

<論 文>

## 봉재의 표면소성연마가공에 관한 연구

최재찬\*·김병민\*\*

(1987년 3월 10일 접수)

### A Study on the Plastic Polishing Process of Cylindrical Rods

Jae Chan Choi and Byung Min Kim

**Key Words:** Plastic Polishing Process(표면소성연마가공), Wave Motion of Ridge(릿지의 물결모양운동), Upper-Bound Approach(상계해석), Surface Roughness(표면조도), Deformation Layer(가공변질층)

#### Abstract

The improvement of surface roughness of machined cylindrical rods through the plastic polishing process was studied in this paper.

The criterion and limits for the plastic polishing process due to the wave motion of the ridge were established with respect to process variables: ridge shape and size, semi-cone die angle as well as friction factor, by the application of the upper-bound approach.

The surface roughness of the plastic polished products was measured, and compared with that of the original specimen. Also the depth of the surface deformation layer was tested, and compared those of the theoretical values.

Qualitative agreement exists between the experimental plastic polishing loads and theoretical loads. The wave motion of the ridge was mostly occurred within the established limits. The surface roughness of specimens was sufficiently improved through the present process. Also the predicted depth of the surface deformation layer was in good agreement with experimental results.

#### 기호설명

$D_0$	: 소재의 직경 (mm)	$R_1(z), R_2(z)$	: 다이 및 릿지의 형상 방정식
$H_1, H_2$	: 릿지높이 및 가공변질층의 깊이 (mm)	$R_{\max}$	: 최대높이 표면조도 ( $\mu\text{m}$ )
$J_p^*, J_e^*, J_s^*$	: 표면소성연마, 압출 그리고 전단에 대한 각각의 외부동력 ( $\text{kg}\cdot\text{mm/sec}$ )	$R_b, R_o$	: 출구 및 입구반경 (mm), ( $R_b = H_1 + R_o$ )
$L_i$	: 시편의 형상에 따른 깊이 ( $i=1\cdots7$ )	$r, \theta, z$	: 원통좌표계의 축
$m$	: 일정 마찰계수 ( $0 \leq m \leq 1$ )	$U_b, U_o$	: 입구 및 출구속도 ( $\text{mm/sec}$ )
$R_i$	: 非가공변질층의 깊이 (mm), ( $R_i = R_o - H_2$ )	$U_r, U_\theta, U_z$	: $r, \theta, z$ 방향의 속도성분
*정희원, 부산대 학교 공과대학 기계설계공학과		$V$	: 소성변형역의 체적 ( $\text{mm}^3$ )
**정희원, 부산대 학교 대학원		$\alpha, \beta$	: 원추다이 半角 및 릿지 경사각 (degree)
		$\Gamma_i$	: 속도불연속면 ( $i=1\cdots9$ )
		$\Delta V$	: 속도불연속성분의 크기 ( $\text{mm/sec}$ )
		$\epsilon_{ij}$	: 변형률속도의 성분

$\sigma_0$	: 초기 인장항복응력 ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )
$\sigma_{zb}, \sigma_{zs}$	: 입구 및 출구쪽에서 재료에 가한 응력 ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )
$\tau$	: 전단응력 ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )
$\omega_s$	: 마찰에 너지변화율 ( $\text{kg}\cdot\text{mm/sec}$ )
$\omega_i$	: 내부변형에너지변화율 ( $\text{kg}\cdot\text{mm/sec}$ )
$\omega_e$	: 속도불연속면에서의 전단변형에너지변화율 ( $\text{kg}\cdot\text{mm/sec}$ )

## 1. 서 론

최근에 기계장치 및 자동차산업등의 다양한 분야에서 많이 사용되고 있는 봉재(棒材)를 이용한 부품들에 대해 정밀성과 표면상태의 개선이 요구되고 있다.

표면소성연마(表面塑性研磨)가공이란 Fig. 1과 같이 표면연마가공될 봉재의 원주상에 기계가공된 인공의 릿지(ridge)가 다이속에서 물결모양운동(wave motion)으로 진행하는 동안 봉재의 표층부에 가공변질층이 형성되면서 거칠은 봉재의 표면을 개선시키는 경제적이고 생산성이 높은 새로운 가공법이다.

표면정밀입자가공과는 달리 소성가공을 이용한 정밀가공에 대한 연구로서는 Westwood<sup>(1)</sup> 등이 외경이 큰 원통속으로 플러그를 통과시켜 내면을 가공하는 다틱질가공(ironing)을 상계해법으로 해석하였고, Johnson<sup>(2)</sup> 등은 산업용 쟁과 대포를 이용하여 편치를 고속으로 발사시켜 스테인레스 강판의 내경속으로 플러그를 통과시킴으로써 내면거칠기의 개선과 내경의 확장에 성공하였다. Oxley<sup>(3)</sup> 등은 이차원 강성원통과 표면이 거칠은 연질의 가공물사이에 연마입자를 넣어 가공물과의 접촉에서 일어나는 마찰과 가공물의 마모에 대한 모델을 제시하였고, 미끄럼선장법을 이용하여 낮은 수직하중과 마찰계수의 조건에서는 마모없이 표면에서 매끈한 소성변형이 일어나고 이들이 높은 조건에서는 마모가 발생한다고 예측하여 실험과 비교하였다.

최근에 Avitzur<sup>(4,5)</sup> 등은 절삭가공등으로 생긴 가공물의 거칠은 표면과 공구 사이의 마찰모델(friction model)을 제시하고 거칠은 표면을 형성하는 많은 릿지들은 진행하는 공구, 즉 다이입구에서 물결모양처럼 움직인다고 가정하여 상계해법으로 이 모델을 해석하였으며 이러한 릿지의 운동현상은 봉재의 원주상에 인공릿지를 기계가공하여 압출공구속으로 통과시킴으로써 확인되었다. Choi<sup>(6)</sup> 등은 릿지와 공구사이의 마찰을 일정마찰조건으로 가정하여 평면변형에 대한 마찰모델을 힘의 평형해석법(force balance method)으로

해석하여 공구에 작용하는 수직하중과 마찰력을 구하였다. 그러나 지금까지는 주로 평면변형에 대한 마찰모델<sup>(4~6)</sup>이 제시되어 릿지와 공구사이의 마찰과 릿지의 물결모양운동으로 인한 가공변질층의 형성등이 해석되었으며, 축대칭인 봉재에 대해서는 릿지의 움직임만 관찰되었을뿐 이론적인 해석은 없으며 또한 이러한 릿지의 물결모양운동이 표면상태의 거칠기 개선에 미치는 영향등은 조사되지 않았다.

따라서 본 연구에서는 축대칭 봉재의 원주상에 기계가공된 인공릿지가 공구를 통하여 진행할 때의 변형모델을 제시하고 이를 상계해법으로 해석하여 표면소성연마가공이 되기 위한 릿지의 물결모양운동과 이 운동이 일어나지 못하고 릿지가 평평해지면서 소멸되고 또는 전단이 되는 경우들에 대한 판정조건 및 한계영역을 설정하였다. 순동 및 연강 그리고 알루미늄등을 시험재료로하여 이론적으로 예측된 릿지의 세 가지 운동에 대해 실험을 통하여 검증하였으며 물결모양운동으로 인한 가공물의 표면조도 개선정도를 시험전후에 최대높이 표면조도의 크기로 측정하여 비교하였다. 또한 릿지의 물결모양운동으로 인하여 가공물의 표층부에 형성된 가공변질층의 깊이를 이론적으로 예측하여 실험과 비교하였다.

## 2. 이론해석

### 2.1 변형모델

표면소성연마가에 있어서 변형특성은 시편의 원주상에 기계가공된 인공릿지가 편치가 진행함에 따라 정지된 다이입구에서 Fig. 1처럼 화살표 방향으로 물결모양운동과 유사하게 이동하는 것이며 이러한 릿지의 이동으로 인하여 절삭가공 또는 공작기계의 진동등에 의해 형성된 가공물의 거칠은 표면인 주기적인 요철부 또는 흄집등은 밀리면서 메꾸어지고 또는 평평해지기도 하면서 표면소성연마가공이 되어 거칠은 표면이 매끈하게 개선되어지게 된다. 또 다른 특성은 릿지의 이동으로 인하여 가공물의 표층부에 가공변질층이 형성되어지는 것인데 릿지의 형상과 크기 및 다이반자 그리고 마찰계수등의 공정변수들에 따라 변질층의 깊이는 변하기 된다. 이러한 관점에서 가공경화를 반지 않은 층은 원래의 금속조직 그대로 유동을 하게되므로 관압출에서의 만드렐의 이동과 유사하게 되어 표면소성연마가공의 변형모델인 Fig. 1은 원추형 다이를 통한 관압출의 해석<sup>(7,8)</sup>을 위한 모델을 기초로 하였다.

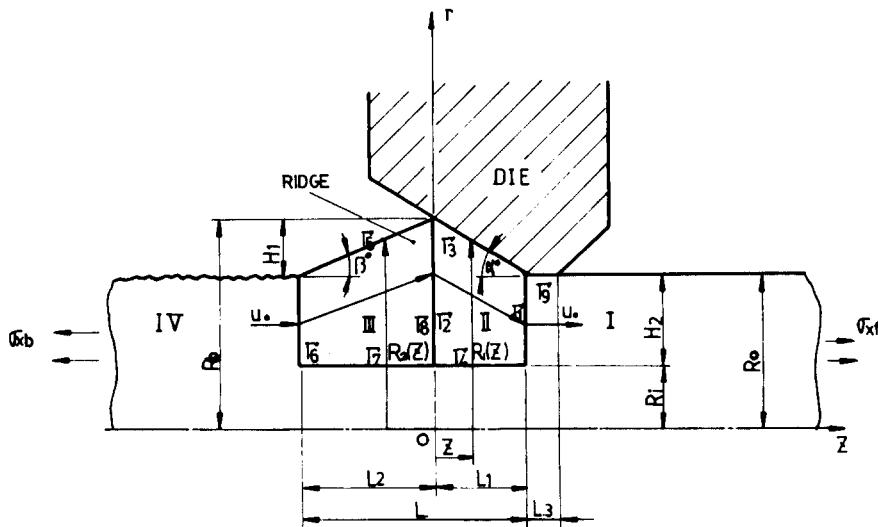


Fig. 1 Velocity fields for flow through conical die in plastic polishing process

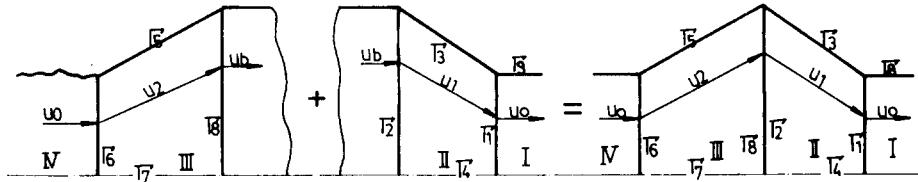


Fig. 2 Superposition of velocity fields

## 2.2 상계해석

제시된 Fig. 1의 변형모델을 해석함에 있어서 Fig. 2와 같이 두개로 분리된 유동형상이 중첩되어 있다고 가정한다. 영역Ⅲ에서는 역유동방향으로 되어 있지만에너지 소비는 이와 반대방향의 정상유동일 때와 동일하다. 그러므로 분리된 속도장에서 영역Ⅰ과Ⅱ에 대하여 먼저 상계해를 구한 후 이 결과를 영역Ⅲ과Ⅳ에 적용하여 중첩하므로써 해석하였다.

원추형 다이의 형상방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$R_1(z) = (-\tan\alpha)z + R_b \quad (1)$$

그리고  $R_1(0) = R_b$ ,  $R_1(L) = R_o$ 이다.

영역Ⅳ는 비변형영역으로 속도  $U_0$ 로  $z$ 방향에 평행하게 강체운동을 하고, 영역Ⅰ은 이미 변형되어 더 이상의 변형이 일어나지 않는 영역으로  $z$ 방향에 평행하게 역시  $U_0$ 로 강체운동을 한다.

체적일정조건에 의하여 다음 식이 얻어진다.

$$U_b = \frac{R_o^2 - R_i^2}{R_b^2 - R_i^2} U_0 \quad (2)$$

영역Ⅱ는 두 개의 수직속도불연속면 ( $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ )과 직선다이접촉면 ( $\Gamma_3$ )과 가공변질층의 경계면 ( $\Gamma_4$ )으로 둘러쌓여 있다. 영역Ⅱ에서 속도장을 유동함수로 사용하여 원통좌표계로 표시하면 다음과 같다.

$$U_r = \frac{R_1(z) \cdot R_1'(z) \cdot (r^2 - R_i^2) \cdot (R_o^2 - R_i^2)}{r(R_1^2(z) - R_i^2)} U_0$$

$$U_z = \frac{R_o^2 - R_i^2}{R_1^2(z) - R_i^2} U_0, \quad U_\theta = 0 \quad (3)$$

속도불연속면에서의 법선속도성분은 (3)식으로부터  $\Gamma_2$ 에 대하여  $U_z|_{z=0} = U_b$ 이고,  $\Gamma_1$ 에 대하여  $U_z|_{z=L_1} = U_0$ 이므로 속도경계조건을 만족한다. 그리고 이들 면에 평행하게 다음과 같은 속도불연속이 존재한다.

$$\Delta V_z = \left| \frac{R_b \cdot \tan\alpha \cdot (r^2 - R_i^2)}{r(R_b^2 - R_i^2)} \right| \cdot U_b, \quad \Gamma_2 \text{를 따라서} \quad (4)$$

$$\Delta V_1 = \left| \frac{R_o \cdot \tan\alpha \cdot (R_b^2 - R_i^2) \cdot (r^2 - R_i^2)}{r(R_o^2 - R_i^2)^2} \right| \cdot U_b, \quad \Gamma_1 \text{을 따라서} \quad (5)$$

다이접촉면,  $\Gamma_2$ 을 따라서는 합성속도가 이 면에 평행하므로,

$$\left. \frac{U_r}{U_z} \right|_{r=R_1(z)} = R_1'(z) \quad (6)$$

가 되어 다음에 수직한 방향의 속도성분은 없으므로 접선속도성분의 크기와 같다. 즉,

$$\Delta V_3 = \frac{R_b^2 - R_i^2}{R_1^2(z) - R_i^2} \cdot \sqrt{1 + R_1'^2(z)}, \Gamma_3 \text{을 따라서 } (7)$$

원통형인 가공변질층의 경계면,  $\Gamma_4$ 를 따라서는 이 면에 수직한 속도성분은

$U_r|_{r=R_i} = 0$ 이고 접선방향의 속도불연속의 크기는 다음과 같다.

$$\Delta V_4 = \left| \frac{(R_b^2 - R_i^2) \cdot U_b}{(R_1^2(z) - R_i^2)} - U_0 \right| \quad (8)$$

변형영역 II에서의 변형률속도를 (3)식으로부터 유도하여 원통좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{R_1(z) \cdot R_1'(z) \cdot (R_b^2 - R_i^2) \cdot (r^2 + R_i^2) \cdot U_b}{r^2 \cdot (R_1^2(z) - R_i^2)^2} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{R_1(z) \cdot R_1'(z) \cdot (R_b^2 - R_i^2) \cdot (r^2 - R_i^2) \cdot U_b}{r^2 \cdot (R_1^2(z) - R_i^2)^2} \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= -\frac{2R_1(z) \cdot R_1'(z) \cdot (R_b^2 - R_i^2)}{(R_1^2(z) - R_i^2)^2} \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= \frac{(R_b^2 - R_i^2) \cdot (r^2 - R_i^2) [R_1(z) \cdot R_1''(z)]}{2r \cdot (R_1^2(z) - R_i^2)^3} \\ \cdot (R_1^2(z) - R_i^2) - R_1'(z) \{3R_1^2(z) + R_i^2\}] \cdot U_b \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} = \dot{\epsilon}_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)로부터 체적일정을 검토해 보면

$$\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0 \quad (10)$$

이 성립된다. 그러므로 가정된 (3)식의 속도장은 비압축성조건 및 법선속도의 연속성 그리고 속도경계조건을 만족하기 때문에 동적가용속도장이 된다.

### 2.3 표면소성연마가공의 소요동력

상계해석은 극치정리의 하나로 Prage 와 Hodge<sup>(9)</sup>에 의해 정립되었으며 그 내용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_v \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ii} \dot{\epsilon}_{ii}} dV + \int_{sr} \tau \cdot \Delta V \cdot dS_r \\ &- \int_{st} T_i \cdot V_i \cdot dS_t \end{aligned} \quad (11)$$

이 J\*는 다음과 같은 공정변수들의 함수로

$$J^* = f(\alpha, \beta, H_1, H_2, R_i, L_i \text{ and } m) \quad (12)$$

으로 표현되어지며 (11)식의 각 항들의 계산된 값은 비경화성재료에 대하여 다음과 같이 구해진다.

전인력이 미리 규정된 경계  $S_t$ 를 따라서 소비되는

동력은 없으므로 다음과 같이 된다. 즉

$$\dot{E}_t = \int_{st} T_i \cdot V_i \cdot dS_t = 0 \quad (13)$$

영역 II에서의 내부변형에 필요한 동력  $\dot{E}_{i1}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{i1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_v \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \pi \sigma_0 \int_0^{L_1} dz \int_{R_i}^{R_1(z)} \sqrt{R_1^2(z) \cdot R_1'^2(z) \cdot (3r^4 + R_i^4)} \\ &\quad + \frac{(r^2 - R_i^2) \cdot r^2 \cdot F^2(z)}{4(R_1^2(z) - R_i^2)^2} \times \frac{(R_b^2 - R_i^2)}{r(R_1^2(z) - R_i^2)^2} dr \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $F(z) = R_1(z) \cdot R_1''(z) \cdot (R_1^2(z) - R_i^2) - R_1^2(z) \cdot (3R_1^2(z) + R_i^2)$  이고,  $L_1 = (R_b - R_0)/\tan\alpha$ 이다.

영역 III에서의 내부변형에 필요한 동력  $\dot{E}_{i2}$ 는 (14)식의  $L_1$ 과  $R_1(z)$ 를  $L_2$ 와  $R_2(z)$ 로 각각 치환된 것과 같으며, 그리고  $L_2 = (R_b - R_0)/\tan\beta$ ,  $R_2(z) = (\tan\beta)z + R_0$ 이다.

속도불연속면  $\Gamma_1, \Gamma_2$  그리고  $\Gamma_4$ 상에서 전단에 의해 소비된 동력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{s1} &= \int_{sr_1} \tau_1 \cdot \Delta V_1 \cdot dS_{r_1} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{3\sqrt{3}} \left| \frac{U_b \cdot R_0 \cdot \tan\alpha \cdot (R_b^2 - R_i^2)}{(R_0^2 - R_i^2)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot (R_0^3 - 3R_0R_i^2 + 2R_i^3) \right| \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{s2} &= \int_{sr_2} \tau_2 \cdot \Delta V_2 \cdot dS_{r_2} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{3\sqrt{3}} \left| \frac{U_b \cdot R_0 \cdot \tan\alpha}{(R_i^2 - R_0^2)} (R_b^3 - 3R_bR_i^2 + 2R_i^3) \right| \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{s4} &= \int_{sr_4} \tau_4 \cdot \Delta V_4 \cdot dS_{r_4} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} \left| \frac{U_b \cdot (R_b^2 - R_i)^2}{\tan\alpha} \left[ \frac{1}{2} \ln \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left\{ \left( \frac{R_b - R_i}{R_b + R_i} \right) \cdot \left( \frac{R_0 + R_i}{R_0 - R_i} \right) \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_i(R_b - R_0)}{(R_0^2 - R_i^2)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

속도불연속면  $\Gamma_6, \Gamma_7$  그리고  $\Gamma_8$ 에서 전단에 의해 소비된 동력은 경사각  $\beta$ 만 다르므로 다음과 같이 쉽게 구해진다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{s6} &= \int_{sr_6} \tau_6 \cdot \Delta V_6 \cdot dS_{r_6} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{3\sqrt{3}} \left| \frac{U_b \cdot \tan\beta \cdot R_b \cdot (R_b^2 - R_i^2)}{(R_0^2 - R_i^2)^2} \right| \end{aligned}$$

$$\cdot (R_0^3 - 3R_0R_i^2 + 2R_i^3) \quad (18)$$

$$\dot{E}_{s7} = \int_{SR_7} \tau_7 \cdot \Delta V_7 \cdot dS_{R_7} \\ = \frac{2\pi\sigma_0}{3\sqrt{3}} \left| \frac{U_b \cdot (R_b^2 - R_i^2)}{\tan\beta} \left[ \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{(R_b - R_i)(R_0 + R_i)}{(R_b + R_i)(R_0 - R_i)} \right\} - \frac{R_i(R_b - R_i)}{(R_0^2 - R_i^2)} \right] \right| \quad (19)$$

$$\dot{E}_{s8} = \int_{SR_8} \tau_8 \cdot \Delta V_8 \cdot dS_{R_8} \\ = \frac{2\pi\sigma_0}{3\sqrt{3}} \left| \frac{U_b \cdot R_b \cdot \tan\beta}{(R_b^2 - R_i^2)} (R_b^3 - 3R_bR_i^2 + 2R_i^3) \right| \quad (20)$$

그리고  $\Gamma_5$  면에서는  $\Delta V_5 = 0$  이므로  $\dot{E}_{s5} = 0$  이다.

다이와 접촉하는  $\Gamma_3$  와  $\Gamma_9$ 에서의 마찰에 의한 소비동력은 다음과 같다.

$$\dot{E}_{f1} = \int_{SR_3} \tau_3 \cdot \Delta V_3 \cdot dS_{R_3} \\ = \frac{2\pi m\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{U_b \cdot (R_b^2 - R_i^2)}{\sin 2\alpha} \cdot \ln \left\{ \frac{R_b^2 - R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \right\} \quad (21)$$

$$\dot{E}_{f2} = \int_{SR_9} \tau_9 \cdot U_0 \cdot dS_{R_9} \\ = \frac{2\pi m\sigma_0 \cdot U_0 \cdot L_3 \cdot R_0}{\sqrt{3}} \quad (22)$$

따라서 표면소성연마가공에 필요한 총동력  $J_p^*$ 는 다음과 같다.

$$J_p^* = \dot{E}_{s1} + \dot{E}_{s2} + \dot{E}_{s4} + \dot{E}_{s6} + \dot{E}_{s7} + \dot{E}_{s8} + \dot{E}_{f1} + \dot{E}_{f2} \\ + \dot{E}_{i1} + \dot{E}_{i2} \quad (23)$$

여기서 실제 가공에 가해진 동력을 에너지 변화율에 대한 상계  $J_p^*$ 와 동일하다고 가정하면 다음과 같이 된다.

$$J_p^* = -\pi \cdot (R_b^2 - R_i^2) \cdot \sigma_{sb} \cdot U_b \quad (24)$$

#### 2.4 릿지의 소멸에 필요한 소요동력

릿지가 물결모양운동을 하지 못하고 소멸되는 경우에 있어서는 기존의 압출가공에서 필요한 동력과 동일하므로 Fig. 1의 영역 I 과 II에 대한 (15), (16), (17), (21)과 (22)식들에  $R_i = 0$  을 대입 하므로써 얻어지며 그 결과는 다음과 같다.

$$\dot{E}_i' = \dot{E}_{i1} |_{R_i=0} \quad (25)$$

$$\dot{E}_{s1}' = \frac{2\pi\sigma_0 \cdot U_b \cdot \tan\alpha \cdot R_b^2}{3\sqrt{3}} \quad (26)$$

$$\dot{E}_{s2}' = \frac{2\pi\sigma_0 \cdot U_b \cdot \tan\alpha \cdot R_b^2}{3\sqrt{3}} \quad (27)$$

$$\dot{E}_{s1}' = \frac{4\pi m\sigma_0 \cdot U_b \cdot R_b^2}{\sqrt{3} \cdot \sin 2\alpha} \cdot \ln \left( \frac{R_b}{R_0} \right) \quad (28)$$

$$\dot{E}_{s2}' = \frac{2\pi m \cdot \sigma_0 \cdot R_0 \cdot L_3 \cdot U_0}{\sqrt{3}} \quad (29)$$

따라서 릿지의 소멸에 소요된 동력  $J_E^*$ 는,

$$J_E^* = \dot{E}_{s1}' + \dot{E}_{s2}' + \dot{E}_{f1}' + \dot{E}_{f2}' + \dot{E}_{i1}' \quad (30)$$

으로 되고 실제 가공에 가해진 동력을 에너지 변화율에 대한 상계  $J_E^*$  와 동일하다고 하면 다음과 같이 표시된다.

$$J_E^* = -\pi R_b^2 \cdot (\sigma_{sb}) \cdot U_b \quad (31)$$

#### 2.5 전단에 의한 링 발생에 필요한 소요동력

릿지가 링 형상으로 전단되는데 소요된 동력  $J_s^*$ 는,

$$J_s^* = \frac{2\pi \cdot \sigma_0 \cdot R_0 \cdot U_0}{\sqrt{3}} (L + m L_3) \quad (32)$$

이 되고 실제 전단에 가해진 동력을 에너지 변화율에 대한 상계  $J_s^*$ 와 동일하다고 하면 다음과 같다.

$$J_s^* = -\pi \cdot R_0^2 \cdot (\sigma_{sb}) \cdot U_0 \quad (33)$$

#### 2.6 표면소성연마가공의 판정조건

표면소성연마가공을 위해서는 기계가공된 인공릿지가 물결모양운동을 해야하므로 이 운동을 하는데 필요한 소요동력은 릿지가 소멸되고 전단될 때의 값과 비교하여 다음의 조건을 동시에 만족해야 한다.

$$J_p^* \leq J_E^* \quad (34)$$

$$J_p^* \leq J_s^* \quad (35)$$

등식인 경우에는 릿지의 소멸이나 전단이 일어날 수도 있음을 뜻한다. 또한 이 조건을 만족하는 경우에 있어서 시편의 직경, 릿지의 형상과 크기 및 윤활조건등이 결정되면 에너지가 최소가 되는 가공변질층의 깊이가 반드시 유일한 값으로 존재한다.

### 3. 실험시편 및 실험방법

표면소성연마가공을 하기 위한 시편의 형상은 Fig. 3과 같고, 이들은 연강(SM20C), 상용 순동 및 알루미늄(Al5052) 등을 시험재료로 하여 기계가공되었다. Fig. 3에서  $H_1$ 과  $L$ 은 각각 릿지의 높이 및 폭이며  $\alpha$  와  $\beta$ 는 릿지의 경사각이고,  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 는 각각 릿지의 가공물의 직경을 나타낸다.  $L_5$ 는 실제 표면소성연마가공될 부분이고,  $L_6$ 는 편치하중이 균일하게 시편에 전달되도록하는 편치와의 접촉부분이며 가공이 상당히

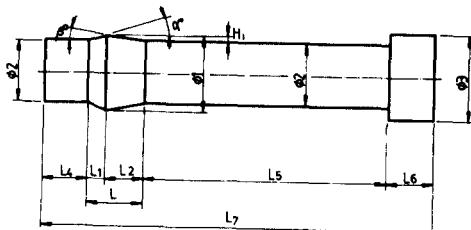


Fig. 3 Shape and dimension of testpiece through conical extrusion die

진행된 후에는 제거된다. 시편의 치수는 가공중에 소성파괴가 발생하지 않도록 선택되었다.

프레스는 200 톤 유압식 프레스를 사용하였으며, 표면소성연마가공을 위한 다이의 재질은 SKD11으로써 61~63HRC 및  $0.4\mu\text{m}R_{\max}$  까지 열처리 및 표면연마되었다.

실험은 ① 시편의 기계가공 ② 가공전 시편의 표면조도 측정 ③ 윤활처리 ④ 가공실험 ⑤ 가공후의 표면조도 측정 ⑥ 가공변질층의 깊이 측정 등의 순서로 진행되었다.

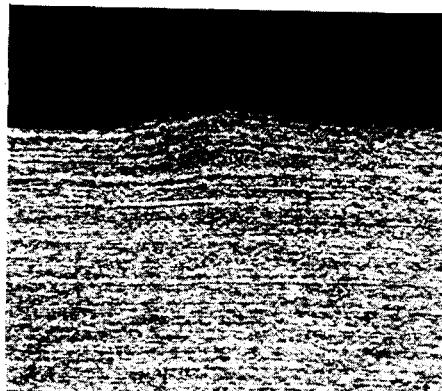
기계가공된 시편의 표면조도는 축침전기식의 Kosaka 사의 표면조도측정기를 사용하여 최대높이 표면조도 ( $\mu\text{m}R_{\max}$ )로 표시하였으며, 윤활방법은 연강에 대해서는 주로 인산염 피막처리를 하였으며, 순동 및 알루미늄등은 분무식의 텐플론 전식윤활제(P.T.F.E)에 의해 피막처리되었으며, 공동 윤활제로는 산업용 그리이스(grease)에 중량비 10% 정도의 흑연 및 이황화물리브펜( $\text{MoS}_2$ )분말등을 배합한 습식윤활제를 사용하였다. 가공변질층의 깊이는 미소경도계를 이용한 경도측정법, 매크로에칭에 의한 부식측정법 등을 이용하여 측정하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

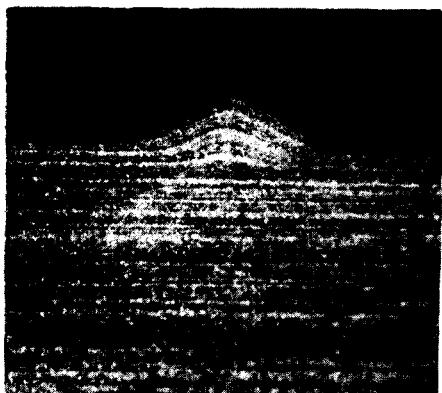
##### 4.1 릿지의 물결모양운동을 위한 이론적 판정조건 설정결과와 실험결과와의 비교

표면소성연마가공이 될려면 기계가공된 릿지가 공구통과시에 연강과 알루미늄에 대해 Nital과 Keller부식액으로 각자 매크로에칭하여 10배로 확대한 Fig. 4와 같은 시편 표층부에서의 물결모양운동에서만 가능하게 된다.

이러한 릿지의 운동은 릿지의 상대높이 ( $H_1/D_0$ )와 폭 ( $L/D_0$ ), 다이반각 ( $\alpha$ ), 그리고 마찰계수 ( $m$ ) 등으로 조합된 공정변수들에 대해 상대가공변질층의 깊이  $H_2/R_0$



(a) Steel (SM20C)



(b) Aluminum (Al5052)

Fig. 4 Plastic metal flow after chemical etching (10X)

$\left(=1 - \frac{R_i}{R_0}\right)$ 에서  $R_i/R_0$ 를 변화시킬 때 릿지가 소멸 또는 전단이 되는 경우에 각자 소요되는 에너지와 비교하므로써 판정식 (34)와 (35)를 만족하면 이 운동은 계속 진행하게 된다. 이들을 토대로 조합된 공정변수들에 대해 물결모양운동을 위한 영역을 설정하였다.

Fig. 5는  $H/D_0=0.02$ ,  $L/D_0=0.6$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $m=0.1$  일때  $R_i/R_0$ 의 변화에 따른 릿지 운동현상의 세 경우에 대해 각자 필요한 상대동력을 나타낸 그림이다. 릿지가 소멸되는 경우와 전단이 일어나는 경우에 있어서의 소요되는 상대동력은 각자 0.55와 1.35 정도로 일정한 반면에 물결모양운동을 위한 것은  $R_i/R_0$ 의 증가에 따라 감소하다가  $R_i/R_0=0.8$ 에서 최소값 0.4를 가진후 증가하고 있는데 이 경우의 공정변수들의 조합에서는 표면소성연마가공을 위한 물결모양이 예측되고 이

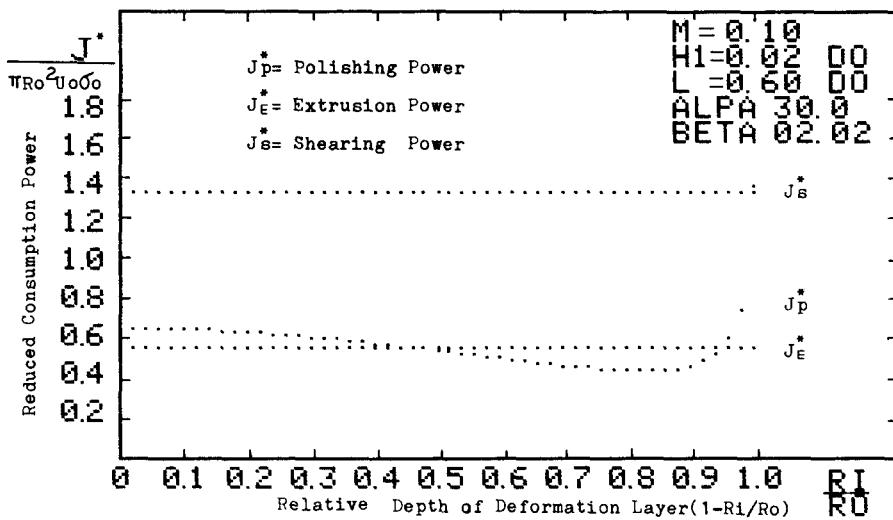


Fig. 5 Variation of reduced consumption power on the plastic polishing, extrusion and shearing type for the given ridge shape and size with respect to relative depth of deformation layer

론적 상대가공변질층깊이( $H_1/R_o$ )는 대략 0.2에서 유일하게 정해짐이 예측된다.

이와 동일한 방법으로 각자의 공정변수들의 변화에 따라 릿지의 물결모양운동을 위한 이론적 판정조건 설정결과 및 실험과의 비교결과는 Fig. 6~12에 나타내었다. Fig. 6은 동일한 마찰조건( $m=0.1$ )에서 릿지의 상대높이( $H_1/D_o$ )가 0.01부터 0.06까지 변할때 다이반각( $\alpha$ )과 릿지의 상대폭( $L/D_o$ )의 관계로부터 물결모양운동이 가능한 영역의 변화를 나타낸 그림이며,  $H_1/D_o$ 가 증가할수록 이 운동의 영역은 좁아지고 동일한에 대해  $H_1/D_o$ 가 작을수록 영역은 넓어짐을 알 수 있다. 점선아래의 영역은  $L/D_o$ 가 작고 상대적으로  $L/D_o$ ,  $H_1/D_o$ 가 클때 릿지가 링 형상처럼 전단이 예측되는 영역이다.

Fig. 7은 Fig. 6에서 동일조건에서 마찰계수가 커질때 물결모양운동이 가능한 영역의 변화를 나타내고 있는데 마찰계수가 커질수록 이 운동의 영역은 넓어지고,  $L/D_o$ 가 작은 경우에는  $m$ 의 증가에 거의 영향을 받지 않으나  $L/D_o$ 가 클수록 영역은 서서히 증가함을 알 수 있다.

Fig. 8은  $m=0.1$ 이고  $H_1/D_o$ 가 0.02, 0.03에서 순동에 대해  $\alpha$ 와  $L/D_o$ 의 관계인 Fig. 6으로부터 실험과 비교한 결과로써 물결모양운동이 예측된 영역에서 이 운동이 대부분 발생하였으며, 일부는 릿지가 소멸되는 기준의 압출공정이 예측되는 영역에서도 이 운동이 일어났지만 물결모양운동이 시작되는 영역 부근에서 거의 이 운동이 일어났다.

Fig. 9는 동일한  $m=0.1$ 에서  $L/D_o$ 를 0.2부터 0.8까지 변화시킬 때 물결모양운동의 영역을 나타내고 있는데  $L/D_o$ 가 증가할수록 이 운동의 영역은 좁아지고, 동일한  $L/D_o$ 에서는  $H_1/D_o$ 가 작을수록 이 영역은 확대되고 있다. Fig. 10은 Fig. 9에서와 동일한 조건에서  $m$ 의 증가에 따른 물결모양운동의 발생영역변화를 나타내고 있으며,  $m$ 이 커질수록 이 운동의 영역은 넓어지고 동일한  $L/D_o$ 에서  $H_1/D_o$ 가 증가할수록 더 큰 폭으로 영역이 확대됨을 알 수 있다. Fig. 11은  $m=0.1$ 이고 순동에 대해  $L/D_o$ 가 0.3, 0.5 그리고 0.8로 변할때 다이반각과  $H_1/D_o$ 와의 관계인 Fig. 9로부터 실험과 비교한 결과이며, 이론적으로 물결모양운동이 예측된 조건에 대해 실험한 경우에는 반드시 이 운동

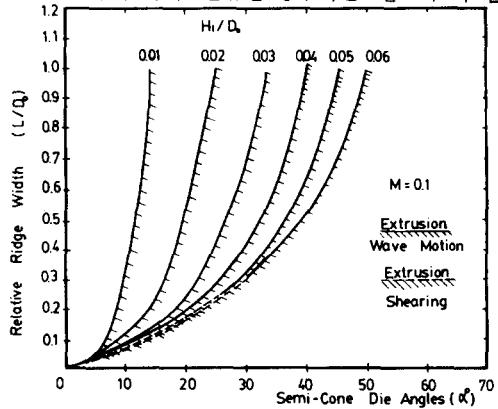


Fig. 6 Criterion for wave motion of ridge in plastic polishing process ( $M=0.1$  and  $H_1/D_o=0.01\sim 0.06$ )

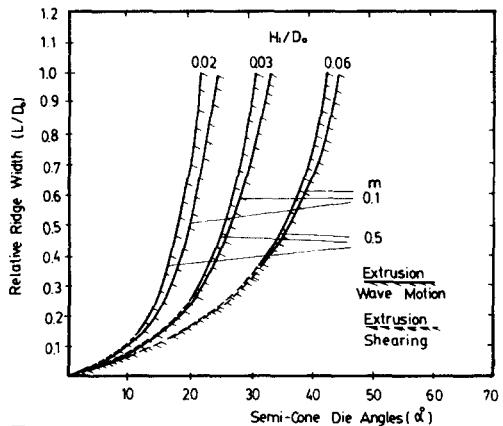


Fig. 7 Criterion for wave motion of ridge in plastic polishing process ( $H_1/D_0=0.02$ ,  $0.03$  and  $0.06$ )

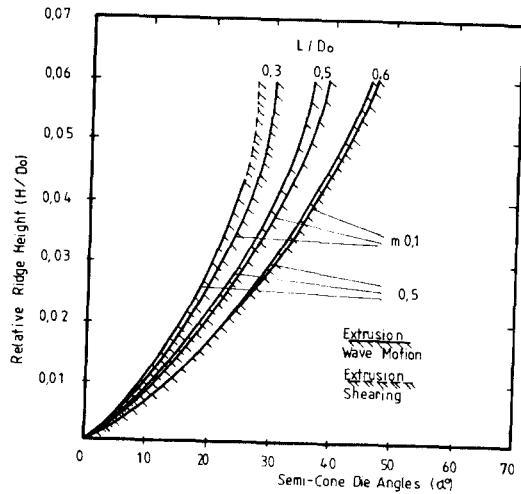


Fig. 10 Criterion for wave motion of ridge in plastic polishing process( $L/D_0=0.3$ ,  $0.5$  and  $0.8$ )

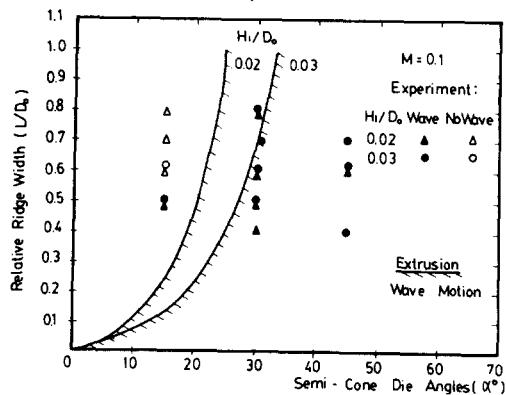


Fig. 8 Comparison between proposed criterion and experimental results for steel ( $M=0.1$ ,  $H_1/D_0=0.02$  and  $0.03$ )

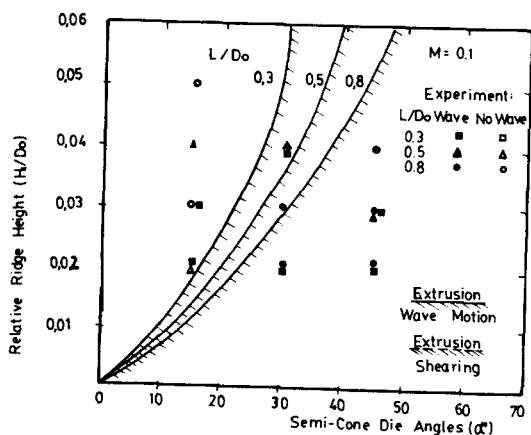


Fig. 11 Comparison between proposed criterion and experimental results for copper ( $M=0.1$ ,  $L/D_0=0.3$ ,  $0.5$  and  $0.8$ )

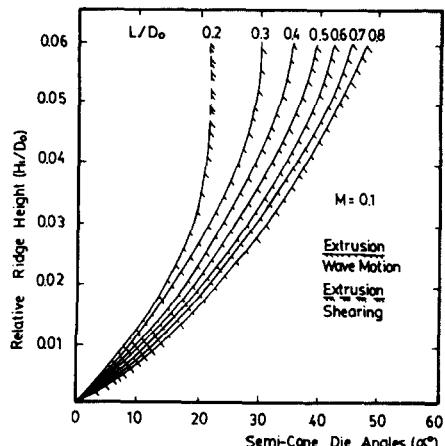


Fig. 9 Criterion for wave motion of ridge in plastic polishing process ( $M=0.1$ ,  $L/D_0=0.2\sim 0.8$ )

이 일어났으며 일부는 이 운동이 시작되는 경계부근인 압출공정영역에서도 일어났다.

Fig. 12는  $\alpha=30^\circ$ 에 대하여  $H_1/D_0$ 와  $L/D_0$ 의 관계에서 빗지의 세 가지 운동의 경계영역을 표시하고 있으며 순동등을 재료로 실험한 결과, 경계영역내에서 또는 부근에서 대부분 물결모양운동이 일어났음을 나타내고 있다.

#### 4.2 표면소성연마가공 실험과 상계해석의 결과 비교

빗지가 다양한 형상과 크기로 기계가공된 시편으로

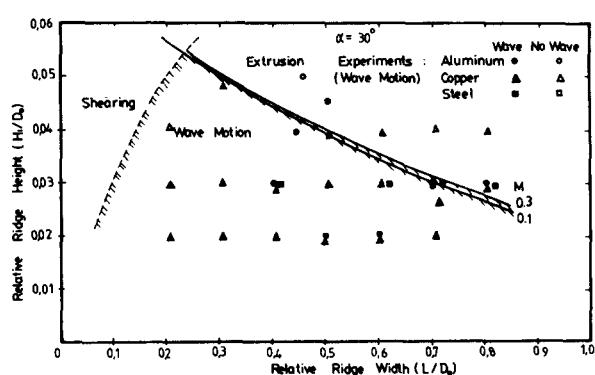


Fig. 12 Comparison between proposed criterion and experimental results ( $\alpha=30^\circ$ )

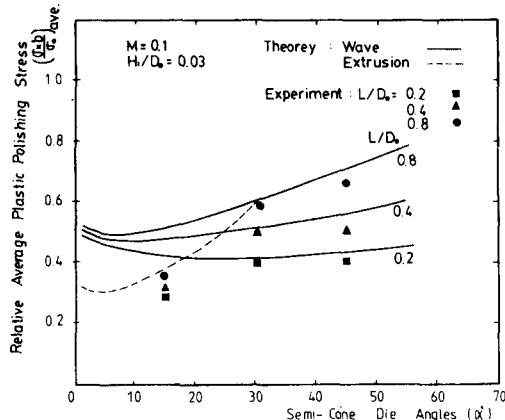


Fig. 13 Comparison between computed relative average plastic polishing stress and experimental results for copper ( $M=0.1$ ,  $H_1/D_0=0.03$ )

부터 실제 연마가공된 결과와 유동함수를 이용한 상계 해석으로부터 구한 무차원 평균가공응력과의 비교를 Fig. 13에 나타냈다.

동일한 릿지의 상대높이 ( $H_1/D_0=0.03$ )와 마찰계수 ( $m=0.1$ )에서 순동에 대하여  $L/D_0$ 이 0.2, 0.4 그리고 0.8로 변할 때  $\alpha$ 에 대해 비교한 결과, 정성적으로 잘 일치하고 있으며, 점선은 릿지의 소멸에 소요되는 값을 나타내며  $\times$ 표는 릿지의 형상과 크기 및 마찰계수 따라 결정되는 물결모양운동과 릿지의 소멸에 대한 경계를 나타낸다. 동일한  $H_1/D_0$ 와  $m$ 에 대해  $L/D_0$ 이 클수록 물결모양운동은 더 큰 다이반각에서 시작되므로 표면소성연마가공의 범위는 상대적으로 좁아짐을 볼 수 있다.

Fig. 14는 동일한  $L/D_0=0.8$ 과  $m=0.1$ 에서  $H_1/D_0$

를 0.02, 0.03으로 각각 변화시킬 때 순동에 대하여  $\alpha$ 에 따른 실험과의 비교결과로써 비교적 양호한 일치를 보여주며  $H_1/D_0$ 가 클수록 표면소성연마가공의 범위가 좁아짐을 알 수 있다.

Fig. 15는 동일한  $L/D_0=0.8$ 과  $H_1/D_0=0.02$ 에서 순동에 대하여  $m$ 이 0.1, 0.3, 0.5로 변화할 때  $\alpha$ 에 따른 실험과의 비교결과이며  $m$ 이 클수록 무차원 평균가공응력은 커지며 그레이스에 중량비 10%의 흑연분말을 배합한 습식윤활제를 사용한 경우에 대해 이론값과 비교한 결과, 비교적 잘 일치하고 있다.  $m$ 이 클수록 이 응력은 커지나 물결모양운동과 압출공정의 경계는 거의 동일한  $\alpha$ 에서 형성되고 있음을 볼 수 있다.

Fig. 16은 동일한  $\alpha=30^\circ$ 와  $m=0.1$ 에서 순동에 대해  $H_1/D_0$ 을 0.02, 0.03으로 각각 변화시킬 때  $L/D_0$ 에 대해 실험과 비교한 것으로  $L/D_0$ 이 증가할수록 무차원 평균가공응력은 거의 선형적으로 증가하며 실험과 비교결과, 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

#### 4.3 릿지의 물결모양운동으로 인한 표면조도의 개선정도 비교

기계가공된 릿지가 공구를 통과시 물결모양운동으로 표면소성연마가공되는 과정과 가공된 제품을 Fig. 17에 나타냈다. 10, 25와 40mm 등으로 가공됨에 따라 거친 표면은 매끈해지고 릿지의 크기는 변하고 있다. 가공전의 표면상태가 거칠수록 이동중인 릿지의 크기는 상대적으로 점점 작아지면서 가공이 완료되기 전에 소멸될 수도 있으며, 가공전의 표면상태가 양호한 상태이

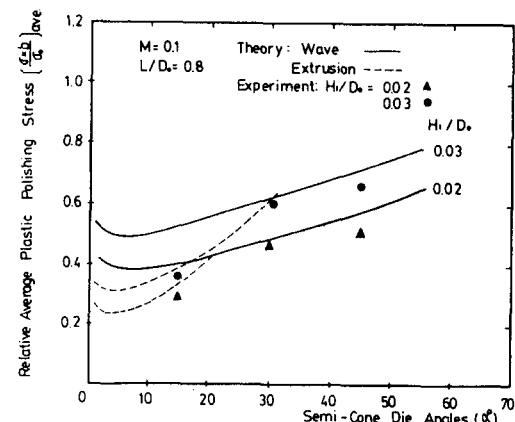


Fig. 14 Comparison between computed relative average plastic polishing stress and experimental results for copper ( $M=0.1$ ,  $L/D_0=0.8$ )

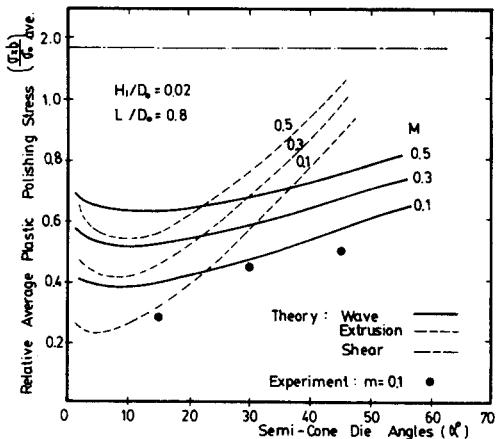


Fig. 15 Comparison between computed relative average plastic polishing stress and experimental results for copper ( $L/D_0 = 0.8$  and  $H_1/D_0 = 0.02$ )

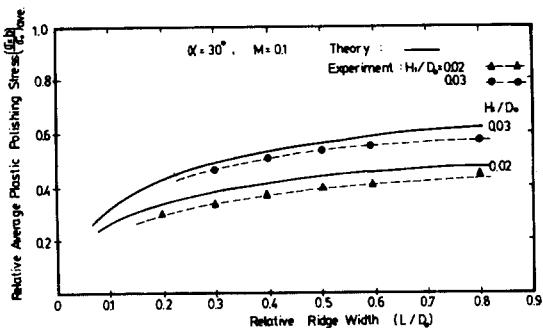


Fig. 16 Comparison between computed relative average plastic polishing stress and experimental results for copper ( $\alpha = 30^\circ$  and  $M = 0.1$ )

면 가공이 완료된 후에도 릇지의 나머지 부분은 제품의 끝 단면에 남겨 된다.

표면소성연마가공전의 기계가공된 시편과 물결모양 운동을 통한 가공후의 시편에 대하여 표면상태를 최대 높이 표면조도( $\mu\text{m}R_{\max}$ )로 측정한후 개선정도를 Fig. 18에 나타냈다. 순동에 대하여 그리스에 흑연분말을 배합한 습식윤활제를 사용하고,  $H_1/D_0$ 를 0.02, 0.03 그리고 0.04로 하고  $L/D_0$ 을 0.2에서 0.8 까지 변화 시킨 시편에 대해 실현한 결과, 가공실험전의 표면조도의 정도 및 릇지의 형상과 크기에 큰 영향없이 대부분 0.5~2.5  $\mu\text{m}R_{\max}$  범위내에서 표면조도가 크게 개선되었음을 볼 수 있다.

Fig. 19는 그리스에 흑연 및 이황화몰리브덴 분말을

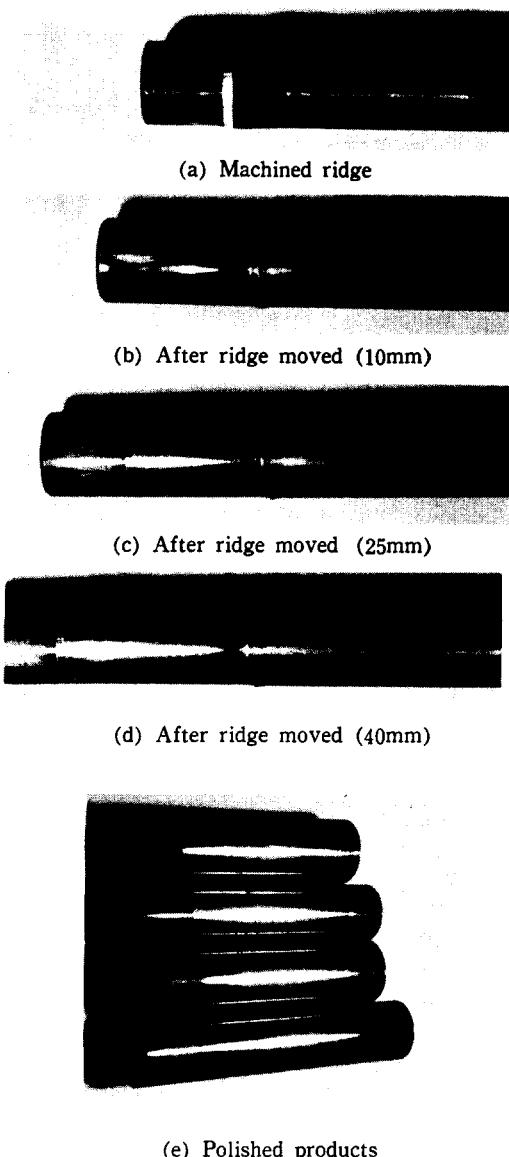


Fig. 17 Ridge shape during plastic polishing process

각각 배합한 습식윤활제와 분무식 테플론 건식윤활제등 세 가지 윤활제를 사용하여  $H_1/D_0$ 에 상관없이  $L/D_0$  변화에 따른 가공전후의 시편의 표면상태 개선정도를 나타내며, 윤활제를 흑연분말을 사용한 경우에는 표면조도는 대략 0.25~2.5  $\mu\text{m}R_{\max}$  범위내에서 개선된 반면에 이황화몰리브덴 분말과 분무식 테플론 건식윤활제를 사용한 결과는 대략 2~5  $\mu\text{m}R_{\max}$  정도로 개선되었는데, 선택된 윤활제의 종류와 성질에 따라 가공면의 표면상태가 영향을 받음을 알 수 있다.

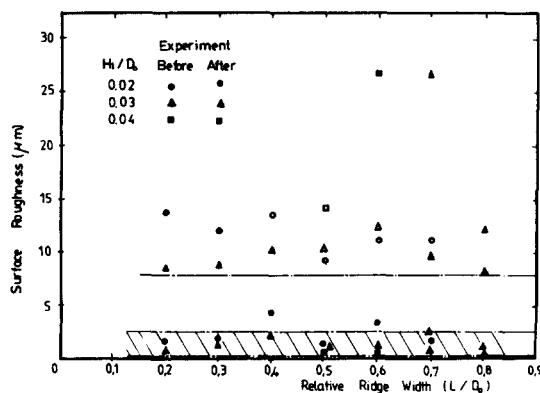


Fig. 18 Comparison of surface roughness between before and after plastic polishing process for copper (lubricant: graphite powder)

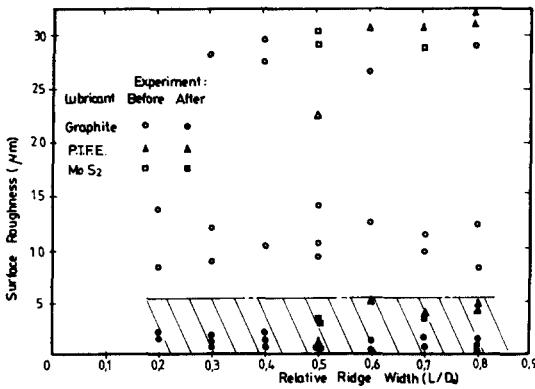


Fig. 19 Comparison of surface roughness between before and after plastic polishing process for copper

Fig. 20은 알루미늄에 대하여 윤활제를 Fig. 19와 동일한 세 가지의 윤활제를 사용하여  $H_1/D_0$ 와  $L/D_0$ 의 변화에 따른 가공전후의 표면상태 개선정도를 나타내고 있다.

일반적으로 알루미늄은 연질이기 때문에 표면조도의 개선이 어려운 관계로 대략  $5\mu\text{m}R_{\max}$  범위내에서 표면상태가 개선되었다.

Fig. 21은 연강에 대해 시편을 인산염 피막처리후 본더류비로 윤활처리한 경우에 있어서 가공전후에 대한 표면상태의 개선정도를  $H_1/D_0$ 와  $L/D_0$ 의 변화에 따라 실험한 결과를 나타낸 것으로, 이 경우에 있어서도 가공후의 표면조도가 빛지의 형상과 크기에 큰 영향없이 대략  $0.25\sim 5\mu\text{m}R_{\max}$  범위내에서 표면상태가 크게 개선되었음을 알 수 있다.

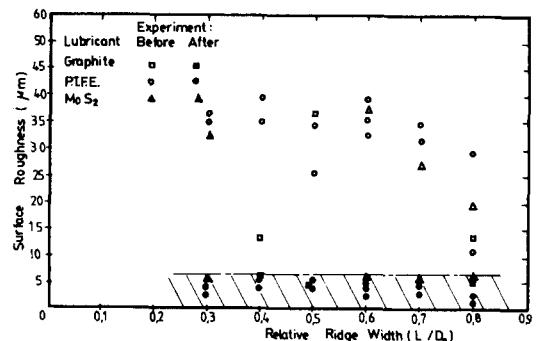


Fig. 20 Comparison of surface roughness between before and after plastic polishing process for aluminum

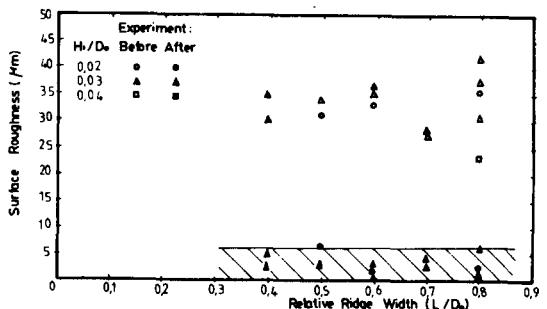


Fig. 21 Comparison of surface roughness between before and after plastic polishing process for steel (phosphate film)

#### 4.4 가공변질층의 깊이 예측과 결과 비교

표면소성연마가공된 시편은 빛지의 물결모양운동에 의해 반드시 표층부 부근에 가공변질층이 형성되어 있다.

Fig. 22는 동일한  $m=0.1$ 과  $H_1/D_0=0.03$ 에 대하여  $L/D_0$ 가 0.2부터 0.8까지 변할때  $\alpha$ 에 따른 가공변질층의 상태깊이( $H_2/R_0$ )와의 관계를 나타낸 것으로써 예측된  $H_2/R_0$ 는 동일한  $H_1/D_0$ 에 대해  $\alpha$ 가 커질수록 감소하고 이러한 경향은  $L/D_0$ 가 증가할수록 간격은 좁아짐을 알 수 있다. 절선은 물결모양운동이 시작되는 한계를 나타내며 실제 가공후에 가공변질층의 깊이를 미소경도계를 이용한 경도측정법등으로 측정한 결과, 이론적으로 예측된 것보다 다소 차이를 가지지만 경향은 유사함을 알 수 있는데, 이는 실제 가공변질층과 가공변형이 되지 않은 모총사이의 경계가 명확하지 못하고 또한 측정방법에 따른 상대오차 및 측정오차가 다소 기인한 것으로 볼 수 있다.

Fig. 23은 동일한  $H_1/D_0=0.03$ 과  $L/D_0=0.4$ 에 대

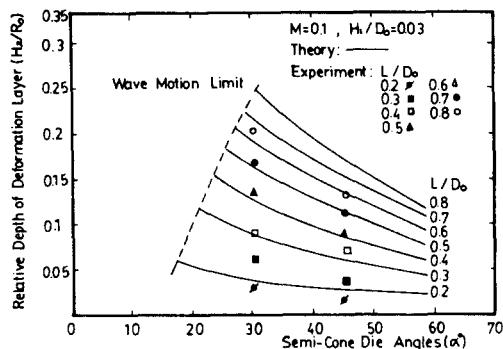


Fig. 22 Comparison between computed relative depth of deformation layer and experimental results ( $M=0.1$ ,  $H_1/D_0=0.03$ )

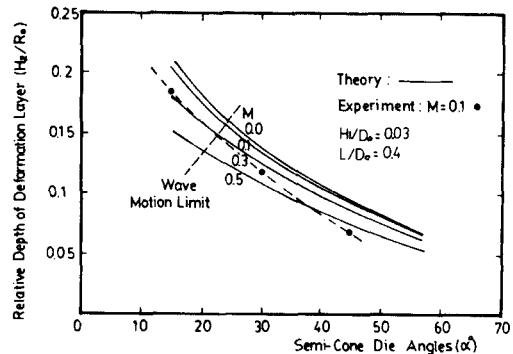


Fig. 23 Comparison between computed relative depth of deformation layer and experimental results for copper ( $M=0.1$ ,  $H_1/D_0=0.03$  and  $L/D_0=0.4$ )

하여  $\alpha$ 의 증가에 따라  $m$ 과  $H_2/R_0$ 의 관계를 나타낸 것으로써  $m$ 이 증가할수록  $H_2/R_0$ 는 감소하여 거의 시편 표면부근에서 가공변질층이 형성됨을 알 수 있다. 순동에 대하여 그리스와 흑연분말을 혼합한 습식운동계를 사용하여 표면소성연마가공후의 시편에 대하여 가공변질층의 깊이를 측정한 결과,  $\alpha$ 의 증가에 따라 감소하면서 예측된 깊이와 비교적 잘 일치하였다.

Fig. 24는  $H_1/D_0=0.03$ 과  $\alpha=30^\circ$ 로 일정 할 때  $L/D_0$ 와  $m$ 의 변화에 따른  $H_2/R_0$ 를 나타낸 것으로써  $L/D_0$ 의 증가에 따라  $H_2/R_0$ 는 증가하고  $m$ 은 커질수록 감소하며 순동에 대해 실제측정된 깊이는  $L/D_0$ 가 커질수록 예측된 깊이보다 대략  $0.1H_2/R_0$ 정도 적었다.

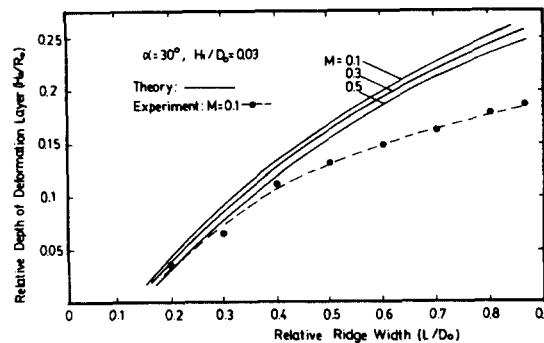


Fig. 24 Comparison between computed relative depth of deformation layer and experimental results for copper ( $\alpha=30^\circ$ ,  $H_1/D_0=0.03$ )

## 5. 결 론

봉재의 원주상에 기계가공된 릿지가 공구통과시에 물결모양운동으로 이동하므로써 거칠은 가공면이 표면소성연마가공되는 연구를 통하여 상계해석과 실험을 비교하므로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 릿지의 물결모양운동은 릿지의 형상과 크기 및 다이반자 그리고 윤활조건등에 의존되며 이들 공정변수들의 조합에 따라 릿지는 공구속에서 진행되는 동안 기존의 압출공정처럼 릿지가 평평해지면서 소멸될 수도 있으며 또는 링 형상처럼 릿지가 전단이 되는 경우도 발생하였다.

(2) 주어진 공정변수들에 의한 릿지의 운동을 예측하는 판정조건 및 경계영역이 제시되었으며 실험과 비교한 결과, 제시된 판정조건 및 경계영역의 구분은 릿지의 운동현상예측을 용이하게 하였다.

(3) 표면소성연마가공은 릿지의 물결모양운동에 의해서만 가능하였으며, 연마가공된 봉재의 표면상태는 최대높이 표면조도로 표시하여 가공전의 표면상태와 거의 영향없이 대부분  $0.2\mu\text{m}$ 에서  $5\mu\text{m}$  내외의 범위에서 개선되었다.

(4) 공정변수들 중에서 다이반자이 커지거나 릿지의 폭과 높이가 작을수록 릿지의 물결모양운동의 영역은 상대적으로 넓어 졌으며, 마찰계수는 이 운동의 한계 범위 설정에 거의 영향을 미치지 않았지만 표면상태의 개선에 큰 영향을 주므로 양호한 윤활제의 선택은 중요하였다.

(5) 표면소성연마가공에 의해 개선된 표면조도는 릿지의 형상과 크기 및 다이반자등의 공정변수들에 거의 영향을 받지 않았으며, 이에따라 에너지의 소모가 가

장적은 상태의 공정변수들의 선택에 의한 가공이 유리함을 알 수 있었다.

(6) 릿지의 물결모양운동으로 인하여 가공변질층은 봉재의 표면부근에서만 형성되어 공정변수에 크게 의존하였으며, 다이반각이 크고 릿지의 높이와 폭이 클수록 표면에 접근하여 가공변질층의 깊이는 상대적으로 얕어졌다. 이론적으로 예측된 깊이와 실험과의 비교에서 비교적 양호한 결과를 얻은 관계로 가공변질층 깊이의 이론적 예측은 유용하였다.

### 후기

본 연구는 1985년도 한국과학재단의 일반연구비 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

### 참고문헌

- (1) D. Westwood and J.F. Wallace, 1960, "Upper-Bound Values for the Loads on a Rigid-Plastic Body in Plane-Strain", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 2, No. 3, pp. 178~187.
- (2) W. Johnson and F.W. Travis, 1967, "High Speed Expansion and Bore Finishing of Austenitic Stainless Steel Tubes", Proceeding of the International Conference on Manufacturing Technology, pp. 895~905.
- (3) J.M. Challen and P.L.B. Oxley, 1984, "Slip-Line Fields for Explaining the Mechanics of Polishing and Related Process", International Journal of Mechanics and Science, Vol. 26, No. 6~8, pp. 403~418.
- (4) B. Avitzur, C.J. Van Tyne, Z.J. Luo and C.R. Tang, 1984, "A Model for the Simulation of Friction between Dies and Workpiece", Advanced Technology of Plasticity, Vol. 1, pp. 200~207.
- (5) B. Avitzur, C.K. Huang and Y.D. Zhu, 1984, "A Friction Model based on the Upper-Bound Approach to the Ridge and Sublayer Deformations", Wear, Vol. 95, pp. 59~77.
- (6) B. Avitzur and J.C. Choi, 1986, "Compatibility of the Upper-Bound Approach and the Balance of Forces for the Treatment of Metal Forming Process", Journal of Mechanical Working Technology, Vol. 13, pp. 141~150.
- (7) K.T. Chang and J.C. Choi, 1972, "Upper-Bound Solutions to Tube Extrusion Problems through Curved Dies", ASME, Trans. Journal of Engineering for Industry, pp. 1108~1112.
- (8) K.T. Chang and J.C. Choi, 1971, "Upper-Bound Solutions to Extrusion Problems through Curved Dies", Proceeding of the 12th Midwestern Mechanics Conference, Univ. of Notre Dame, Vol. 6, pp. 383~396.
- (9) W. Prager and P.G. Hodge, 1951, "Theory of Perfectly Plastic Solids", John Wiley, N.Y.