(4)에 의해서 경계에서의 각 요소내의 변위와 트랙션 및 기하학적 형상은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i^m=\sum_{k=1}^{3}\phi_k(\xi)U_i^{m,k}$$
$$t_i^m=\sum_{k=1}^{3}\phi^k(\xi)t_i^{m,k}$$
$$\chi_i^m=\sum_{k=1}^{3}\phi^k(\xi)\chi_i^{m,k} \quad (5)$$

식(5)에 의하여 식(3)은 다음과 같이 나타내진다[11].

$$C_{ij}(P_{n,l})u_j(P_{n,l})+\sum_{m=1}^{N}\left\{\int_0^1 T_{ij}[P^{n,l},Q_m(\xi)]\cdot\phi^k(\xi)J(\xi)d\xi\right\}u_j^{m,k}=\sum_{m=1}^{N}\left\{\int_0^1 U_{ij}[P^{n,l},Q_m(\xi)]\phi^k(\xi)J(\xi)d\xi\right\}t_j^{m,k} \quad (6)$$

식(6)에서 $J(\xi)$는 직교좌표계 χ_i에서 국부좌표계 ξ_i로 변환시 킬때의 Jacobian이며 다음과 같다.

$$J(\xi)=\sqrt{\left(\frac{d\chi_1}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{d\chi_2}{d\xi}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{d\phi^k}{d\xi}\chi_1^{m,k}\right)^2+\left(\frac{d\phi^k}{d\xi}\chi_2^{m,k}\right)^2} \quad (7)$$

식(5), (6)과 (7)에서 상첨자 m과 k는 적분이 수행되는 임의의 m번째 경계요소와 그 요소에서의 k번째 절점을 그리고 n과 l은 점 P가 속한 요소와 거기서의 절점을 각각 나타낸다. 식(6)을 편의상 다음과 같이 표현한다[11].

$$C_{ij}(P^{n,l})u_j(P^{n,l})+\sum_{m=1}^{N}\overset{*}{T}{}_{ij}^{m,k}u_j^{m,k}=\sum_{m=1}^{N}\overset{*}{U}{}_{ij}^{m,k}t_j^{m,k} \quad (8)$$

여기서 $\overset{*}{T}_{ij}$와 $\overset{*}{U}_{ij}$는 식(6)의 $u_j^{m,k}$와 $t_j^{m,k}$에 대한 계수의 적분을 각각 나타낸다.

전체요소에 대해서 수치적분을 수행하고 요소와 요

소사이에서의 절점에서 변위의 연속성을 고려하면 식 (6)은 다음의 형태로 나타내어진다.

$$[T]\{u\}=[\overset{*}{U}]\{t\} \tag{9a}$$

여기서 $[T]=[C]+[\overset{*}{T}]$ (9-b)

식(9)의 $[C]$는 경계가 원활곡면이면 $(1/2)\delta_{ij}$이지만, 그렇지않을 경우는 강체운동(rigid body motion)조건[12]으로 부터 구하여진다.

식(9)를 구성할 때 요소와 요소사이의 절점에서 트랙션의 불연속이 발생하면 이중절점을 그 점에 부여하고 해당 이중절점에 다음의 보조방정식[4]을 적용하여 특이화를 막을 수 있다.

$$t_1^{n+1,1}n_1^{n,3}-t_1^{n,3}n_1^{n+1,1}=t_2^{n,3}n_2^{n+1,1}-t_2^{n+1,1}n_2^{n,3} \tag{10}$$

여기서 t_i와 n_i는 각 절점에서의 트랙션벡터와 단위수직벡터의 성분을 각각 나타낸다.

부분비균질 재료의 접합면에 존재하는 균열의 해석에 다중영역법을 적용하기 위하여 Fig. 1에서와 같이 균열면이 접합경계면(interface boundary)에 포함되도록 물체를 소영역(subregion)들로 분할한다. 그리고 식 (1)의 경계적분방정식이 각 소영역에서 적용되므로 식 (9)와 같은 형태의 행렬식이 각 영역에서 다음과 같이 구성된다.

$$[\hat{T}_1^b\ \mathring{T}_1^b\ T_1^I]\begin{Bmatrix}G_m\ \hat{u}_1^b\\ G_m\ \mathring{u}_1^b\\ G_m\ u_1^I\end{Bmatrix}=\frac{G_m}{G_1}[\hat{U}_1^b\ \mathring{U}_1^b\ U_1^I]\begin{Bmatrix}\hat{t}_1^b\\ \mathring{t}_1^b\\ t_1^I\end{Bmatrix}$$

소영역 1 (11-a)

$$[\hat{T}_2^b\ \mathring{T}_2^b\ T_2^I]\begin{Bmatrix}G_m\ \hat{u}_2^b\\ G_m\ \mathring{u}_2^b\\ G_m\ u_2^I\end{Bmatrix}=\frac{G_m}{G_2}[\hat{U}_2^b\ \mathring{U}_2^b\ U_2^I]\begin{Bmatrix}\hat{t}_2^b\\ \mathring{t}_2^b\\ t_2^I\end{Bmatrix}$$

소영역 2 (11-b)

여기서, 기본해 T_{ij}와 U_{ij}는 식(2)에서 보여주듯이 전단계수 G 만큼의 차수가 차이나므로, U_i/G_i는 식(9)에서의 $\overset{*}{U}_i$이고, G_m은 행렬식의 안정성과 접합경계면에서 변위의 적합성까지 고려하기 위한 평균전단계수(mean shear modulus)로서 다음과 같이 정의된다.

$$G_m=\frac{1}{2}(G_1+G_2) \tag{12}$$

그리고 상첨자 b와 I는 분할 이전의 외부경계면(outer boundary)과 분할 이후의 접합경계면을 각각 의미하고 하첨자는 분할된 소영역들을 뜻한다. 또한 기호 ^은 경계조건이 주어지지 않은 것을 뜻하고, 기호 ○은 경계 조건이 주어진 것을 의미한다.

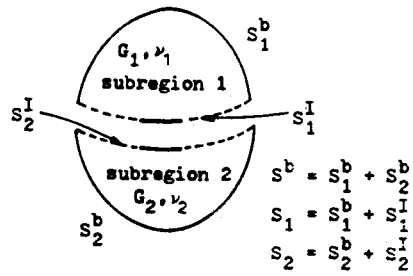


Fig.1 Subregions of a piecewise nonhomogeneous solid with a crack along the interface

접합경계면에서는 변위의 적합조건과 트랙션의 평형조건이 만족되어야 하므로 다음식을 얻는다.

$$u^I=u_1^I=u_2^I \tag{13-a}$$

$$t^I=t_1^I=-t_2^I \tag{13-b}$$

식(13)을 적용하여 식 (11)을 하나의 행렬식으로 조합하고 미지수를 좌변에 그리고 경계조건에 의한 기자수를 우변에 정돈하면 최종적으로 전체영역에 대하여 아래와 같은 행렬식을 재구성 할 수 있다.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \hat{T}_1^b & -\frac{G_m}{G_1}\hat{U}_1^b & -\frac{G_m}{G_1}U_1^I\ \ T_1^I & 0 \\ \hline 0 & \frac{G_m}{G_2}U_2^I\ \ T_2^I & \hat{T}_2^b\ \ -\frac{G_m}{G_2}\hat{U}_2^b \end{array}\right]\cdot\left\{\begin{array}{c} G_m\hat{u}_1^b \\ \hat{t}_1^b \\ \hline t_1^I \\ G_m u_1^I \\ \hline G_m\hat{u}_2^b \\ \hat{t}_2^b \end{array}\right\}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} -\mathring{T}_1^b\ \ \frac{G_m}{G_1}\mathring{U}_1^b & 0 \\ \hline 0 & -\mathring{T}_2^b\ \ \frac{G_m}{G_2}\mathring{U}_2^b \end{array}\right]\cdot\left\{\begin{array}{c} G_m\hat{u}_1^b \\ \mathring{t}_1^b \\ \hline G_m\hat{u}_2^b \\ \mathring{t}_2^b \end{array}\right\} \tag{14}$$

따라서 식 (14)에 의해서 접합경계면을 포함하는 모든 외부경계면에서의 변위와 트랙션을 결정할 수 있다.

3. 응력세기계수의 결정

Fig. 2와 같은 무한체 접합재료의 경계면 균열해석을 위한 응력함수를 Rice와 Sih[9]는 Muskhelishvili의 복소함수 방법에 의해 구한바 있다. 이 결과를 변위와 복소응력함수 관계식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 균열선단 주의의 변위 분포식을 얻을 수 있다.

$$2G_1u_1=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\Big\{\kappa_1 e^{-\zeta(\theta-\pi)}\Big\{K_I-2\zeta$$

$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)+\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)\Big\}-e^{-\zeta(\theta-\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)-\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}+e^{\zeta(\theta-\pi)}\Big\{K_{\mathrm{I}}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)$$
$$+K_{\mathrm{II}}\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}\sin\theta\Big] \qquad (15\text{-a})$$

$$2G_1v_1=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\Big[\kappa_1e^{\zeta(\theta-\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)-\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)\Big\}+e^{-\zeta(\theta-\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)+\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}+e^{\zeta(\theta-\pi)}\Big\{K_{\mathrm{I}}$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)-K_{\mathrm{II}}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}\sin\theta\Big]$$
$$\text{for } y>0 \qquad (15\text{-b})$$

$$2G_2u_2=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\Big[\kappa_2e^{\zeta(\theta+\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)+\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)\Big\}-e^{-\zeta(\theta+\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)-\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}-e^{\zeta(\theta+\pi)}\Big\{K_{\mathrm{I}}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)$$
$$+K_{\mathrm{II}}\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}\sin\theta\Big] \qquad (16\text{-a})$$

$$2G_2v_2=\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\Big[\kappa_2e^{\zeta(\theta+\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)-\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}-\zeta\ln r\Big)\Big\}+e^{-\zeta(\theta+\pi)}\Big\{\Big[K_{\mathrm{I}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)+\Big[K_{\mathrm{II}}-2\zeta$$
$$\cdot\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\pi\zeta}\sqrt{\pi a}\Big]$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}+e^{\zeta(\theta+\pi)}\Big\{K_{\mathrm{I}}\cos\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta'\ln r\Big)$$
$$-K_{\mathrm{II}}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\zeta\ln r\Big)\Big\}\sin\theta\Big]$$
$$\text{for } y<0 \qquad (16\text{-b})$$

여기서 u_i와 v_i는 각각 r과 θ방향의 변위이고, σ_y와 τ_{xy}는 외부에서 가해주는 하중을 의미한다. 그리고 K_{I}과 K_{II}는 열림형 및 전단형 응력세기계수로서 참고문헌 (9)의 식(31)에 $\sqrt{\pi}$를 곱해준 값이다. 또한 a는 균열 길이의 반이고 ζ는 다음과 같이 정의 된다.

$$\zeta=\frac{1}{2\pi}\ln\Big[\frac{\kappa_1G_2+G_1}{\kappa_2G_1+G_2}\Big] \qquad (17)$$

$$\kappa_i=\begin{cases}(3-\nu_i)/(1+\nu_i) & \text{평면 응력상태}\\ 3-4\nu_i & \text{평면 변형률태}\end{cases}\quad(i=1,2) \qquad (18)$$

균질재료일때는 $\zeta=0$ 이므로, 이 경우에는 위의 식들은 균질재료의 균열첨단 주위에서의 기존 변위분포식[13]과 일치한다.

균열면의 변위로 부터 응력세기계수를 구하는 공식을 유도하기 위하여, 식 (15)에 $\theta=180°$를 대입하고 식(16)에는 $\theta=-180°$를 대입하여 균질재료인 경우에 응력세기계수와의 관계식을 유도하는 방법[14]을 따르면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

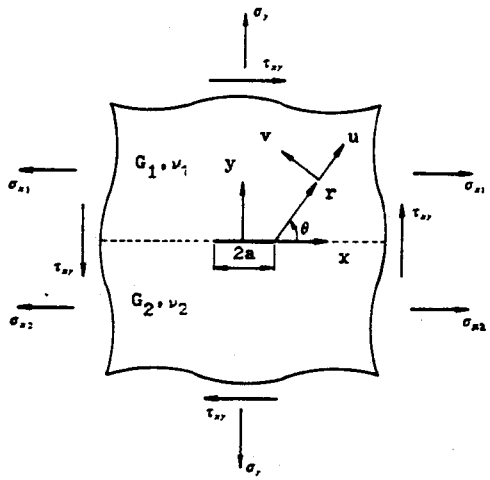


Fig. 2 Infinite bimaterial plate with a crack under stresses at infinity

$$K_I=\frac{2G_1}{\kappa_1+1}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}[u_{BA}\sin(\zeta\ln r)+v_{BA}\cos(\zeta\ln r)]$$
$$+\frac{2G_2}{\kappa_2+1}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}[u_{AD}\sin(\zeta\ln r)+v_{AD}\cos(\zeta\ln r)]$$
$$+2\zeta\frac{\sigma_y\sin(\zeta\ln 2a)-\tau_{xy}\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\ \pi\zeta}\sqrt{\pi a} \tag{19-a}$$

$$K_{II}=\frac{2G_1}{\kappa_1+1}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}[u_{BA}\cos(\zeta\ln r)-v_{BA}\sin(\zeta\ln r)]$$
$$+\frac{2G_2}{\kappa_2+1}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}[u_{AD}\cos(\zeta\ln r)-v_{AD}\sin(\zeta\ln r)]$$
$$+2\zeta\frac{\tau_{xy}\sin(\zeta\ln 2a)+\sigma_y\cos(\zeta\ln 2a)}{\cosh\ \pi\zeta}\sqrt{\pi a} \tag{19-b}$$

여기서 u_{pq}는 Fig. 3에서 보여주는 것과 같이 q점에 대한 p점에서의 상대적 변위를 의미한다. 균질재료일때는 $\zeta=0$이므로 이를 식(19)에 대입하면 균질재료에 대한 응력세기계수와 절점변위에 대한 기존의 관계식[14]이 얻어진다.

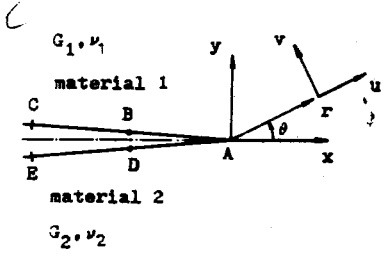


Fig. 3 Quadratic crack tip element for a bimaterial interface crack

4. 수치해석결과 및 검토

경계요소법에 의한 수치 계산을 하기 위하여 균질재료내의 Z형상균열의 응력세기계수를 산정하기 위한 경계요소 프로그램[15]을 부분비균질재료(piecewise non-homogeneous material)문제까지 해석할 수 있도록 발전시켜 이용하였다. 사용된 콤퓨터 기종은 CDC CYBER 170~825이다. 설정된 문제는 접합재료의 경계면 중앙균열 및 모서리 균열이다. 해석모델의 모든 경계요소는 등매개 2차요소를 사용하였다. 또한 식(9)에서 $[\overset{*}{U}]$와 $[\overset{*}{T}]$를 구하기 위하여 각 경계요소에 대해 다음과 같이 수치적분을 하였다. 즉 $\overset{*}{U}_{ij}$와 $\overset{*}{T}_{ij}$의 피적분함수 U_{ij}와 T_{ij}는 식(2)에서와 같이 각각 $O\left(\ln\frac{1}{r}\right)$과 $O\left(\frac{1}{r}\right)$의 치수를 가지므로 P점과 Q점이 일치하지 않을 경우에는 일반 Gauss의 수치적분에 의해서 $\overset{*}{U}_{ij}$와 $\overset{*}{T}_{ij}$가 구하여지나 P점과 Q점이 일치하면 특이현상이 발생하므로 해당 인접요소들을 소요소(subelement)들로 분할한뒤 U_{ij}를 포함하는 항은 logarithmic Gauss 수치적분[16]에 의해 구하고, T_{ij}를 포함하는 항인 Cauchy의 주치적분을 Kutt[17]가 제시한 적분공식을 적용하였다.

접합재료의 경계면 중앙균열은 y축에 대해서 대칭이므로 Fig. 4에서 보는 바와 같이 반으로 나누어 한쪽만 해석하였고 접합면을 따라 영역을 분할하여 수치계산을 하였다. 균열선단요소는 전체균열길이의 1.0%로 하였고 그밖의 균열면 요소들은 길이를 점차 증가시켜서 전체균열면 요소의 갯수는 무한체의 경우 11개 유한체의 경우 12~16개로 하였다. 결국 전체 경계요소

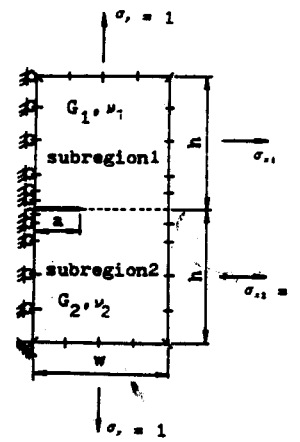


Fig. 4 Boundary element discretization of a center-cracked bimaterial plate

의 수는 한 영역에서 59~61개씩 모두 약 120개로 분할하였다. 특히 트랙션 불연속이 발생하는 균열선단과 각이진 모서리 부분에는 이중절점을 부여하였다.

무한체의 해석은 $a/w=1/15$, $w/h=1$로 하였고 엄밀해와 비교하기 위해서 하중조건은 양축하중상태로 하였다. σ_{z_1}은 참고문헌(9)의 식(19)에 의해서 계산되었다. 전단계수의 비 $R=G_2/G_1$의 변화에 따른 수치결과는 Table 1에서 보여주듯이 기존의 이론해와는 5% 이내의 오차를 보여주고 있다. 그리고 전단계수의 비가 증가할 때는 K_I의 값은 감소하나, K_{II}의 값은 증가하는 경향을 보여주고 있다. $R=1$일때는 K_I의 값은 평면변형율이나 평면응력상태에서 거의 같으나 $R>1$에서는 K_I의 값은 평면변형율일때, K_{II}의 값은 평면응력상태일때가 큰 값을 보여주며 그 차이는 R의 값이 클수록 벌어진다. K_{II}가 평면변형률에서 평면응력상태보다 작은 값을 가지는 현상은, 평면변형률일 경우 두께 방향으로의 응력이 미끄름을 억제하므로 인하여 발생한다고 풀이된다. 첨라서 접합재료 문제는 응력세기계수가 균질재료와는 달리 물성치 및 평면응력 및 평면변형률등의 영향을 받고 있음을 뜻한다.

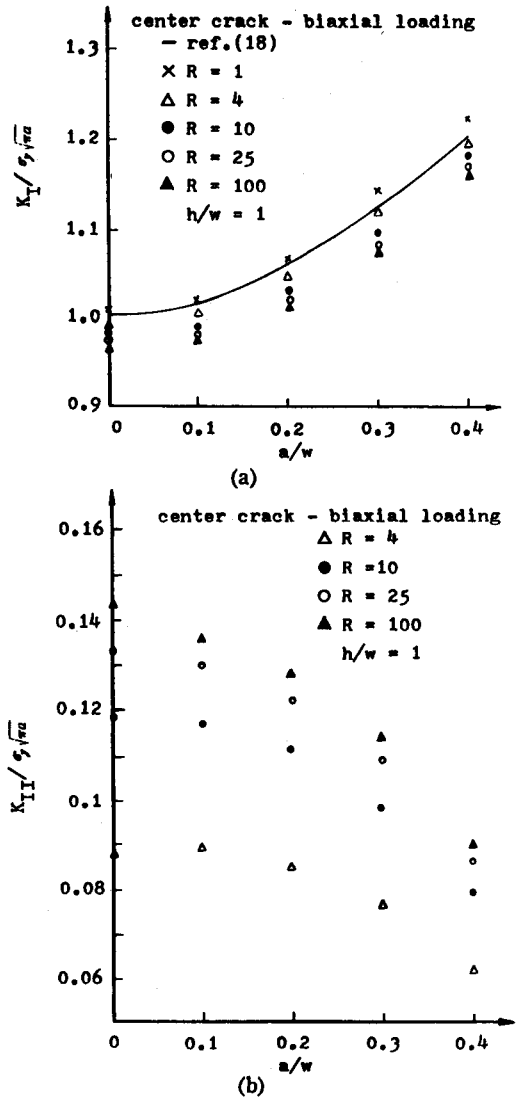


Fig.5 Variation of stress intensity factors with crack length for a centercracked bimaterial plate under biaxial loading

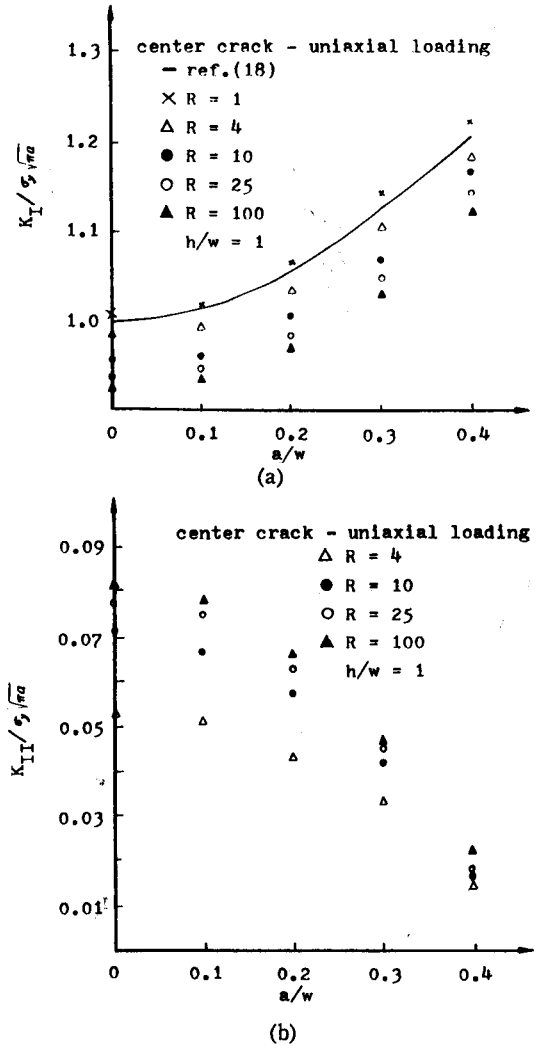


Fig. 6 Variation of stress intensity factors with crack length for a center-cracked bi-material plate under under uniaxial loading

Table 1 Normalized stress intensity factors for a center-cracked infinite bimaterial plate

R	$K_I/\sigma_y\sqrt{\pi a}$						$K_{II}/\sigma_y\sqrt{\pi a}$					
	Plane stress			Plane straiin			Plane stress			Plane stain		
	BEM	Ref. (9)	*Diff (%)	BEM	Ref. (9)	Diff (%)	BEM	Ref. (9)	Diff (%)	BEM	Ref. (9)	Diff (%)
1	1.0121	1.0	1.2	1.0120	1.0	1.2	0.	0.	0.	0.	0.	0.
4	0.9966	0.9829	1.4	1.0025	0.9886	1.4	0.0881	0.0866	1.7	0.0742	0.0709	4.7
10	0.9873	0.9678	2.0	0.9950	0.9787	1.7	0.1185	0.1171	1.2	0.0977	0.0962	1.6
25	0.9770	0.9587	1.9	0.9906	0.9728	1.8	0.1334	0.1314	1.5	0.1085	0.1081	0.37
100	0.9708	0.9532	1.8	0.9897	0.9692	2.1	0.1434	0.1391	3.1	0.1187	0.1146	3.6

$\nu_1=\nu_2=0.3$ $\quad$ $*\text{Diff}=\dfrac{\text{BEM}-\text{Ref. (9)}}{\text{Ref. (9)}}\times 100(\%)$

Table 2 Normalized stress intensity factors for Fig. 5

R / K / a/w	1		4		10		25		100	
	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0
1/15	1.0121	0.0	0.9966	0.0881	0.9873	0.1185	0.9770	0.1334	0.9709	0.1434
	(1.0)*									
1/10	1.0207	0.0	1.0063	0.0894	0.9944	0.1172	0.9874	0.1299	0.9831	0.1365
	(1.013)*									
2/10	1.0658	0.0	1.0477	0.0850	1.0321	0.1109	1.0225	0.1226	1.0166	0.1286
	(1.06)*									
3/10	1.1439	0.0	1.1192	0.0765	1.0972	0.0981	1.0834	0.1089	1.0748	0.1139
	(1.125)*									
4/10	1.2259	0.0	1.1964	0.0616	1.1851	0.0788	1.1791	0.0860	1.1615	0.0896
	(1.2)*									

Plane stress $\quad K_0=\sigma_y\sqrt{\pi a}$ $\quad$ ( )* : Ref. (18)

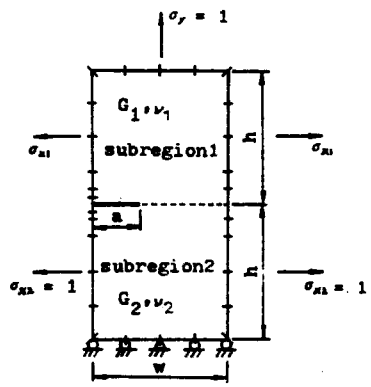


Fig. 7 Boundary element discretization of a edge-cracked bimaterial plate

유한체에서의 응력세기계수를 구하기 위해서는, $w/h=1$로 유지하면서 균열길이를 증가시켰으며, 평면 응력상태로 하였다. 그리고 양축하중 상태의 경우는 무한체와 같은 하중조건을 부여하였고, 단축하중상태는 $\sigma_y=1$만 주어졌다. 균열길이와 전단계수 비의 변화에 따른 응력세기계수의 변화는 양축하중상태는 Fig. 5에서, 단축하중상태는 Fig. 6에서 보여주고 있고 구체적인 계수의 값은 Table 2와 Table 3에서 각각 보여주고 있다.

하중상태에 따른 값을 비교해 보면 $R=1$ 때는 양축 및 단축하중에 무관하게 K_I은 같은 값을 주지만, $R>1$에서는 양축하중 상태에서의 K_I 및 K_{II}가 단축하중상태 일때의 값보다 큰 값을주고 있다. Fig. 5와

Table 3 Normalized stress intensity factors for Fig. 6

R / K / a/w	1		4		10		25		100	
	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0
1/15	1.0122 (1.0)*	0.0	0.9863	0.0534	0.9598	0.0707	0.9414	0.0781	0.9290	0.0818
1/10	1.0207 (1.013)*	0.0	0.9944	0.0516	0.9607	0.0662	0.9489	0.0752	0.9365	0.0786
2/10	1.0658 (1.06)*	0.0	1.0365	0.0446	1.0068	0.0581	0.9864	0.0635	0.9730	0.0660
3/10	1.1439 (1.125)*	0.0	1.1083	0.0333	1.0728	0.0425	1.0488	0.0456	1.0331	0.0468
4/10	1.2259 (1.2)*	0.0	1.1850	0.0153	1.1762	0.0183	1.1444	0.0185	1.1240	0.0232

( )* : Ref. (18)

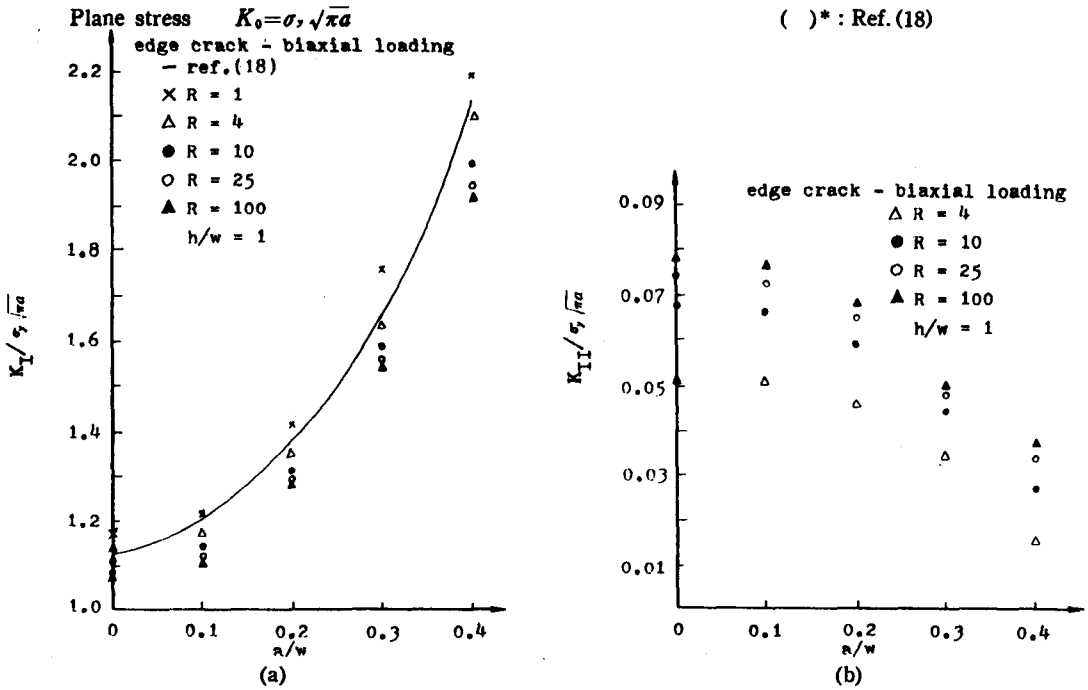


Fig. 8 Variation of stress intensity factors with crack length for an edge-cracked bimaterial plate under biaxial loading

Fig. 6을 비교하여 보면 K_I 보다는 K_{II}가 하중상태의 변화에 더욱 민감한것을 알 수 있다. 균열길이가 증가할 때에는 K_I은 역시증가 하지만 K_{II}는 감소하는 경향을 보여 준다. 이러한 현상은 물성치의 차이로 발생하였던 K_{II}가 균열의 증가로 인하여 uncracked ligament의 폭이 줄어들므로 물성치의 영향이 점차 감소하기 때문에 발생하는 것으로 풀이된다. 전단계수 비의 변화가 K_I의 균열길이에 대한 변화율에는 영향을 거의 주고 있지 않지만, K_{II}의 경우는 전단계수의 값이 클수록 변화율의 절대값이 점차 증가하는 현상을

Table 4 Normalized stress intensity factors for Fig. 8

R / K / a/w	1		4		10		25		100	
	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0
1/15	1.1748	0.0	1.1358	0.0517	1.1034	0.0674	1.0838	0.0747	1.0814	0.0794
	(1.12)*									
1/10	1.2147	0.0	1.1739	0.0507	1.1421	0.0659	1.1232	0.0730	1.1118	0.0768
	(1.2)*									
2/10	1.4129	0.0	1.3533	0.0642	1.3172	0.0594	1.2966	0.0655	1.2844	0.0687
	(1.375)*									
3/10	1.7575	0.0	1.6437	0.0346	1.5907	0.0440	1.5624	0.0483	1.5461	0.0506
	(1.66)*									
4/10	2.1977	0.0	2.1030	0.0153	1.9987	0.0272	1.9487	0.0340	1.9214	0.0379
	(2.12)*									

Plane stress $K_0=\sigma_\infty\sqrt{\pi a}$ ( )*: Ref. (18)

Table 5 Normalized stress intensity factors for Fig. 9

R / K / a/w	1		4		10		25		100	
	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0	K_I/K_0	K_{II}/K_0
1/15	1.1748	0.0	1.1604	0.1310	1.1458	0.1781	1.1360	0.2006	1.1254	0.2128
	(1.12)*									
1/10	1.2147	0.0	1.1940	0.1239	1.1684	0.1692	1.1489	0.1911	1.1256	0.2030
	(1.2)*									
2/10	1.4129	0.0	1.3816	0.1026	1.3700	0.1408	1.3644	0.1594	1.3420	0.1699
	(1.375)*									
3/10	1.7575	0.0	1.6653	0.0768	1.6294	0.1063	1.6115	0.1211	1.6016	0.1294
	(1.66)*									
4/10	2.1977	0.0	2.1140	0.0435	2.0165	0.0565	1.9898	0.0648	1.9668	0.0695
	(2.12)*									

Plane stress $K_0=\sigma_\infty\sqrt{\pi a}$ ( )*: Ref. (18)

보여주고 있다.

경계면 모서리 균열에서는 Fig. 7과 같이 전체모델을 접합면을 따라서 영역분할을 하였고, 경계요소의 분할은 중앙균열과 마찬가지로 하여 전체 요소의 갯수는 약 120개로 하였다.

모서리 균열에서 유한체일때의 응력세기계수를 구하기 위해서, 중앙균열의 경우와 마찬가지로 평면응력상태에서 $w/h=1$로 하고, 균열길이, 전단계수의비 및 하중상태를 중앙균열과 마찬가지로 변화시켰다.

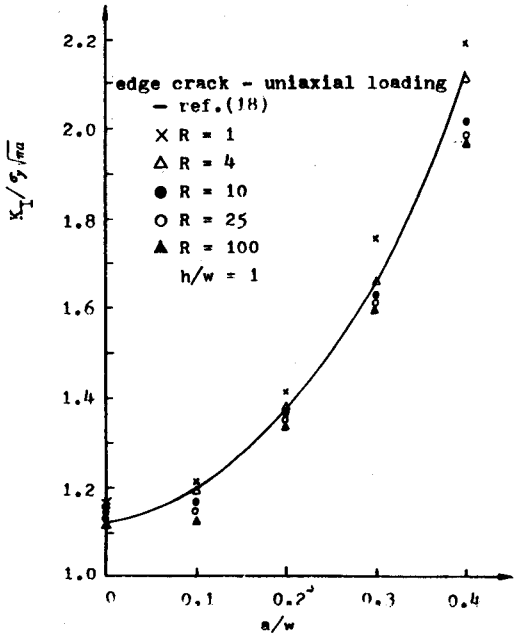
이때의 응력세기계수의 변화는 Fig. 8와 Fig. 9에서 양축 및 단축하중의 각각의 경우에 대해서 보여주고 있다. 구체적인 계수는 Table 4와 5에서 각각 보여

주고 있다.

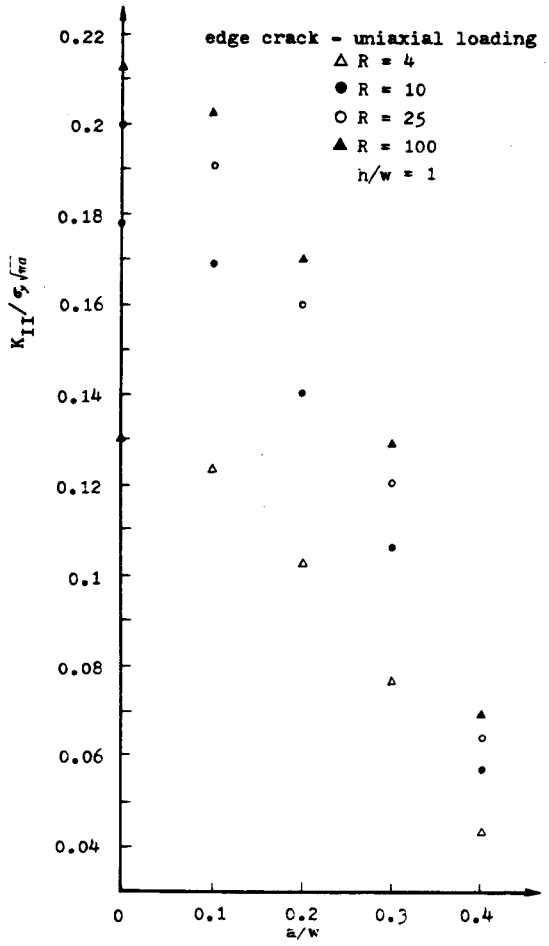
Fig. 8와 Fig. 9 및 Table 4와 5에서 보면 $R=1$일때는 중앙균열과 마찬가지로 하중조건에 무관하게 K_I은 동일한 값을 주고 있지만 균열길이가 증가할때 모우멘트의 영향으로 수치결과가 기존해[18] 보다 조금 큰 값을 보이며, 균열길이의 증가에 따라 점차 큰 오차를 보이지만, 6%이내에서 기존해와 일치한다.

$R>1$일때 모서리 균열에서는 중앙균열과는 달리 양축하중상태가 단축하중 일 때보다 K_I과 K_{II} 값에서 더 작은 값을 보여주고 있는데 이러한 현상은 단축하중상태에서 발생하는 모우멘트의 영향이 양축하중인 경우에 x방향의 하중으로 인하여 감소된 결과로 풀이된다.

중앙균열과 같이 균열길이의 증가에 따라, 모서리 균열에서도 K_{II}가 감소하는 경향을 나타내는데 이러한 현상에 대한 해석은 중앙균열인 경우와 같다. 하중상태의 변화에 따른 K_I과 K_{II} 값의 변화는 K_{II}가 K_I보다 크다는 것과 전단계수 비의 변화에 따른 K_I과 K_{II}의 균열길이에 대한 변화율도 K_{II}쪽이 더 큰 영향을 받는다는 것도 중앙균열의 경우와 마찬가지이다.



(a)



(b)

Fig. 9 Variation of stress intensity factors with carck length for an edge-cracked bi-material plate under uniaxial loading

5. 결 론

다중영역법과 이중절점기법을 적용하여 접합재료 경계면 균열의 응력세기계수를 경계요소법에 의해 구하기 위한 연구에서 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 접합재료 및 균질재료에 모두 적용될 수 있는 응력세기계수와 균열면 변위의 상호관계식을 유도하였다.

(2) 접합재료의 경계면 중앙균열이 무한체내에 존재할 경우에 응력세기계수의 수치결과는 엄밀해와 5% 이내에서 일치한다.

(3) 접합재료의 경계면 중앙균열 및 모서리 균열이 유한체내에 존재할 경우에 응력세기계수를 단축 및 양

축하중상태에서 전단계수 비와 균열길이를 변화시키면서 구하였다. 중앙균열의 경우는 단축하중 보다는 양축하중상태에서 더 큰 응력세기계수값을 주지만, 모서리 균열은 단축하중상태에서 더 큰 값을 준다. 하중상태의 변화에 따른 K_I과 K_{II}의 변화는 K_{II}가 K_I보다 더욱 민감한 변화를 보인다. 전단계수 비의 변화는 K_I의 균열길이에 대한 변화율에는 거의 영향을 주지 않지만 K_{II}의 균열길이에 대한 변화율에는 큰 영향을 준다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 연구비에 의해 수행되었으며 이에 깊이 감사하는 바이다. 또한 연세대학교 기계공학과 대학원생 최청호, 김근영, 최홍섭, 박정수군의 컴퓨터 계산 및 원고작성에 도움을 준 것에 감사한다.

참 고 문 헌

(1) T.A. Cruse and W. Van Buren, 1971, "The Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack", Int. J. Fracture Mech., Vol. 7, pp. 1~16.

(2) G.E. Blanford, A.R. Ingraffea and J.A. Liggett, 1981, "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 387~404.

(3) P.K. Banerjee, 1976, "Integral Equation Methods for Analysis of Piecewise Non-homogeneous Three-dimensional Elastic Solids of Arbitrary Shape", Int J. Mech. Sci., Vol. 18, p. 293.

(4) M. Chaudonneret, 1978, "On the Discontinuity of the Stres Vecstor in Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis", in Recent Advances in Boundary Element Methods, ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, London. pp. 185~194.

(5) M.L. Williams, 1959, "The Stresses around a Fault or Crack in Dissimilar Media", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 49, pp. 199~204.

(6) A.F. Mak, L.M. Keer, S.H. Chen and J.L. Lewis, 1980, "A No-Slip Interface Crack", J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 347~350.

(7) F. Erdogan, 1963, "Stress Distribution in a Nonhomogeneous Elastic Plane with Cracks", J. Appl. Mech., Vol. 30, Trans. ASME, p. 232.

(8) A.H. England, 1965, "A Crack Between Dissimilar Media", J. Appl. Mech., Trans, ASME, Vol. 32, pp. 400~402.

(9) J.R. Rice and G.C. Sih, 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 32, pp. 418~423.

(10) T.T. Wang, T.K. Kwei and H.M. Zupko, 1970, "Tensile Strength of Butt-Joined Epoxy-Aluminum Plates", Int. J. Fract, Mech., Vol. 6, No. 2, pp. 127~137.

(11) T.A. Cruse, 1981, "An Improved Boundary Integral Equation Method in Engineering Science", McGraw-Hill, pp. 177~201.

(12) T.A. Cruse, 1974, "An Improved Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Stress Analysis", Comp. and Struct., Vol. 4, pp. 741~754.

(13) G.C. Sih and H. Liebowitz, 1968, "Mathematical Theories of Brittle Fracture", in Fracture, An Advanced Treatise, Vol. 2, Ed. Liebowitz, Academic Press, New-York, pp. 67~190.

(14) C.F. Shih, H.G. Delorenzi and M.B. German, 1976, "Crack Extension Modelling with Singular Quadratic Isoparametric Element", Int. J. Fract., Vol. 12, pp. 647~651.

(15) Kang Yong Lee, Dong Sung Won and Hyung Jip Choi, 1987, "Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Z-Shaped Cracks", Engng Fract. Mech., Vol. 27, No. 1, pp. 75~82.

(16) A.H. Stroud and D. Secrest, 1966, "Gaussian Quadrature Fomulas", Prentice-Hall, New-York.

(17) H.R. Kutt, 1975, "On the Numerical Evaluation of Finite Part Integrals Involving an Algebraic Singularity", Report WISK 179, The National Research Institute for Mathematical Sciences; Pretoria.

(18) D.P. Rooke and D.J. Cartwright, 1976, Compendium of Stress Intensity Factors, Hillingdon Press. London.