

<論 文>

# 집중질량을 가지는 원환의 자유진동 해석†

홍진선\* · 김석현\* · 이장무\*\*

(1986년 11월 3일 접수)

## Free Vibrational Analysis of a Circular Ring with a Concentrated Mass

Jin Sun Hong, Seock Hyun Kim and Jang Moo Lee

**Key Words:** Vibration(진동), Circular Ring(원환), Concentrated Mass(집중질량), Axisymmetry(축대칭), Slight Asymmetry(미소 비대칭)

### Abstract

This study is concerned with dynamic characteristics of a circular ring with a concentrated mass attached.

The equations of motion are set up and are solved by using Laplace transformation. The ratio of a concentrated mass to the mass of circular ring is used as a parameter.

Experiment was performed by employing impulse test and the results show good agreement with those of analysis.

The results of this study can be utilized in vibrational analysis of axisymmetric shells with slight asymmetries.

### 1. 서 론

원환 또는 셸등 많은 축대칭 구조물은 가공의 불균일성, 재질의 불균일성, 불순물 또는 결함의 존재, 부분적인 질량 및 강성의 증감에 의하여 원래 하나의 모우드로 있었던 모우드의 분리 현상이 일어나고 원주방향, 반경방향의 진동모우드의 절선(nodal line)과 반절선의 위치가 급격하게 변한다. 그러므로 전체 진동응답의 양상이 이상화된 원환 또는 축대칭 셸의 경우와

매우 큰 차이를 나타내게 된다. 이러한 현상은 과거종의 진동의 수치해석 및 실험<sup>(1-3)</sup>에서 이미 관찰되었으나 현재까지 미소 비대칭요소를 가지는 축대칭 구조(원환 또는 축대칭 셸)의 이론해 및 근사해에 대한 연구보고는 매우 적다. 미소 비대칭을 갖는 축대칭구조의 진동연구의 기본이 되는 연구로서 축대칭 셸의 기본요소 중 하나인 원환의 진동에 대한 집중질량의 영향을 이론적으로 규명하고 실험을 통하여 검증하였다.

### 2. 이론적 해석

#### 2.1 집중 질량을 가지는 원환의 운동방정식

원환의 단위 길이당 질량을  $m$ , 집중질량을  $M_0$ ,  $u$

† 1986년도 대한기계학회 추계학술대회(1986. 11. 8)에서 발표

\* 정희원, 서울대학교 대학원

\*\* 정희원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과

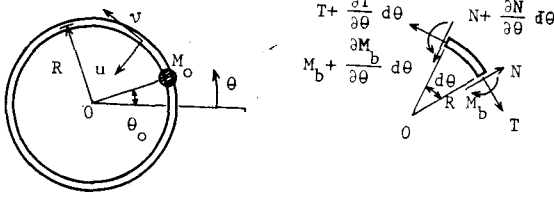


Fig. 1 Ring element

와  $v$ 를 각각 반경 및 원주방향의 변위라고 하여 힘과 모멘트의 평형방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} - N = [mR + M_0 \delta(\theta - \theta_0)] \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$T + \frac{\partial N}{\partial \theta} = [mR + M_0 \delta(\theta - \theta_0)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial \theta} + NR = 0 \quad (3)$$

단,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 < \theta_0 < 2\pi$

급침 모우멘트와 변위와의 관계는

$$M_b = \frac{EI}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

또한 원환의 길이가 변하지 않는다는 가정하에서는  $u$ 와  $v$  사이에 아래의 관계식이 성립하게 된다.

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (5)$$

식 (1)~(5)로부터 원환의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{EI}{R^3} \left( \frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + [mR + M_0 \delta(\theta - \theta_0)]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - v \right) + M_0 \delta'(\theta - \theta_0) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2 \partial \theta} = 0 \quad (6)$$

식 (6)의 해를  $v(\theta, t) = V(\theta)e^{i\omega t}$  형태로 가정하고

$$W = \frac{mR^4}{EI} \omega^2 \quad (7)$$

$$M = \frac{M_0}{mR} \quad (8)$$

이라고 하면

식 (6)은 다음과 같이 무차원 식으로 표현된다.

$$\frac{d^6 V}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 V}{d\theta^4} + \{1 - W[1 + M\delta(\theta - \theta_0)]\}$$

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} - WM\delta'(\theta - \theta_0) \frac{dV}{d\theta} + W$$

$$[1 + M\delta(\theta - \theta_0)] V = 0 \quad (9)$$

## 2.2 고유진동수와 고유모우드의 계산

식 (9)의 라플라스 변환식은

$$\begin{aligned} \bar{V}(S) = & \frac{1}{S^6 + 2S^4 + (1 - W)S^2 + W} \\ & \{ [S^5 + 2S^3 + (1 - W)S] V(0) + [S^4 + 2S^2 \\ & + (1 - K)] V'(0) + (S^3 + 2S) V''(0) \\ & + (S^2 + 2) V'''(0) + S V^{(4)}(0) + V^{(5)}(0) \\ & + W M S e^{-i\theta_0} V'(\theta_0) - W M e^{-i\theta_0} V(\theta_0) \} \quad (10) \end{aligned}$$

으로 되며  $S^2 = t$ 라고 하면

$$\begin{aligned} S^6 + 2S^4 + (1 - W)S^2 + W = & t^3 + 2t^2 + (1 - W)t \\ & + W \equiv f(t) \end{aligned}$$

$f(t) = 0$ 는 최소한 1개의 음근을 가지며 이것을  $-\alpha_1^2 (\alpha_1 > 0)$ 이라고 하면

$$W = \frac{\alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1)^2}{\alpha_1^2 + 1} \quad (11)$$

$f(t) = 0$ 의 근의 형태는  $\alpha_1$ 의 크기에 따라 Table 1과 같이 나뉘어진다.

Table 1 Roots of  $f(t) = 0 (\alpha_1^u = \sqrt{(1/2)(7 + \sqrt{17})}, \alpha_1^l = \sqrt{(1/2)(7 - \sqrt{17})})$

Range of $\alpha_1$	Roots of $f(t) = 0$
$\alpha_1^u < \alpha_1$	One negative root, two positive distinct roots
$\alpha_1 = \alpha_1^u$	One negative root, positive double root
$\alpha_1^l < \alpha_1 < \alpha_1^u$	One negative root, complex conjugate
$\alpha_1 = \alpha_1^l$	One negative root, negative double root
$0 < \alpha_1 < \alpha_1^l, \alpha_1 \neq 1$	Three negative distinct roots
$\alpha_1 = 0$ or $\alpha_1 = 1$	$t = 0, -1, -1$

Table 1의 각 경우에 따라  $\bar{V}(S)$ 의 극(pole) 형태가 결정된다.

$\alpha_1$ 의 여러 가지 경우에 대하여 해석하였으나, 본 논문에서는 지면관계상  $\alpha_1 > \alpha_1^u$ 인 경우에 한하여 해석과정을 보였다.

$\alpha_1 > \alpha_1^u$ 인 경우

$\bar{V}(S)$ 는  $S = \pm \alpha_1 i, \pm \alpha_2, \pm \alpha_3 (\alpha_2 \neq \alpha_3)$ 에서 단순극을 가진다.

유수정리(residue theorem)를 이용하여 식 (10)을 역변환시키면  $V(\theta)$ 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\theta) = & A_1 \cos \alpha_1 \theta + B_1 \sin \alpha_1 \theta + C_1 \cdot H(\theta - \theta_0) \\ & \cos \alpha_1 (\theta - \theta_0) + D_1 \cdot H(\theta - \theta_0) \sin \alpha_1 (\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=2}^3 [A_i \cosh \alpha_i \theta + B_i \sinh \alpha_i \theta + C_i \cdot H(\theta - \theta_0) \cosh \alpha_i (\theta - \theta_0) + D_i \cdot H(\theta - \theta_0) \sinh \alpha_i (\theta - \theta_0)] \quad (12)$$

여기에서  $H(\theta)$ 는 계단함수이다.

$$C_i = 2WMV'(\theta_0)\alpha_i/Q_i \quad (13-a)$$

$$D_i = -2WMV(\theta_0)\alpha_i/Q_i \quad (13-b)$$

$$Q_i = 6\alpha_i^5 \pm 8\alpha_i^3 + 2(1-W)\alpha_i, \quad \text{복부호중 } (-) \text{는 } i=1 \text{ 인 경우} \quad (13-c)$$

$V(\theta)$ 는 주기함수가 되어야 하므로 아래의 식이 성립하여야 하며

$$V^{(n)}(0) = V^{(n)}(2\pi), \quad n=0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (14)$$

근과 계수와의 관계로부터 아래의 식이 구하여진다.

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 2 \quad (15-a)$$

$$-\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 - \alpha_3^2 \alpha_1^2 = 1 - W \quad (15-b)$$

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 = W \quad (15-c)$$

16개의 미지수 ( $A_i, B_i, C_i, D_i, \alpha_i, W$ )에 대한 15개의 식으로 구성된 위의 연립방정식으로부터  $M \neq 0, \alpha_1$ 이 정수가 아닐 때 식 (16)~(24)가 얻어진다. ( $M \neq 0, \alpha_1$ 이 정수인 경우에는 단순해).

$$W = \frac{mR^4}{EI} \omega^2 = \frac{\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)^2}{\alpha_1^2 + 1} \quad (16)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\alpha_1^2 - 2) - \left[ (\alpha_1^2 - 2)^2 - \frac{4W}{\alpha_1^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (17)$$

$$\alpha_3^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\alpha_1^2 - 2) + \left[ (\alpha_1^2 - 2)^2 - \frac{4W}{\alpha_1^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (18)$$

$$A_1 = \frac{1}{(\cos 2\pi\alpha_1 - 1)^2 + (\sin 2\pi\alpha_1)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &[-\cos \alpha_1 \theta_0 + \cos \alpha_1 (2\pi - \theta_0)] C_1 \\ &+ [\sin \alpha_1 \theta_0 + \sin \alpha_1 (2\pi - \theta_0)] D_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$B_1 = \frac{1}{(\cos 2\pi\alpha_1 - 1)^2 + (\sin 2\pi\alpha_1)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &[-\sin \alpha_1 \theta_0 - \sin \alpha_1 (2\pi - \theta_0)] C_1 \\ &+ [-\cos \alpha_1 \theta_0 + \cos \alpha_1 (2\pi - \theta_0)] D_1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$A_i = -\frac{C_i + D_i}{2} \cdot \frac{e^{-\alpha_i(\pi - \theta_0)}}{e^{\alpha_i \pi} - e^{-\alpha_i \pi}}, \quad i=2, 3 \quad (21)$$

$$B_i = \frac{C_i - D_i}{2} \cdot \frac{e^{-\alpha_i(\pi - \theta_0)}}{e^{\alpha_i \pi} - e^{-\alpha_i \pi}}, \quad i=2, 3 \quad (22)$$

$$V(\theta_0) \cdot \left( \frac{1}{Q_1 \tan \pi \alpha_1} - \frac{1}{Q_2 \tanh \pi \alpha_2} - \frac{1}{Q_3 \tanh \pi \alpha_3} - \frac{1}{WM} \right) = 0 \quad (23)$$

$$V'(\theta_0) \cdot \left( \frac{\alpha_1^2}{Q_1 \tan \pi \alpha_1} + \frac{\alpha_2^2}{Q_2 \tanh \pi \alpha_2} + \frac{\alpha_3^2}{Q_3 \tanh \pi \alpha_3} + \frac{1}{WM} \right) = 0 \quad (24)$$

식 (23), (24)의 ( ) 부분은 동시에 0이 되지 않는 않으며,  $V(\theta_0)$ 와  $V'(\theta_0)$ 가 모두 0이 되는 경우에는

단순해가 된다.

따라서 식 (23), (24)으로부터 특성방정식을 구할 수 있으며 계수  $A_i, B_i, C_i, D_i$ 를 식 (12)에 대입하여 고유모우드를 구할 수 있다.

Table 1의 여러 경우에 대하여 이와 유사한 방법으로 구한 고유진동수와 고유모우드의 결과식은 다음과 같다.

(아래의 계수  $\alpha_i, Q_i, C_i, D_i, a, b, T_1, T_2, P, Q, R, S$ 와  $W$ 는 부록)

(1)  $\alpha_1 > \alpha_1^v$  인 경우

(가)  $V(\theta_0) = 0$  일 때 :

$$\text{특성방정식 : } \frac{\alpha_1^2}{Q_1 \tan \pi \alpha_1} + \frac{\alpha_2^2}{Q_2 \tanh \pi \alpha_2} + \frac{\alpha_3^2}{Q_3 \tanh \pi \alpha_3} + \frac{1}{WM} = 0 \quad (25)$$

$$\text{고유모우드 : } V(\theta) = -\frac{\sin \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} C_1 - \frac{\sinh \alpha_2 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_2} C_2 - \frac{\sinh \alpha_3 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_3} C_3 + H(\theta - \theta_0) [\cos \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot C_1 + \cosh \alpha_2 (\theta - \theta_0) \cdot C_2 + \cosh \alpha_3 (\theta - \theta_0) \cdot C_3] \quad (26)$$

$$U(\theta) = -\frac{\alpha_1 \cos \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} C_1 - \frac{\alpha_2 \cosh \alpha_2 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_2} C_2 - \frac{\alpha_3 \cosh \alpha_3 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_3} C_3 + H(\theta - \theta_0) [-\alpha_1 \sin \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot C_1 + \alpha_2 \sinh \alpha_2 (\theta - \theta_0) \cdot C_2 + \alpha_3 \sinh \alpha_3 (\theta - \theta_0) \cdot C_3] \quad (27)$$

(나)  $U(\theta_0) = 0$  일 때 :

$$-\frac{1}{Q_1 \tan \pi \alpha_1} + \frac{1}{Q_2 \tanh \pi \alpha_2} + \frac{1}{Q_3 \tanh \pi \alpha_3} + \frac{1}{WM} = 0 \quad (28)$$

$$V(\theta) = \frac{\cos \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} D_1 - \frac{\cosh \alpha_2 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_2} D_2 - \frac{\cosh \alpha_3 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_3} D_3 + H(\theta - \theta_0) [\sin \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot D_1 + \sinh \alpha_2 (\theta - \theta_0) \cdot D_2 + \sinh \alpha_3 (\theta - \theta_0) \cdot D_3] \quad (29)$$

$$U(\theta) = -\frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} D_1 - \frac{\alpha_2 \sinh \alpha_2 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_2} D_2 - \frac{\alpha_3 \sinh \alpha_3 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sinh \pi \alpha_3} D_3 + H(\theta - \theta_0) [\alpha_1 \cos \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot D_1 + \alpha_2 \cosh \alpha_2 (\theta - \theta_0) \cdot D_2 + \alpha_3 \cosh \alpha_3 (\theta - \theta_0) \cdot D_3] \quad (30)$$

(2)  $\alpha_1^l \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^u$  인 경우

(가)  $V(\theta_0) = 0$  일 때 :

$$\frac{1}{T_1^2 + T_2^2} \left\{ \begin{aligned} & T_1 \left( \frac{\alpha_1}{\tan \pi \alpha_1} - \frac{a \sinh 2\pi a + b \sin 2\pi b}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \right) \\ & - T_2 \left( \frac{b \sinh 2\pi a - a \sin 2\pi b}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \right) \end{aligned} \right\} - \frac{1}{WM} = 0 \quad (31)$$

$$V(\theta) = - \frac{\sin \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} C_1 + \frac{1}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [-\cosh a(\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \cos b(\theta - \theta_0) + \\ & \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0 + 2\pi)] R \\ & + [-\sinh a(\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \sin b(\theta - \theta_0) + \\ & \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0 + 2\pi)] S \end{aligned} \right\} + H(\theta - \theta_0) [\cos \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot C_1 + 2 \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0) \cdot R + 2 \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0) \cdot S] \quad (32)$$

$$U(\theta) = - \frac{\alpha_1 \cos \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} C_1 + \frac{1}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [\sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0 + 2\pi) - \sinh a \\ & (\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \cos b(\theta - \theta_0)] (aR + bS) \\ & + [\cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0 + 2\pi) - \cosh a \\ & (\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \sin b(\theta - \theta_0)] (aS - bR) \end{aligned} \right\} + H(\theta - \theta_0) \cdot \left\{ \begin{aligned} & -\alpha_1 \sin \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot C_1 \\ & + 2[a \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0) \\ & - b \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0)] R \\ & + 2[a \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0) \\ & + b \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0)] S \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(나)  $U(\theta_0) = 0$  일 때

$$\frac{1}{T_1^2 + T_2^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{aT_1 - bT_2}{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\alpha_1 \tan \pi \alpha_1} \right) \\ & + \frac{\sinh 2\pi a}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \\ & + \frac{bT_1 + aT_2}{a^2 + b^2} \left( \frac{b}{\alpha_1 \tan \pi \alpha_1} \right) \\ & - \frac{\sin 2\pi b}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \end{aligned} \right\} - \frac{1}{WM} = 0 \quad (34)$$

$$V(\theta) = \frac{\cos \alpha_1 (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} D_1 + \frac{1}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [-\sinh a(\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \cos b(\theta - \theta_0) \\ & + \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0 + 2\pi)] P \\ & + [-\cosh a(\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \sin b(\theta - \theta_0) \\ & + \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0 + 2\pi)] Q \end{aligned} \right\}$$

$$+ H(\theta - \theta_0) [\sin \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot D_1 + 2 \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0) \cdot P + 2 \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0) \cdot Q] \quad (35)$$

$$U(\theta) = - \frac{\alpha_1 \sin (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_1} D_1 + \frac{1}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi b} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [\cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0 + 2\pi) - \cosh a \\ & (\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \cos b(\theta - \theta_0)] (aP + bQ) \\ & + [\sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0 + 2\pi) - \sinh a \\ & (\theta - \theta_0 + 2\pi) \cdot \sin b(\theta - \theta_0)] (aQ - bP) \end{aligned} \right\} + H(\theta - \theta_0) \cdot \left\{ \begin{aligned} & \alpha_1 \cos \alpha_1 (\theta - \theta_0) \cdot D_1 \\ & + 2[a \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0) \\ & - b \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0)] P \\ & + 2[a \sinh a(\theta - \theta_0) \cdot \sin b(\theta - \theta_0) \\ & + b \cosh a(\theta - \theta_0) \cdot \cos b(\theta - \theta_0)] Q \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(3)  $0 < \alpha_1 < \alpha_1^l$  인 경우

(가)  $V(\theta_0) = 0$  일 때

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{Q_i \tan \pi \alpha_i} + \frac{1}{WM} = 0 \quad (37)$$

$$V(\theta) = \sum_{i=1}^3 \left[ - \frac{\sin \alpha_i (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_i} + H(\theta - \theta_0) \cos \alpha_i (\theta - \theta_0) \right] C_i \quad (38)$$

$$U(\theta) = \sum_{i=1}^3 \left[ - \frac{\alpha_i \cos \alpha_i (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_i} - H(\theta - \theta_0) \cdot \alpha_i \sin \alpha_i (\theta - \theta_0) \right] C_i \quad (39)$$

(나)  $U(\theta_0) = 0$  일 때

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_i \tan \pi \alpha_i} + \frac{1}{WM} = 0 \quad (40)$$

$$V(\theta) = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\cos \alpha_i (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_i} D_i + H(\theta - \theta_0) (\sin \alpha_i (\theta - \theta_0)) D_i \right] \quad (41)$$

$$U(\theta) = \sum_{i=1}^3 \left[ - \frac{\alpha_i \sin \alpha_i (\theta - \theta_0 + \pi)}{2 \sin \pi \alpha_i} + H(\theta - \theta_0) \alpha_i \cos \alpha_i (\theta - \theta_0) \right] D_i \quad (42)$$

(4)  $\alpha_1 = 0$  또는  $\alpha_1 = 1$  인 경우 ;  $W=0$  가 되어 강제 운동을 나타낸다.

$$V(\theta) = C_1 + C_2 \cos \theta + C_3 \sin \theta \quad (43)$$

### 3. 수치계산 및 실험

무차원 집중질량  $M$  값에 대하여 2.2절과 부록의 식들을 이용하여 집중질량이 달린 원환의 고유진동수와

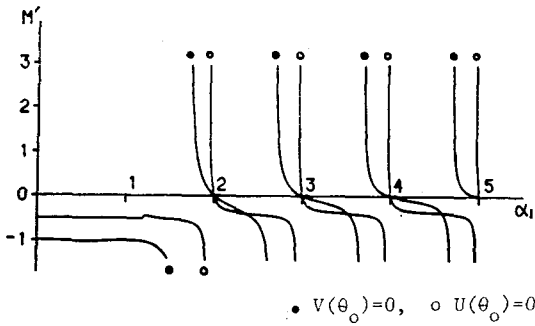


Fig. 2 Characteristic curves

모우드를 구하였다.

Fig. 2는 식 (25), (28), (31), (34), (37), (40)의 특

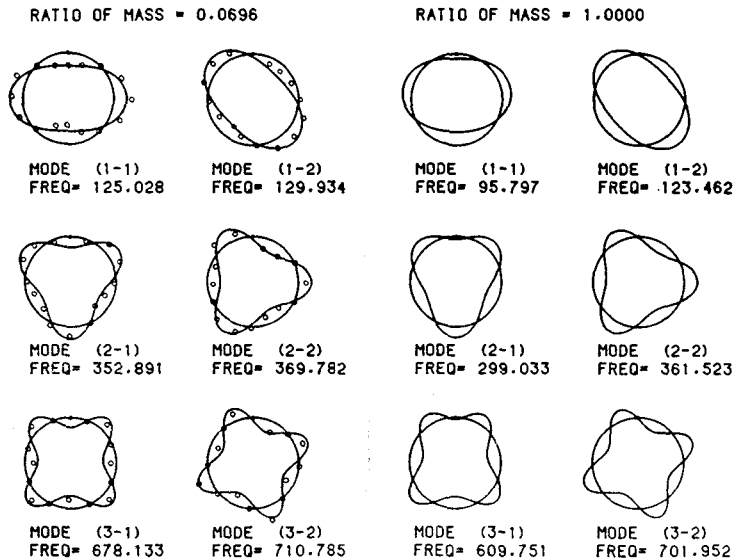


Fig. 3 Effects of mass ratio on the natural frequencies and mode shapes(— theoretical, o experimental, concentrated mass)

위에서 구한 이론해의 결과를 검토하기 위하여 Fig. 4, Table 2와 같은 원환을 제작하여 1번 점에 12.6g의 집중질량(질량비: 0.0696)을 부착하고 충격실험을 하였다.

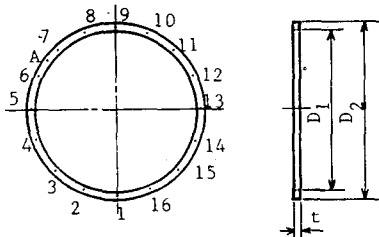


Fig. 4 Circular ring under experiment

성방정식으로부터 원환의 질량에 대한 집중질량의 비  $M' = \frac{M_0}{M_{ring}} = \frac{M}{2\pi}$ 과  $\alpha_1$ 의 관계를 나타낸 것이다.

식 (7), (11)로부터

$$\omega = \left[ \frac{EI}{mR^4} \cdot \frac{\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)^2}{\alpha_1^2 + 1} \right]^{1/2} \quad (44)$$

이 되므로 주어진  $M'$ 에 대하여  $\alpha_1$ 을 계산하고 식 (44)를 이용하여 고유진동수를 구할 수 있다. 고유모우드는 부록의 식을 이용하여 각 계수를 결정한 후  $V(\theta)$ ,  $U(\theta)$ 의 식에 대입하므로써 구하였다.

Fig. 3은 질량비  $M'$ 에 따른 고유진동수와 모우드를 나타낸다. 여기에서  $M'$ 이 음의 값을 가지는 것은 특정부분의 질량이 감소한 경우를 나타내며 물리적인 의미는 없다.

Table 2 Data of circular ring

Material	Mild steel
$D_1$	307mm
$D_2$	317mm
$t$	4.75mm
Young's moduls	$2.1 \times 10^{11}$ dyne/mm <sup>2</sup>
Mass of ring	181g

Fig. 5는 Fig. 4의 A점과 11점 사이의 전달함수이며 실험에 의한 고유모우드는 Fig. 3에 도시하였다.

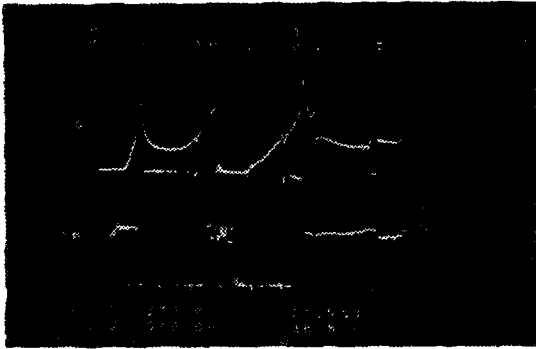


Fig. 5 Transfer function between point A and 11

Table 3 Natural frequencies from experiment and analysis

Mode	0.0696		0.0110	0.0000
	Experiment	Analysis	Analysis	Analysis
1-1	125Hz	125.0Hz	130.4Hz	131.5Hz
1-2	130Hz	129.9Hz	131.2Hz	
2-1	350Hz	352.9Hz	368.4Hz	372.0Hz
2-2	370Hz	369.8Hz	371.6Hz	
3-1	675Hz	678.1Hz	706.2Hz	713.2Hz
3-2	710Hz	710.8Hz	712.8Hz	

Table 3은 실험결과와 이론해에 의한 고유진동수를 비교한 것이며 질량비가 0.0110인 경우는 가속도계 자체의 질량(2g)만을 고려한 것이다.

#### 4. 결 토

Fig. 5에서 고유진동수의 분리현상을 볼 수 있지만 타격점과 측정점의 위치상 첫번째 고유진동수의 분리 현상은 나타나지 않고 있다.

Table 3에서 실험과 이론해에 의한 고유진동수는 약 1%의 오차범위 내에서 일치하고 있다. 그리고 2-1, 3-1 모드에서 비교적 차이가 큰 이유는 이들 모드에서 가속도계의 위치가 반경방향의 반절점과 거의 일치하고 있기 때문이다. 가속도계 자체의 질량만을 고려한 경우(질량비 : 0.0110)에도 고유진동수의 분리가 뚜렷하게 나타나고 있음에도 불구하고 실험결과가 가속도계의 질량을 무시한 이론해의 결과와 비교적 일치하고 있다.

따라서 질량차이가 상당히 큰 두 집중질량이 달린 경우에는 질량이 작은 집중질량을 무시하고 해석할 수

Table 4 Ratio of natural frequencies with respect to the mass ratio

Mass ratio	Mode		1 st		2 nd		3 rd	
	1	2	1	2	1	2	1	2
0	100	100	100	100	100	100	100	100
3/10,000	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
1/1,000	100.0	99.9	100.0	99.9	100.0	99.9	100.0	99.9
1/200	99.9	99.6	100.0	99.6	100.0	99.5	100.0	99.5
1/100	99.8	99.2	99.9	99.1	99.9	99.1	99.9	99.1
1/20	99.1	96.3	99.6	96.1	99.7	96.2	99.7	96.2
1/10	98.4	93.3	99.2	93.2	99.5	93.7	99.5	93.7
1/2	95.3	79.6	97.8	83.6	98.8	87.2	98.8	87.2
1	93.9	72.8	97.2	80.4	98.4	85.5	98.4	85.5

있으리라 생각한다.

Table 4는 질량비의 변화에 따른 고유진동수의 변화율을 계산한 것이다.

#### 5. 결 론

본 논문에서는 원환의 길이 변화가 없다는 가정 하에서 평면내 굽힘운동만을 고려하여 집중질량이 달린 균일한 원환의 자유진동을 해석하였다. 본 연구의 결과로부터 아래와 같은 결론을 얻었다.

- (1) 집중질량이 달린 경우에는 균일한 원환의 모우드 각각 2개로 분리되며 이 두 모우드의 고유진동수는 균일한 원환의 해당 고유진동수보다 모두 작아진다.
- (2) 질량비가 작은 경우에는 비트(beat) 현상이 나타나며 질량비가 증가함에 따라 비트 진동수도 증가한다.
- (3) 2개의 모우드중 하나는 집중질량이 달린 위치에서 반경방향의 반절점(원주 방향으로는 절점)이 되며 다른 하나는 그 위치에서 반경방향의 절점(원주 방향으로는 반절점)이 된다. 그런데 반경방향의 진폭이 원주방향의 진폭에 비하여 상당히 크게 되므로 전자의 경우가 후자에 비하여 집중질량의 영향을 더 크게 받아 고유진동수가 작게 된다.
- (4) 집중질량이 달린 원환에서 고유진동수들은 서로 특정한 비율을 유지하게 되는데 이 비율은 오직 질량비에 의해서만 결정된다.
- (5) 위와 같은 가정하에서는 반경방향과 원주방향의 변위가 동시에 0이 되는 절점(node)이 존재하지 않게 된다. 이것은 집중질량이 없는 경우에도 마찬가지이다.
- (6) 이 결과는 집중질량이 달린 축대칭 셀의 유한요소 근사해석에 이용될 수 있다.

## 참고문헌

- (1) 이장무, 연영하, “중형구조의 진동 특성에 관한 연구”, 법종, 제 3권, pp. 31~38, 1980
- (2) 조선휘, 이장무, 이교일, 경진태, “설계 및 가공 공정계획의 전산자동화에 관한 연구”, 대한기계학회 논문집, 제 9권 제 5호, pp. 647~654, 1985
- (3) Yung-Ha Yum, J. Ansari and Jang Moo Lee, “A Study on the Vibration of Axisymmetric Shells”, Proceedings of 2nd International Modal Analysis Conference, 1985

## 후기

본 연구는 1986년도 문교부 자유과제 학술연구 조성비의 지원으로 행하여졌으며 이에 관계자에게 감사한다.

## 부록

$$W = \frac{\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)^2}{\alpha_1^2 + 1}$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\alpha_1^2 - 2) - \left[ (\alpha_1^2 - 2)^2 - \frac{4W}{\alpha_1^2} \right]^{1/2} \right\}$$

$$\alpha_3^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\alpha_1^2 - 2) + \left[ (\alpha_1^2 - 2)^2 - \frac{4W}{\alpha_1^2} \right]^{1/2} \right\}$$

$$Q_i = 6\alpha_i^5 - 8\alpha_i^3 + 2(1-K)\alpha_i, \quad i=1, 2, 3$$

단, ①의 경우  $Q_j = 6\alpha_j^5 + 8\alpha_j^3 + 2(1-K)\alpha_j, \quad j=2, 3$

$$C_i = \frac{\alpha_i}{Q_i} \cdot 2WMV'(\theta_0)$$

$$D_i = -\frac{1}{Q_i} \cdot 2WMV(\theta_0)$$

$$a = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sqrt{W}}{\alpha_1} + (\alpha_1^2 - 2) \right]^{1/2}$$

$$b = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sqrt{W}}{\alpha_1} - (\alpha_1^2 - 2) \right]^{1/2}$$

$$T_1 = 3(a^2 - b^2) + 4(a^2 - b^2) - 12a^2b^2 + (1 - W)$$

$$T_2 = 4ab[3(a^2 - b^2) + 2]$$

$$P = -\frac{aT_1 + bT_2}{(a^2 + b^2)(T_1^2 + T_2^2)} WMV(\theta_0)$$

$$Q = -\frac{bT_1 + aT_2}{(a^2 + b^2)(T_1^2 + T_2^2)} WMV(\theta_0)$$

$$R = \frac{T_1}{T_1^2 + T_2^2} WMV'(\theta_0)$$

$$S = \frac{T_2}{T_1^2 + T_2^2} WMV'(\theta_0)$$