풋옵션과 콜옵션의 패러티(Put-Call Parity)에 관한 硏究

李 勝 雨*

目 次

Ⅰ. 序 言

옵션(option)이란 특정한 期間에 미리 결정된 行使價格(exercise price)으로 普通株를 買入 또는 賣出할 수 있는 權利를 옵션의 所有者에게 제공해 주는 條件附請求權(contingent claim)이다. 近代的인 有價證券으로서 옵션의 去來가 始作된 것은 1973年 4月에 美國의 시카고옵션去來所(Chicago Board Options Exchange)의 開場以後이다. 1977年 6月까지 옵션市場에서 단지 콜옵션을 去來하였으나, 그 이후에 풋옵션의 去來가 시작되었다. 풋옵션과 콜옵션이 동일한 基礎證券(underlying security)에 동일한 行使價格과 滿期日을 갖는다면, 投資家의 需要와 관계없이 풋옵션價格과 콜옵션價格間의 일정한 관계가 존재하기 때문에 풋옵션의 去來는 매우 重要하다.

풋옵션, 콜옵션과 基礎證券은 서로 관련이 있는 證券組合(combination of secuirities)을 구성할 수 있기 때문에 풋옵션과 콜옵션價格사이의 關係를 결정할 수 있다. 이것을 흔히 풋·콜 패러티模型(put-call parity model)이라고 한다. 풋옵션價格과 콜옵션價格이 均衡價格과 다르면, 投資家는 無危險裁定포트폴리오(riskless arbitrage portfolio)를 구성하여 無危險收益率이상의 收益을 얻을 수 있다. 풋·콜 패러티模型은 스톨(H.R. Stoll)에 의하여 개발되었으며[1], 머어튼(R.C. Merton)이 확장·수정하였다.[2]

이 논문에서는 유럽 옵션의 풋·콜 패러티와 美國 옵션의 풋·콜 패러티를 나누어 살펴 본다. 특히 配當公表時의 풋·콜 패러티, 利子率이 確實한 경우의 풋·콜 패러티, 配當과 利子率

*釜山大學校 大學院 經營學科(博士課程)

1) H.R. Stoll, "The Relationship Between Put and Call Option Prices," Journal of Finance, 24, (December 1969), pp.802~824.

2) R.C. Merton, "The Relationship Between Put and Call Option Prices: Comment," Journal of Finance, 28, (March 1973), pp.184~194.

이 確率的으로 변동하는 경우의 풋·콜 패러티 및 稅金과 去來費用을 고려한 풋·콜 패러티에 대하여 살펴 본다.

Ⅱ. 유럽 옵션의 풋·콜 패러티

먼저 理論을 展開하기 위하여 옵션市場, 社債市場 및 株式市場은 마찰이 없다고 假定한다. 즉, 去來費用(transaction cost)과 稅金이 없으며, 空賣(short sales)에 대한 제한이 없으며 證券은 無限히 分割可能하다.

그리고 Ⅳ章에서 稅金과 去來費用이 存在할 경우의 풋·콜 패러티에 대하여 살펴 볼 것이다.

1. 配當과 裁定去來

配當을 支給하는 株式에 대한 옵션價値를 決定하기 위하여 配當이 株價에 미치는 影響을 알아야 한다. 前述한 假定下에서 株價는 配當日에 配當만큼 下落한다. 즉, 配當日인 t에 支給되는 配當을 d, 株式이 配當落되기 前까지의 期間을 $t-\Delta t$, 配當落되기 前의 株式의 價格을 S라고 하면, 配當이 公表된 後의 株價는 $S-d$이다. 裁定去來機會(arbitrage opportunity)가 있다면, 配當日 前後에 株式을 去來하므로써 無危險利益(riskless profit)을 얻을 수 있다. 例를 들면, 配當에 의하여 發生한 變動株價의 現在價値가 配當보다 크다면 配當日前에 空賣를 하거나 配當日後에 株式을 즉시 買受하므로써 無危險利益을 얻을 수 있다.

이것을 式으로 나타내면 다음과 같다.

$\Delta t > 0$ 이면

$$\lim_{\Delta t \to 0} S_t + d = S_{t-\Delta t} \qquad (\text{Ⅱ}-1)$$

投資家가 $S_{t-\Delta t}-B(t-\Delta t, \Delta t)$[3]$(S_t+d)>0$ 혹은 $S_{t-\Delta t}-B(t-\Delta t, \Delta t)(S_t+d)<0$이 成立한다는 것을 확실하게 알 수 있다면 裁定去來가 발생한다. 여기서, $B(t-\Delta t, \Delta t)(S_t+d)$는 配當落株價의 現在價値와 配當의 現在價値 合이다. $t-\Delta t$時點에서 S_t에 관한 情報를 알면, 이 現在價値를 확실하게 알 수 있다. 株價는 無作爲的으로 변동하기 때문에 $\Delta t \to 0$을 제외하고 확실히 알 수 없다. 이것은 (Ⅱ-2)式을 證明하므로써 명백히 알 수 있다.

$$\underline{(S_t+d)}B(t-\Delta t, \Delta t) \leq S_{t-\Delta t} \leq \overline{(S_t+d)}B(t-\Delta t, \Delta t) \qquad (\text{Ⅱ}-2)$$

여기서,

$\underline{S_t+d}$=配當落株價와 配當의 合計中에서 最小値

$\overline{S_t+d}$=配當落株價와 配當의 合計中에서 最大値

配當日에 가까와짐에 따라 株價의 不確實性은 점점 작아지기 때문에 最小値와 最大値사이의

3) $B(t-\Delta t, \Delta t)$는 t時點에 1원을 支拂하는 $t-\Delta t$時點의 社債價格을 나타낸다.

領域, 즉 $[\underline{S_t+d}, \overline{S_t+d}]$는 單一點으로 접근하게 된다. 또한 社債價格은 1이 된다. 즉, Δt가 0에 接近함에 따라 $B(t-\Delta t, \Delta t)$가 1에 接近한다. 그러므로 (Ⅱ-1)式이 成立한다.

(Ⅱ-2)式도 裁定去來를 利用하여 證明할 수 있다. 모든 株價分布의 結果에 대한 $S_{t-\Delta t}<(S_t+d)B(t-\Delta t, \Delta t)$에서 $S_{t-\Delta t}<(\underline{S_t+d})\ B(t-\Delta t, \Delta t)$가 成立한다고 假定하고 $t-\Delta t$時點에서 다음과 같은 포트폴리오—株式의 買受, $\underline{S_t+d}$와 일치하는 金額의 債務不履行危險이 없는 社債(default-free bonds)의 賣却—를 구성한다. 投資家는 이 포트폴리오를 구성하므로써 陽의 現金흐름을 얻는다. 왜냐하면 $t-\Delta t$時點에서 $-(\underline{S_t+d})B(t-\Delta t, \Delta t)+St-\Delta t<0$이 成立하기 때문이다. 配當이 支給되는 t時點에서 포트폴리오價値는 陰이 아니다. 왜냐하면 $(S_t+d)-1(\underline{S_t+d})\geq 0$이 成立하기 때문이다. 裁定去來機會의 발생을 除去하기 때문에 (Ⅱ-2)式의 좌변이 成立한다.

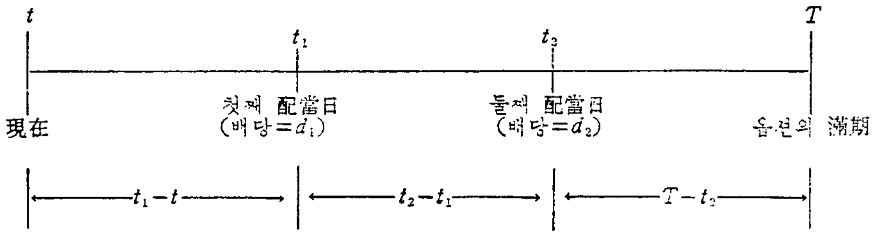
모든 株價에 대하여 $S_{t-\Delta t}>(S_t+d)\ B(t-\Delta t, \Delta t)$가 成立한다고 假定하자. 裁定去來機會를 발생시키기 위하여 株式을 賣却하고 $(\overline{S_t+d})$와 동일한 金額의 債務不履行危險이 없는 社債를 買受한다. $t-\Delta t$時點에서 포트폴리오價値, $(\overline{S_t+d})\ B(t-\Delta t, \Delta t)-S_{t-\Delta t}$는 陰의 값을 나타내기 때문에 現金흐름은 陽이다. t時點에서 포트폴리오價値인 $\overline{S_t+d}-(S_t+d)$는 陰의 값이 아니기 때문에 裁定去來를 除去하기 위하여 (Ⅱ-2)式의 우변이 성립하여야 한다.

配當日의 株價變動에 대한 많은 硏究가 있었다.[4] 이러한 硏究結果는 株價가 配當의 平均 75~85%가량 하락하며, 配當收益率(dividend yield)이 높은 株式이 낮은 株式보다 크게 하락한다고 밝히고 있다.

2. 配當公表와 풋·콜 패러티

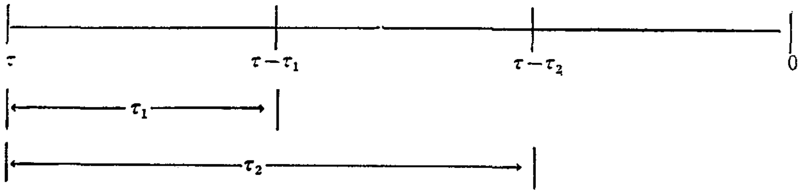
옵션의 滿期前에 配當을 두번 支給하는 株式의 풋·콜 패러티定理에 대하여 알아보자. 즉, 滿期인 T까지 t_1時點과 t_2時點에서 각각 d_1과 d_2의 配當이 支給된다. 現金흐름(cash flow)의 發生을 나타내면, 〔그림 Ⅱ-1〕과 같다.

〔그림 Ⅱ-1〕 現金흐름의 發生時期



4) J. Campbell and W. Beranek, "Stock Price Behavior on Ex-Dividend Dates," Journal of Finance, (December 1955), pp.425~429; D. Durand and A. May, "The Ex-Dividend Behavior of American Telephone and Telegraph Stocks," Journal of Finance, (March 1960), pp.19~31; A. Kalay, "The Ex-Dividend Day Behavior of Stock Price: A Re-examination of the Clientele Effect," Journal of Finance, (September 1982), pp.1059~1079.

滿期까지의 期間



여기서, $\tau=T-t$=滿期까지의 期間
τ_1=첫째 配當日까지의 期間
τ_2=둘째 配當日까지의 期間

行使價格과 滿期가 각각 K와 T인 풋·콜 패러티定理는 (Ⅱ-3)式으로 나타낼 수 있다.

$$C_t=P_t+S_t-[d_1B(t,\tau_1)+d_2B(t,\tau_2)]-KB(t,\tau) \tag{Ⅱ-3}$$

여기서,

$B(t,\tau)\equiv t+\tau=T$時點에서 1원을 支給하는 債務不履行危險이 없는 社債의 t時點에서 價格

$\tau_1\equiv t_1-t$=첫째 配當日까지의 期間

$\tau_2\equiv t_2-t$=둘째 配當日까지의 期間

만약 配當을 支給하지 않는다면 (Ⅱ-3)式은 (Ⅱ-3a)式으로 표현된다.

$$C_t=P_t+S_t-KB(t,\tau) \tag{Ⅱ-3a}$$

(Ⅱ-3)式이 成立하는지를 살펴 보기 위하여 T時點에서 해체되는 裁定포트폴리오(arbitrage portfolio)[5)]—(i) 콜옵션의 買受, (ii) 풋옵션의 賣却, (iii) 株式의 賣却, (iv) 滿期가 t_1이며, 첫째 配當額 d_1과 동일한 額面의 債務不履行危險이 없는 社債의 買受, (v) 滿期가 t_3이며, 둘째 配當額 d_2와 동일한 額面의 債務不履行危險이 없는 社債의 買受, (vi) 滿期가 T이며, 行使價格인 K와 동일한 金額의 社債의 買受—를 구성한다. 이 裁定포트폴리오로부터 발생하는 現金 흐름은 〔表Ⅱ -1〕과 같다.

〔表 Ⅱ-1〕 **裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름**

포 지 션	去來開始日 t	첫째 配當日 t_1	둘째 配當日 t_2	去來 마감일 T	
				$S_T\leq K$	$S_T>K$
콜옵션 買受	$-C_t$			0	S_T-K
풋옵션 賣却	$+P_t$			$-(K-S_T)$	0
株式賣却	$+S_t$	$-d_1$	$-d_2$	$-S_T$	$-S_T$
滿期日이 t_1인 社債買受	$-d_1B(t,\tau_1)$	$+d_1$			
滿期日이 t_2인 社債買受	$-d_2B(t,\tau_2)$		$+d_2$		
滿期日이 T인 社債買受	$-KB(t,\tau)$			$+K$	$+K$
合 計		0	0	0	0

5) 裁定포트폴리오는 ① 포트폴리오의 構成을 변동시켜도 변동시킨 富(vealth)의 合은 항상 0이 되고, ② 이 포트폴리오의 모든 위험이 0이 될 때, 당연히 收益率의 平均이 0이 되는 포트폴리오를 말한다. 具孟會, 現代財務管理, 法文社, 1986, pp.150.

t_1時點에서 株式의 空賣로 인하여 d_1의 配當을 支拂하여야 한다. 滿期가 t_1인 社債로 d_1을 얻을 수 있기 때문에 現金흐름은 0이다. 마찬가지로 t_2時點에서도 現金흐름은 0이다. 따라서 滿期에서 콜옵션, 풋옵션과 社債로부터 발생되는 現金흐름은 상쇄된다. 또한 裁定去來機會를 除去하기 위하여 t時點에서 발생되는 최소의 現金흐름은 0이어야 하기 때문에 (Ⅱ-3)式이 成立한다.

유럽 풋·콜 패러티定理로써 代替的인 證券(alternative securities)을 利用하여 콜옵션과 동일한 포트폴리오를 어떻게 구성하는 지를 설명할 수 있다. 즉, 유럽 콜옵션은 株式의 롱포지션(long position)에서 配當의 現在價値를 뺀 값인 $S_t-d_1B(t,\tau_1)-d_2B(t,\tau_2)$와 $KB(t,\tau)$만큼의 貸出과 유럽 풋옵션으로 구성되는 포트폴리오와 동일하다는 것이다. 콜옵션은 株式의 롱포지션으로 구성되기 때문에, 콜옵션의 組合에 풋옵션이 포함되는 것이외에는 株式의 특성을 갖는다. 결국 콜옵션은 貸出을 포함시킴으로써 레버리지된다.

유럽 풋옵션은 株式에 대한 保險政策(insurence policy)과 유사하다. 즉, 株價가 行使價格以下로 하락하면 行使價格으로 賣却할 수 있다. 이 政策의 프레미엄이 풋옵션의 價格이다.

3. 配當額의 變動性과 풋·콜 패러티

루빈스타인(M. Rubinstein)과 콕스(J. Cox)의 硏究[5]를 기초로 하여 配當額의 變動性과 풋·콜·패러티에 대하여 살펴보자. 먼저 配當日은 알 수 있으나, 配當額은 알 수 없다고 假定한다.[6]

t_1時點의 配當, d_1과 t_2時點의 配當, d_2가 確率分布를 이루는 것이외에는 전술한 것과 동일한 模型을 使用하며, (Ⅱ-4)式을 이용하여 서술한다.

$$\underline{d_1}\le d_1\le\overline{d_1},\quad \underline{d_2}\le d_2\le\overline{d_2} \tag{Ⅱ-4}$$

여기서, $\underline{d_1}$과 $\underline{d_2}$는 각각 t_1과 t_2時點의 最小配當이며, $\overline{d_1}$과 $\overline{d_2}$는 각각 t_1과 t_2時點의 最大配當을 나타낸다. 가장 큰 영역은 配當의 最小値가 0이고, 最大値가 각각 S_{t1}과 S_{t2}일 경우이다. 配當의 確率分布를 고려한 유럽 풋·콜 패러티定理는 다음과 같다.

$$P_t+S_t-[\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2)]-KB(t,\tau)\ge$$

$$C_t\ge P_t+S_t-[\overline{d_1}B(t,\tau_1)+\overline{d_2}B(t,\tau_2)]-KB(t,\tau) \tag{Ⅱ-5}$$

만약 配當이 確實하다면, 즉 $\underline{d_1}=d_1=\overline{d_1}$과 $\underline{d_2}=d_2=\overline{d_2}$가 성립하면 (Ⅱ-3)式과 동일하다는 것

6) M. Rubinstein, and J. Cox, Option Markets, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1978, pp. 127~163.

7) 配當日을 알 수 없을 경우에도 일반화가 가능하다. $[\overline{d}_1B(t,\tau_1)+\overline{d}_2B(t,\tau_2)]$는 옵션의 보유기간, $[t,T]$ 동안의 株式의 配當중에서 最大配當의 現價로 대체하고, $[\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2)]$는 옵션의 보유기간, $[t,T]$동안의 株式의 配當중에서 最小配當의 現價로 대체하면 가능하다.

을 알 수 있다.

不等式의 우변이 성립하는 것은 裁定포트폴리오—(i) 풋옵션의 買受, (ii) 株式의 買受, (iii) 滿期가 t_1이며, 最大配當인 $\overline{d_1}$과 동일한 額面의 社債賣却, (iv) 滿期가 t_2이며 最大配當인 $\overline{d_2}$와 동일한 額面의 社債賣却, (v) 滿期가 T이며, 行使價格이 K와 동일한 額面의 社債賣却, (vi) 콜옵션의 賣却—로부터 발생하는 現金흐름을 살펴 보면 알 수 있다. 이 裁定포트폴리오로부터 발생하는 現金흐름은 〔表 Ⅱ-2〕에 나타나 있다.

〔表 Ⅱ-2〕 裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름

포 지 션	去來開始日 t	첫째 配當日 t_1	둘째 配當日 t_2	去來 마감일 T	
				$S_T \leq K$	$S_T > K$
풋옵션 買受	$-P_t$			$+(K-S_T)$	0
株式買受	$-S_t$	$+d_1$	$+d_2$	S_T	S_T
滿期日이 t_1인 社債賣却	$+\overline{d}_1B(t,\tau_1)$	$-\overline{d}_1$			
滿期日이 t_2인 社債賣却	$+\overline{d}_2B(t,\tau_2)$		$-\overline{d}_2$		
滿期日이 T인 社債賣却	$+KB(t,\tau)$			$-K$	$-K$
콜옵션 賣却	$+C_t$			0	$-(S_T-K)$
合 計		$d_1-\overline{d}_1 \leq 0$	$d_2-\overline{d}_2 \leq 0$	0	0

〔表Ⅱ-2〕에서 나타나 있는 바와 같이 모든 狀況에서 발생하는 現金흐름은 陽의 값을 가지지 않는다. 그러므로 裁定去來를 제거하기 위하여 t時點의 現金흐름은 陰의 값을 가지지 않아야 한다. 따라서 우변이 성립하며, 마찬가지로 좌변도 성립한다.

Ⅲ. 美國 옵션의 풋·콜 패러티

美國 옵션과 유럽 옵션의 差異點은 前者는 滿期前에 옵션을 行使할 수 있지만, 後者는 滿期前에 옵션을 行使할 수 없다는 것이다. 이와 같이 美國 옵션은 滿期前에 옵션을 行使할 수 있기 때문에 美國 옵션과 유럽 옵션사이에 價格差異(differential price)가 발생한다. 물론 價格差異는 滿期前 行使權利의 價値이다. 그러나 美國 옵션의 所有者가 滿期前에 옵션을 行使하지 못하는 狀況이 발생할 수 있으며, 이 경우에는 美國 옵션과 유럽 옵션의 價格은 동일하다. 반면에 滿期前에 옵션을 行使할 수 있는 狀況에선 美國 옵션의 價格이 유럽 옵션의 價格보다 높다. 그러므로 美國옵션의 價格決定을 위하여 유럽 옵션의 價格決定模型을 사용하면 부정확한 結果를 발생시킬수 있다.

1. 美國 콜옵션의 滿期前 行使

美國 콜옵션에 대한 裁定去來制約(arbitrage restrictions)을 살펴 보기로 하자.

〈制約 1〉

$$S_t \geq C_t \geq \max \begin{cases} 0 \\ S_t - K \\ S_t - KB(t, \tau_1) \\ S_t - \bar{d}_1(t, \tau_1) - KB(t, \tau_2) \\ S_t - \bar{d}_1 B(t, \tau_1) - \bar{d}_2 B(t, \tau_2) - KB(t, \tau) \end{cases} \qquad (\text{III-1})$$

〈制約 1〉은 美國 콜옵션의 價値領域을 나타낸다. 즉, 美國 콜옵션價値의 上限은 株價보다 항상 작거나 같다는 것이다. 왜냐하면 콜옵션은 滿期前이나 滿期日에 0보다 크거나 같은 行使價格, K로 株式을 買受할 수 있는 權利를 나타내는 반면에, 株式 그 자체는 行使價格이 없고 滿期日도 없기 때문이다.

美國 콜옵션價値의 下限은 〈制約 1〉의 우변중에서 가장 큰 값이다. 각 項의 값은 投資家가 선택하는 投資戰略(investment strategies)의 美國 콜옵션價値를 나타낸다. 각 投資戰略은 다음과 같다.

첫째 戰略은 콜옵션을 抛棄하는 것이다. 이 戰略으로부터 발생하는 未來의 現金흐름은 0이기 때문에 價値도 0이다.

둘째 戰略은 t時點에서 즉시, 콜옵션을 行使하는 것이다. 그러므로 콜옵션價値는 적어도 內在的 價値(intrinsic value)인 $S_t - K$를 갖는다.

세째 戰略은 $t_1 - \Delta t$, 즉 첫째 配當日 바로 전에 콜옵션을 行使하는 것이다. 콜옵션을 行使하면, t_1時點의 株價인 S_{t1}을 받고, 行使價格인 K를 支給한다. 이 現金흐름의 現在價値는 $S_t - KB(t, \tau_1)$이다.

네째 戰略은 콜옵션을 $t_2 - \Delta t$, 즉 둘째 配當日前에 行使하는 것이다. 콜옵션을 行使하면, 投資家는 t_2時點의 株價인 S_{t2}를 받고, 行使價格인 K를 支給한다. 그리고 t_1時點에서의 配當인 $\bar{d}_1$을 잃는다. t_2時點에서 現金흐름과 $\bar{d}_1$의 損失에 대한 現價는 $S_t - \bar{d}_1 B(t, \tau_1) - KB(t, \tau_2)$이다. 그러므로 t時點의 콜옵션價値는 $S_t - \bar{d}_1 B(t, \tau_1) - KB(t, \tau_2)$보다 크거나 같다.

다섯째 戰略은 滿期日에 콜옵션을 行使하는 것이다. T時點의 株價인 S_T를 얻고, 行使價格인 K를 支給하며, 配當인 $\bar{d}_1$과 $\bar{d}_2$를 잃는다. t時點에서 이 戰略의 價値는 $S_t - \bar{d}_1 B(t, \tau_1) - \bar{d}_2 B(t, \tau_2) - KB(t, \tau)$이다. 따라서 t時點에서 콜옵션의 價値는 이 값보다 크거나 같다.

첫째 配當日前에 콜옵션을 行使할 경우에 콜옵션價値가 $S_t - K(t, \tau_1)$보다 크거나 같은 지를 살펴 보기 위하여 裁定포트폴리오—(i) 콜옵션의 買受, (ii) 株式의 賣却, (iii) 滿期가 t_1이며 行使價格이 K인 社債의 買受—를 구성한다. 어떤 경우라도 滿期 바로 前인 $t - \Delta t$時點까지 콜옵션을 行使하지 않는다. $t - \Delta t$時點에서의 株價를 S^-라고 하면, 이 포트폴리오로부터 발생하는 現金흐름은 〔表 III-1〕과 같다.

〔表 Ⅲ-1〕 裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름

포 지 션	去 來 開 始	配當日 바로前에 去來마감	
		$S^{-} \leq K$	$S^{-} > K$
콜옵션 買受	$-C_t$	0	$S^{-}-K$
株式 賣却	$+S_t$	$-S^{-}$	$-S^{-}$
社債 買受	$-KB(t, \tau_1)$	$+K$	$+K$
合 計		$K-S^{-} \geq 0$	0

* S^{-}는 첫째 배당일 바로前의 株價를 나타낸다.

각 포지션의 포트폴리오價値는 陰이 아니므로, 裁定去來機會를 除去하기 위하여 t時點의 포트폴리오의 現金흐름은 陰이 아니어야 한다.

美國 콜옵션을 滿期前에 行使할 가능성이 있으며, 〈制約 2〉는 滿期前에 콜옵션을 행사할 가능성에 대한 條件을 提示한다.

〈制約 2〉

만약 $\overline{d_1} > K$ 혹은 $\overline{d_2} > K$가 성립하면, 配當日前에 콜옵션을 行使할 可能性이 있다.

〈制約 2〉가 成立하기 위하여 $C_{t_1} < S_{t1} + d_1 - K$가 成立할 確率이 陽이어야 한다. 〈制約 1〉에 의하여 $S_{t1} \geq C_{t1}$ 혹은 $S_{t1-\Delta t} - d_1 > C_{t1}$이 成立한다. $\overline{d_1} > K$이기 때문에 $d_1 > K$일 확률이 陽이다. 그러므로 $S_{t1-\Delta t} - d_1 < S_{t1-\Delta t} - K$가 成立할 確率은 陽이기 때문에 $S_{t1-\Delta t} - K > C_{t_1}$가 成立할 確率은 陽이다.

〈制約 2〉는 콜옵션의 滿期前 行使의 可能性이 있고, 配當의 行使價格 보다 크다면, 株式配當前의 時點이 美國 콜옵션을 行使할 適正時期임을 의미한다.

〈制約 3〉

株式의 配當이 있기 前에 滿期前 行使가 이루어져야 한다.

둘째 配當日인 t_2와 옵션의 滿期인 T사이에 존재하는 t^*時點에서 콜옵션을 行使하면 投資家가 얻을 수 있는 價値는 t^*時點의 株價인 S_t^*에서 行使價格인 K를 차감한 $S_t^* - K$이다. $\overline{d_1} \equiv \overline{d_2} \equiv 0, \tau_1 = \tau_2,\ \tau = T - t^*$를 〈制約 1〉에 代入하면 $C_t^* \geq S_t^* - KB(t^*, T-t^*)$가 성립한다. t^*보다 T가 크기 때문에 $B(t^*, T-t^*)$는 1보다 작다. 따라서 $S_t^* - KB(t^*, T-t^*)$는 $S_t^* - K$보다 크기 때문에 C_t^*는 $S_t^* - K$보다 크다. 그러므로 T時點以前인 同時에 t_2時點以後에는 콜옵션을 行使하지 않는 것이 有利하다.

또한 첫째 配當日과 둘째 配當日사이에 있는 t^*時點에서 콜옵션을 行使하지 않는 것이 有利하다는 것은 裁定포트폴리오—(i) 콜옵션의 買受, (ii) 株式의 賣却, (iii) 滿期가 t_2이며, 行使價格, K와 일치하는 額面의 社債買受—로부터 발생하는 現金흐름을 살펴 보면 알 수 있다. 이 포트폴리오는 둘째 配當日前까지 유지되며, 이 포트폴리오로부터 발생하는 現金흐름은 〔表Ⅲ-2〕와 같다.

이 포트폴리오戰略은 모든 狀況에서 現金흐름이 0보다 크거나 같기 때문에 t^*時點에서 現金

〔表 Ⅲ-2〕 裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름

포 지 션	t^*에서 去來開始	둘째 配當日 바로前에 去來마감	
		$S^- \leq K$	$S^- \geq K$
콜옵션 買受	$-C_t{}^*$	0	$+(S^- - K)$
株式 賣却	$+S_t{}^*$	$-S^-$	$-S^-$
社債 買受	$-KB(t^*, t_2 - t^*)$	$+K$	$+K$
合 計		$K - S^- \geq 0$	0

* S^-는 둘째 배당일 바로前의 株價를 나타낸다.

흐름은 裁定去來를 회피하기 위하여 0보다 크거나 같아야 한다. $B(t^*, t_2 - t^*)$는 1보다 작기 때문에 $C_t{}^* \geq S_t{}^* - KB(t^*, t_2 - t^*) > S_t{}^* - K$가 成立한다. 따라서 配當日사이에 콜옵션을 行使하지 않는 것이 有利하다.

〈制約 4〉

$$K[1 - B(t_1, T - t_1)] > \overline{d_1}, \quad K[1 - B(t_2, T - t_2)] > \overline{d_2} \qquad (\text{Ⅲ-2})$$

(Ⅲ-2)式이 成立하면 美國 콜옵션을 滿期前에 行使하지 않는 것이 有利하다.

이 條件이 성립하면 유럽 콜옵션과 풋옵션價値는 동일하다. 배당을 알 수 있다면, $d_1 = \overline{d_1} = \underline{d_1}$과 $d_2 = \overline{d_2} = \underline{d_2}$이기 때문에 (Ⅲ-2)式을 사용할 수 있다. 이와 같이 옵션의 행사여부는 配當에 의하여 決定된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 配當의 影響을 고려하여 滿期前 行使의 可能性을 살펴야 한다.

〈制約 3〉이 성립하면 配當日, t_1과 t_2 바로 전에 행사하여야 한다. 첫째 配當日 바로 前인 $t_1 - \Delta t$時點의 株價를 S^-이라고 하면, $C_{t1} > S^- - K$가 成立한다는 것을 증명하여야 한다. 配當落 株價인 S_{t1}은 $t_1 - \Delta t$時點의 株價인 S^-에서 첫째 配當인 d_1을 차감한 값이다. (Ⅲ-2)式으로부터 $K > KB(t_1, T - t_1) + \overline{d_1}$이 成立하며, 양변에 S^-을 빼고 부호를 바꾸면 $S^- - K < S^- - KB(t_1, T - t_1) - \overline{d_1}$이다. 그리고 $S^- - d_1 - KB(t_1, T - t_1) \geq S^- - \overline{d_1} - KB(t_1, T - t_1)$이 成立하므로 C_{t1}은 $S^- - K$보다 크다. 이와 같이 (Ⅲ-2)式이 성립하면 첫째 配當日 바로 전에 옵션을 행사하는 것은 적절하지 못하다.

〈制約 5〉

配當을 支給하지 않는 株式에 대한 美國 콜옵션은 滿期前에 行使하지 않아야 한다.

만약 配當을 支給하지 않는다면, $\overline{d_1} = \overline{d_2} = 0$이므로, $K[1 - B(t_1, T - t_1)] > 0$과 $K[1 - B(t_2, T - t_2)] > 0$이 成立하기 때문에 滿期前에 콜옵션을 行使하지 않는 것이 有利하다.

2. 美國 풋옵션의 滿期前 行使

美國 풋옵션에 의하여 만족되는 裁定去來制約을 살펴 보면, 美國 콜옵션과는 달리 配當이 支給되지 않더라도 풋옵션을 滿期前에 行使하는 것이 有利하다는 것을 알 수 있다.

〈制約 6〉

$$K \geq P_t \geq \max \begin{cases} 0, \\ K-S_t, \\ KB(t,\tau_1)-S_t \\ KB(t,\tau_2)-S_t+\underline{d_1}B(t,\tau_1), \\ KB(t,\tau)-S_t+\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2) \end{cases} \qquad (\text{Ⅲ-3})$$

(Ⅲ-3)式은 (Ⅲ-1)으로 표시된 美國 콜옵션의 價値領域과 비슷하다. 풋옵션의 價値의 上限은 株價가 0일 경우의 풋옵션의 價値이며, 行使價格보다 작거나 같다.

美國 풋옵션의 下限은 5個項으로 구성되며, 그 중에서 가장 큰 값이다. 그리고 각각 投資戰略을 나타낸다.

첫째 戰略은 풋옵션을 抛棄하는 것이다. 이 戰略은 價値가 0이므로 풋옵션價値는 0보다 크다.

둘째 戰略은 t時點에 즉시 풋옵션을 行使하는 것이다. 이 戰略에서 풋옵션은 적어도 內在的 價値, $K-S_t$를 갖는다.

세째 戰略은 첫째 配當日 바로 전에 풋옵션을 行使하는 것이다. 이 戰略으로부터 발생하는 現金흐름의 現在價値는 $KB(t_1\tau_1)-S_t$이다.

네째 戰略은 둘째 配當日 바로 전에 풋옵션을 行使하는 것이다. 이 戰略으로부터 발생하는 現金흐름의 現在價値는 적어도 $KB(t,\tau_2)-\{S_t-\underline{d_1}B(t,\tau_1)\}$보다 크다. 왜냐하면 t_1時點에서 最小配當, $\underline{d_1}$을 받기 때문이다.

다섯째 戰略은 滿期에 풋옵션을 行使하는 것이다. 이 戰略은 $KB(t,\tau)-S_t+\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2)$의 現在價値를 갖는다.

세째 戰略인 $P_t \geq KB(t,\tau_1)-S_t$가 成立하는지를 알기 위하여 裁定포트폴리오—(i) 풋옵션의 買受, (ii) 株式의 買受, (iii) 滿期가 t_1이며, 行使價格인 K와 일치하는 額面의 社債의 賣却—를 구성한다. 이 裁定포트폴리오로부터 발생하는 現金흐름은 〔表Ⅲ-3〕과 같다.

〔表 Ⅲ-3〕 裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름

포 지 션	去 來 開 始	첫째 配當日 바로前에 去來마감	
		$S^- < K$	$S^- \geq K$
풋옵션 買受	$-P_t$	$K-S^-$	0
社債 賣却	$+KB(t,\tau_1)$	$-K$	$-K$
株式 買受	$-S_t$	S^-	S^-
合 計		0	$S^- - K \geq 0$

* S^-는 첫째 配當日 바로 前의 株價를 나타낸다.

$t_1-\Delta t$時點의 株價는 S^-이다. 각 狀況의 現金흐름은 陰이 아니므로, 裁定去來機會를 除去하기 위하여 t時點의 現金흐름은 0보다 작거나 같아야 한다. 즉, $-P_t+KB(t,\tau_1)-S_t \leq 0$이 成立하여야 한다.

美國 콜옵션과는 달리 配當日사이에 풋옵션을 行使하는 것이 有利할 수도 있다. t時點의 株價가 0이라면, 投資家가 즉시 풋옵션을 行使하므로써 行使價格, K와 일치하는 풋옵션의 最大價值를 얻는다. 投資家가 t時點以後에 풋옵션을 행사하는 것이 有利하다.

〈制約 7〉

$$
\left.\begin{aligned}
&K[1-B(t,\tau)]\leq \underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2), \quad t\leq t_1\\
&K[1-B(t,\tau)]\leq \underline{d_2}B(t,\tau_2), \quad t_1<t\leq t_2=T
\end{aligned}\right. \qquad (\text{Ⅲ-4})
$$

둘째 配當日인 t_2가 풋옵션의 滿期와 일치하고, (Ⅲ-4)式이 成立하면 美國 풋옵션은 滿期前에 결코 行使되지 않는다.

(Ⅲ-4)式으로부터 양변에 S_t를 빼면 다음과 같다.

$$K-S_t<-S_t+KB(t,\tau)+\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2), \quad t\leq t_1 \qquad (\text{Ⅲ-5})$$

$$K-S_t<-S_t+KB(t,\tau)+\underline{d_2}B(t,\tau_2), \quad t_1<t\leq t_2=T \qquad (\text{Ⅲ-6})$$

(Ⅲ-4)式의 假定下에서 (Ⅲ-5)式과 (Ⅲ-6)式의 좌변은 풋옵션을 즉시 行使할 경우의 풋옵션價值이며, 우변은 滿期에 풋옵션을 行使할 경우의 풋옵션價值이다. 만약 둘째 配當日인 t_2가 滿期, T보다 작다면 $t>t_2$에 대하여 (Ⅲ-5)式과 (Ⅲ-6)式으로부터 $K[1-B(t,\tau)]<0$이 成立하지만, K는 $KB(t,\tau)$보다 크기 때문에 이 狀況은 존재할 수 없다. 그러므로 滿期前에 풋옵션을 行使하지 않는다.

3. 確實한 利子率과 풋·콜 패리티

利子率을 確實하게 알 수 있는 경우에는 利子率이 確率的으로 變動하는 경우의 풋옵션價格과 관련한 콜옵션價格에 대한 領域을 축소시킬 수 있다. 無危險利子率인 i는 옵션의 滿期까지 一定하다고 假定한다. 그러므로 옵션의 滿期에 1원을 支給하는 社債의 t時點에서의 價格은 $B(t,\tau)=e^{-i\tau}$이다.

t時點에서 계산된 t^*에서 만기까지에 적용가능한 利子率인 先物利子率(forward interest), $B(t,t^*-t)/B(t,\tau)=e^{+r(T-t^*)}$이 未來現物利子率(future spot interest interest rate), $1/B(t^*,T-t^*)=e^{+r(T-t^*)}$와 동일하다는 것이 확실한 利子率의 중요한 特性이다. 그러므로 長期社債에 投資하는 것과 비교하여 短期社債에 대한 再投資危險이 없다.

이 假定下에서 美國 콜옵션과 풋옵션價格間의 關係는 다음과 같다.

$$P_t+S_t-L\geq C_t\geq P_t+S_t-\overline{d_1}B(t,\tau_1)-\overline{d_2}B(t,\tau_2)-K \qquad (\text{Ⅲ-7})$$

여기서,

$$L=\min\{[KB(t,\tau)+\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2)],\ [KB(t,\tau_2)+\underline{d_1}B(t,\tau_1)],KB(t,\tau_1)\}$$

만약 株式의 配當이 없다면, (Ⅲ-7)式은 다음 節에서 설명할 (Ⅲ-8a)式과 동일하다는 것을 알 수 있다.

(Ⅲ-7)式은 전술한 制約에 일치하는 美國 콜옵션의 滿期前의 行使를 說明한다. 옵션의 空賣者(short seller of option)는 옵션의 買受者가 가장 적절하게 의사결정할 때에 가장 큰 負擔(obligation)을 갖게 된다. 따라서 滿期 바로 前과 滿期에 콜옵션을 行使하는 것을 고려하여야 한다.

(Ⅲ-7)式과 (Ⅲ-8a)式을 비교하여 보면, $t_1-\Delta t, t_2-\Delta t$와 T時點에서 콜옵션의 行使를 고려하기 때문에 (Ⅲ-7)式의 좌변이 풋옵션價格과 株價에서 차감한 項이 복잡하다. L은 콜옵션을 行使하는 3가지 時點에서 발생하는 現金흐름의 現在價値의 最小値이다. 그리고 株式의 配當이 이루어질 경우에 (Ⅲ-7)式의 좌변은 (Ⅲ-8)式보다 작아진다.

$P_t+S_t-L-C_t\geq 0$이 성립하는 지를 살펴 보기 위하여 裁定포트폴리오—(i) 풋옵션의 買受, (ii) 株式의 買受, (iii) 滿期가 T이며, L과 일치하는 額面의 社債賣却, (iv) 콜옵션의 賣却—를 구성한다. 콜옵션이 賣却되었기 때문에 滿期前에 콜옵션이 行使될 수 있다. 콜옵션의 買受者가 콜옵션을 적절하게 行使한다면, 〈制約 3〉으로부터 配當日 바로 前과 滿期日에 行使한다. 콜옵션의 買受者가 다른 時點에서 콜옵션을 行使한다면, 콜옵션의 賣却者는 적절한 時點에서 콜옵션의 買入者가 콜옵션을 行使할 때보다 많은 利益을 얻을 수 있다.

3段階로 나누어 (Ⅲ-7)式을 증명하면, 다음과 같다.

첫째 段階로 滿期日에서 콜옵션을 행사한다고 가정한다.[8] 滿期日에서 L과 일치하는 額面의 社債價値는 다음과 같은 領域을 갖는다.

$$L/B(t,\tau)\leq K+\underline{d_1}\frac{B(t,\tau_1)}{B(t,\tau)}+d_2\frac{B(t,\tau_2)}{B(t,\tau)}$$

일정한 利子率下에서 $B(t,\tau_1)/B(t,\tau)=1/B(t_1,T-t_1)$은 다음 式이 成立한다는 것을 의미한다.

$$L/B(t,\tau)\leq K+\underline{d_1}/B(t_1,T-t_1)+\underline{d_2}/B(t_2,T-t_2)$$

上限은 行使價格에 滿期日까지 발생한 配當을 가산한 값이다. 現金흐름은 〔表Ⅲ-4〕에 표시되어 있다.

〔表 Ⅲ-4〕 옵션을 滿期까지 所有할 경우에 裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름

포 지 션	t에서 去來開始	去 來 마 감	
		$S_T\leq K$	$S_T>K$
풋옵션의 買受	$-P_t$	$K-S_T$	0
株式의 買受	$-S_t$	S_T	S_T
配 當		$d_1/B(t_1,T-t_1)$ $+d_2/B(t_2,T-t_2)$	$d_1/B(t_1,T-t_1)$ $+d_2/B(t_2,T-t_2)$
額面L의 社債賣却	L	$-L/B(t,\tau)$	$-L/B(t,\tau)$
콜옵션의 賣却	C_t	0	$-(S_T-K)$
合 計		$-L/B(t,\tau)+K+d_1/B$ $(t_1,T-t_1)+d_2/B$ $(t_2,T-t_2)\geq 0$	$-L/B(t,\tau)+K+d_1/B$ $(t_1,T-t_1)+d_2/B$ $(t_2,T-t_2)\geq 0$

8) 美國 옵션을 滿期까지 保有한다면, 유럽 옵션으로 취급할 수 있다.

둘째 段階는 둘째 配當日에 콜옵션을 行使하는 것이다. 이 경우에는 L과 일치하는 額面의 社債는 t_2時點에서 다음과 같은 價値領域을 갖는다.

$$L/B(t,\tau_2)\leq K+d_1/B(t_1,t_2-t_1)$$

現金흐름은 〔表Ⅲ-5〕에 나타나 있다.

〔表 Ⅲ-5〕　　t_1에서 콜옵션을 행사할 경우의 포트폴리오의 現金흐름

포 지 션	t時點의 去來	t_1	
		$S_{t_1}\leq K$	$S_{t_1}>K$
풋옵션 買受	$-P_t$	$K-S_{t_1}$	0
株式 買受	$-S_t$	S_{t_1}	S_{t_1}
配　當		0	
額面 L의 社債賣却	L	$-L/B(t,\tau_1)$	$-L/B(t,\tau_1)$
콜옵션 賣却	C_t	0	$-(S_{t_1}-K)$
合　計		$K-L/B(t,\tau_1)\geq 0$	$K-L/B(t,\tau_1)\geq 0$

세째 段階로 첫째 配當日에서 콜옵션을 行使하는 것이다. t_1時點에서 L과 일치하는 額面의 社債價値領域은 $L/B(t,\tau_1)\leq K$이며, 포트폴리오로부터 발생하는 現金흐름은 다음과 같다.

〔表 Ⅲ-6〕　　t_2에서 콜옵션을 행사할 경우의 포트폴리오의 現金흐름

포 지 션	t時點의 去來	t_2	
		$S_{t_2}\leq K$	$S_{t_2}>K$
풋옵션 買受	$-P_t$	$K-S_{t_2}$	0
株式 買受	$-S_t$	S_{t_2}	S_{t_2}
配　當		$\underline{d_1}/B(t_1,t_2-t_1)$	$\underline{d_1}/B(t_1,t_2-t_1)$
額面 L의 社債賣却	L	$-L/B(t,\tau_2)$	$-L/B(t,\tau_2)$
콜옵션 賣却	C_t	0	$-(S_{t_2}-K)$
合　計		$-L/B(t,\tau_2)+\underline{d_1}/B(t_1,t_2-t_1)+K\geq 0$	$-L/B(t,\tau_2)+K+\underline{d_1}/B(t_1,t_2-t_1)\geq 0$

3가지 段階에서 살펴 본 現金흐름은 裁定去來機會가 除去되도록 하기 위하여 각각 陽이 아니어야 하므로, 각 不等式이 成立한다.

4. 確率的 利子率과 풋·콜 패러티

去來開始日과 滿期間에 利子率이 確率的으로 變化하면, 美國 콜옵션과 풋옵션의 價格關係는 (Ⅲ-8a)式으로 나타난다.[9)]

$$P_t+S_t-KB(t,\tau)\geq C_t\geq P_t+S_t-\bar{d_1}B(t,\tau_1)-\bar{d_2}B(t,\tau_2)-K \qquad (\text{Ⅲ-8a})$$

株式이 配當을 支給하지 않으면 풋·콜 패러티 定理는 (Ⅲ-8b)式으로 표시된다.

9) 실제 陰(－)의 利子率은 存在하지 않기 때문에 陰의 利子率은 排除한다. 즉, $B(t,\tau)\leq 1$은 배제한다.

$$P_t+S_t-KB(t,\tau)\geq C_t\geq P_t+S_t-K \qquad (\text{Ⅲ-8b})$$

이 定理는 (Ⅱ-5)式과 유사하다. 不等式의 좌변에 配當의 現價를 나타내는 $\underline{d_1}B(t,\tau_1)+\underline{d_2}B(t,\tau_2)$項이 없는 것이 다르다. 이것은 콜옵션을 配當日前에 행사하여 配當을 받았다는 것을 의미한다. 또한 (Ⅲ-8)式의 우변의 K가 $KB(t,\tau)$로 대체되었다. 이 사실 또한 풋옵션을 만기전에 행사하였다는 것을 의미한다. 裁定포트폴리오가 옵션의 賣却과 社債를 포함하기 때문에 (Ⅲ-8a)式보다 더욱 확실한 領域을 형성하기 어렵다. 利子率이 변화하고 옵션을 언제라도 行使할 수 있기 때문에, 옵션行使時點에서 社債포지션(bond position)의 정확한 價值를 알 수 없다.

裁定포트폴리오—(i) 풋옵션의 買受, (ii) 株式의 買受, (iii) 滿期가 T이며, 行使價格인 K와 일치하는 社債의 賣却, (iv) 콜옵션을 賣却하고 풋포지션(put position)을 滿期까지 維持—를 구성하면 (Ⅲ-8a)式의 좌변은 성립한다는 것을 알 수 있다. 콜옵션이 행사된다면 裁定포트폴리오에 포함된 株式을 콜옵션의 行使者에게 전달한다. 〔表Ⅲ-7〕는 각 狀況下의 現金흐름을 나타낸다.

〔表 Ⅲ-7〕 **裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름**

포 지 션	t에서 去來開始	$t_1-\Delta t$에서 콜옵션의 行使	t_1에서 콜옵션의 未行使	$t_2-\Delta t$에서 콜옵션의 行使	t_2에서 콜옵션의 未行使	T 이전에 콜옵션의 行使		T 이전에 콜옵션의未行使	
						$S_T\leq K$	$S_T>K$	$S_T\leq K$	$S_T>K$
풋옵션 買入	$-P_t$					$K-S_T$	0	$K-S_T$	0
株式 買入	$-S_t$	$S_{t_1-\Delta t}$		$S_{t_2-\Delta t}$				S_T	S_T
配 當			d_1		d_2				
額面K의 社債賣却	$+KB(t,\tau)$	$-KB(t_1-\Delta t,$ $T-t_1+\Delta t)$		$-KB(t_2-\Delta t,$ $T-t_2+\Delta t)$				$-K$	$-K$
콜옵션 賣却	$+C_t$	$-(S_{t_1-\Delta t}-K)$		$-(S_{t_2-\Delta t}-K)$				0	$-(S_T-K)$
合 計		$K[1-B(t_1-\Delta t,$ $T-t_1+\Delta t)]\geq 0$	$d_1\geq 0$	$K[1-B(t_2-\Delta t,$ $T-t_2+\Delta t)]\geq 0$	$d_2\geq 0$	$K-S_T\geq 0$	0	0	0

콜옵션의 所有者는 첫째 配當日의 바로 前, 둘째 配當日 바로 前과 滿期에서만 콜옵션을 行使한다고 假定한다. 그렇지 않다면 옵션買受者(option buyer)는 投資價值를 最大化시키지 못하기 때문에 裁定포트폴리오는 옵션의 行使時에 陽의 現金흐름을 발생시킨다.

裁定去來機會를 除去하기 위하여 t時點에서 포트폴리오의 現金흐름은 陽이 아니어야 하기 때문에 (Ⅲ-8a)式의 좌변은 成立한다.

(Ⅲ-8a)式의 우변, $C_t\geq P_t+S_t-\overline{d_1}B(t,\tau)-\overline{d_2}B(t,\tau_2-K$가 성립하는 지를 살펴 보기 위하여 포트폴리오—(i) 滿期까지 行使하지 않는 콜옵션의 買受, (ii) 풋옵션의 賣却, (iii) 株式의 賣却, (iv) 滿期가 t_1이며, 첫째 配當의 最大値인 $\overline{d_1}$과 일치하는 額面의 社債의 買受, (v) 滿期가 t_2이며, 둘째 配當의 最大値인 $\overline{d_2}$와 일치하는 額面의 社債買受, (vi) 滿期가 T이며, 行使價格인 K의 現價와 일치하는 額面의 社債를 買受. —를 구성한다. 이 포트폴리오로부터 발생하는 現金흐름은 다음과 같다.

〔表 Ⅲ-8〕 裁定포트폴리오로부터 發生되는 現金흐름

포 지 션	t에서 去來開始	$t<t^*\leq T$ t^*에서 풋옵션의 行使	t_1에서 풋옵션의 未行使	t_1에서 풋옵션의 行使	t_2에서 풋옵션의 未行使	t_2에서 풋옵션의 行使	T에서 풋옵션의 行使 $S_T\leq K$	T에서 풋옵션의 行使 $S_T>K$	T에서 풋옵션의 未行使 $S_T\leq K$	T에서 풋옵션의 未行使 $S_T>K$
콜옵션 買入	$-C_t$						0	S_T-K	0	S_T-K
풋옵션 賣却	$+P_t$	$-(K-S_{t^*})$							$-(K-S_T)$	0
株式 賣却	$+S_t$	$-S_{t^*}$							$-S_T$	$-S_T$
配 當			$-d_1$		$-d_2$					
額面d_1의 社債買入	$-d_1B(t,\tau_1)$		$+\overline{d_1}$	$+\overline{d_1}$						
額面d_2의 社債買入	$-d_2B(t,\tau_2)$				$\overline{d_2}$	$\overline{d_2}$				
額面$K/B(t,\tau)$의 社債買入	$-K$	$+K\dfrac{B(t^*,T-t^*)}{B(t,\tau)}$							$\dfrac{K}{B(t,\tau)}$	$\dfrac{K}{B(t,\tau)}$
合 計		$K\left(\dfrac{B(t^*,T-t^*)}{B(t,\tau)}-1\right)\geq 0$	$\overline{d_1}-d_1\geq 0$	$d_1\geq 0$	$\overline{d_2}-d_2\geq 0$	$\overline{d_2}\geq 0$	0	$S_T-K\geq 0$	$\underset{>0}{-K}\left(1-\dfrac{1}{B(t,\tau)}\right)$	$\underset{>0}{-K}\left(1-\dfrac{1}{B(t,\tau)}\right)$

풋옵션은 滿期前에 언제라도 投資家에게 有利한 時點에서 行使될 수 있기 때문에 특정의 배당일뿐만 아니라 임의의 행사시점을 고려하여야 한다. 그러나 모든 狀況에서 現金흐름은 陰이 아니기 때문에 裁定去來機會를 제거하기 위하여 t時點에서 現金흐름은 陽이 아니어야 한다. 따라서 (Ⅲ-8a)式이 성립한다.

〔表Ⅲ-9〕는 以上에서 살펴 본 풋·콜 패러티 定理를 要約한 것이다[10]. 條件이 一般化될수록 領域의 범위는 증가한다는 것을 알 수 있다. 예를 들면, 利子率이 確率的으로 變動하면, 利子率이 一定할 경우보다 領域이 增加한다.

〔表 Ⅲ-9〕 풋·콜 패러티 定理의 構造

		配當이 確率的인 境遇	配當이 確實한 境遇	配當이 없는 境遇
美國 옵션	利子率이 確率的인 境遇	$P_t+S_t-KB(t,\tau) \geq C_t \geq P_t+S_t-\bar{d}_1B(t,\tau_1)-\bar{d}_2B(t,\tau_2)-K$	$P_t+S_t-KB(t,\tau) \geq C_t \geq P_t+S_t-d_1B(t,\tau_1)-d_2B(t,\tau_2)-K$	$P_t+S_t-KB(t,\tau) \geq C_t \geq P_t+S_t-K$
	利子率이 確實한 境遇	$P_t+S_t-L \geq C_t \geq P_t+S_t-\bar{d}_1B(t,\tau_1)-\bar{d}_2B(t,\tau_2)-K$ 여기서, $L=\min\{[KB(t,\tau)+\underline{d}_1B(t,\tau_1)+\underline{d}_2B(t,\tau_2)],$ $[KB(t,\tau_2)+\underline{d}_1B(t,\tau_1)],$ $KB(t,\tau_1)\}$	$P_t+S_t-L \geq C_t \geq P_t+S_t-d_1B(t,\tau_1)-d_2B(t,\tau_2)-K$ 여기서, $L=\min\{[KB(t,\tau)+d_1B(t,\tau_1)+d_2B(t,\tau_2)],$ $[KB(t,\tau_2)+d_1B(t,\tau_1)],$ $KB(t,\tau_1)\}$	$P_t+S_t-KB(t,\tau) \geq C_t \geq P_t+S_t-K$
유럽옵션		$P_t+S_t-[\underline{d}_1B(t,\tau_1)+\underline{d}_2B(t,\tau_2)]-KB(t,\tau) \geq C_t \geq P_t+S_t-[\bar{d}_1B(t,\tau_1)+\bar{d}_2B(t,\tau_2)]-KB(t,\tau)$	$P_t+S_t-[d_1B(t,\tau_1)+d_2B(t,\tau_2)]-KB(t,\tau)=C_t$	$P_t+S_t-KB(t,\tau)=C_t$

Ⅳ. 稅金과 去來費用을 고려한 풋·콜 패러티

1. 稅金을 고려한 풋·콜 패러티

옵션에 稅金이 부과되고, 풋옵션과 콜옵션이 만기전에 行使可能性이 있다면 콜옵션과 풋옵션 및 株式으로 구성되는 포트폴리오는 無危險헷지(riskless hedge)가 아니다. 그러나 이것을 가능한 최악의 成果(worst possible outcome)의 領域을 구하기 위하여 사용할 수 있다. 未來에 不確實한 현금흐름(uncertain cash flow)을 발생시키는 投資를 가정하자. 現金흐름을 각각 $F_1, F_2, \cdots, F_n$이라고 하면, F_i는 i時點에서 발생하는 現金흐름을 나타낸다. $F_k=\min i\{F_i\}$가 存在하고, S_0가 $F\epsilon\{F_i\}$를 얻기 위한 권리에 필요한 現金流出이라면, 다음 (Ⅳ-1)式이 成立한다.

$$F_k/S_0 \leq 1+i \qquad (Ⅳ\text{-}1)$$

여기서, i는 無危險利子率이다. 만약 (Ⅳ-1)式이 成立하지 않는다면, $\{Si\}$는 적어도 無危險利子率 以上의 收益을 얻기 때문에, 理性的인 投資家(rational invetor)는 無危險資産에 投資하지 않을 것이다.

옵션價格에 대한 稅金의 영향을 살피기 위하여 헷지로부터 발생하는 가능한 최악의 成果를

10) R. A. Jarrow and A. Rudd, Option Pricing, Homewood, Illinois, Richard D. Irwin Inc., 1983, pp. 77~78.

고려한다. 投資家의 稅率의 t'라하고, 풋옵션의 買受, 콜옵션의 賣却 및 株式의 買受에 의하여 포트폴리오를 구성한다. 投資家의 最初의 現金流出(initial cash outflow)은 S_0+P-C이며, 만기에서 收益은 S_0이다. 따라서 과세할 수 있는 純收益은 콜옵션가격과 풋옵션가격간의 差異인 $C-P$이다.[11] 그러므로 滿期에서 稅金控除後 純現金흐름(net cash flow)은 $S_0-t'(C-P)$이다. 만약 無危險利子率로 S_0+P-C를 投資한다면, 純現金흐름은 $(S_0+P-C)[1+(1-t')i]$이다.[12]

그러므로 다음 式이 成立한다.

$$S_0-t'(C-P)\leq(S_0+P-C)[1+(1-t')i] \qquad (Ⅳ\text{-2a})$$

(Ⅳ-2a)式을 간단히 하면 다음과 같다.[13]

$$(C-P)/S_0\leq i(1+i) \qquad (Ⅳ\text{-2b})$$

(Ⅳ-2b)式은 세금이 존재할 경우에 옵션기간동안 주가가 상승하거나 하락하느냐에 관계없이 成立한다는 것을 보여 준다.

3. 去來費用의 고려와 풋·콜 패러티

포트폴리오를 구성하려면 많은 去來費用(transaction cost)이 발생한다. 稅金과 마찬가지로 去來費用은 投資家가 期待할 수 있는 收益에 영향을 미친다.

풋옵션과 콜옵션의 價格差異에 대한 去來費用의 영향을 살피기 위하여 다음과 같이 記號를 定義한다.

S_t＝t時點에서의 株式價格
P＝풋옵션價格
C＝콜옵션價格
T_t^s＝t시점에서 株式去來와 關聯된 去來費用
T^c＝콜옵션 買受時의 去來費用
T^p＝풋옵션 買受時의 去來費用
i＝無危險利子率
λ＝마진(margin requirement)

먼저 콜옵션의 賣却, 풋옵션의 買收와 株式의 買受로써 구성되는 포트폴리오를 고려하자. 옵션의 行使價格은 現在의 株價인 S_0와 일치하는 K라고 가정한다. 포트폴리오를 구성하면, 〔表 Ⅳ-1〕에서와 같이 $C-P-T^p-\lambda K-T_0^s$의 現金흐름을 발생시킨다.

11) $S_0-(S_0+P-C)=C-P$
12) $(S_0+P-C)(1+i)-t'_i(S_0+P-C)=S_0+P-C)[1+(1-t')i]$
13) $S_0-t'\cdot C+t'\cdot P\leq S_0+P-C+S_0\cdot i+Pi-C\cdot i-t'\cdot i\cdot V_o+C\cdot t'\cdot i-P\cdot t'\cdot i-C(t'-i+t'\cdot i-1)\leq-P$ $(t-1-i+t'\cdot i)+V_0(i-t\cdot i)(\geq P+V_0(i-t'\cdot i)/t-i+t'\cdot i-1$

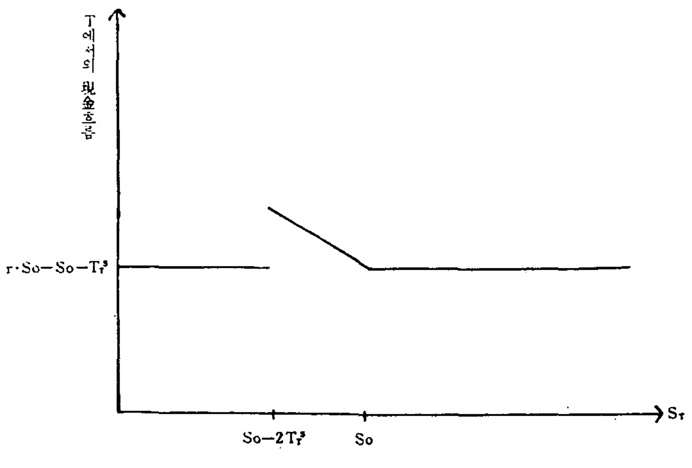
〔表 Ⅳ-1〕 **콜옵션을 賣却할 경우의 去來費用을 포함한 現金흐름**

포 지 션	t_0에서 去來開始	T에서 去來마감	$K \leq S_T \leq K+2T_T^s$		$K+2T_T^s < S_T$
		$S_T < K$	콜옵션의 未行使	콜옵션의 行使	
콜옵션 賣却	C	0	0	$K-S_T-T_T^s$	$K-S_T-T_T^s$
풋옵션 買受	$-P-T^P$	$K-S_T-T_T^s$	0	0	0
株式 買受	$-\lambda S_0-T_0^s$	$S_T-\gamma\cdot K$	$S_T-\gamma\cdot K-T_T^s$	$S_T-\gamma\cdot K$	$S_T-\gamma\cdot K$
合 計	$C-P-T^P-\lambda S_0-T_0^s$	$K-\gamma\cdot K-T_T^s$	$S_T-\gamma\cdot K-T_T^s$	$K-\gamma\cdot K-T_T^s$	$K-\gamma\cdot K-T_T^s$

* $\gamma=(1-\lambda)(1+i)$

옵션의 滿期인 T에서 헷저(hedger)의 현금흐름은 헷저가 賣却한 콜옵션의 所有者와 헷저의 戰略에 따라 決定된다. 즉, 포트폴리오는 不完全하다는 것을 의미한다. 헷저는 포지션을 해체하고 만기, T에서 成果를 얻는다. 즉, 만기에서 4가지 成果를 얻는다. 첫째, $S_T \leq K$가 成立하면, 콜옵션은 行使되지 않는다. 그러나 헷저는 풋옵션을 行使할 것이다. 만기에서 헷저는 株式포지션을 해체한다고 가정하기 때문에 株式의 市場價格인 S_T로 株式을 賣却하는 것보다 풋옵션을 行使하는 것이 有利하다. 둘째, $K \leq S_T \leq K+2T_T^s$가 成立하면, 콜옵션은 行使될 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 콜옵션의 所有者는 株式을 買受하기 위하여 仲介手數料(broker's fee)를 支拂하여야 한다. 그러므로 $S_T \geq K+2T_T^s$가 成立하지 않는다면 즉시 現金利益(cash profit)을 발생시키지 못할 것이다. 왜냐하면, 株式을 다시 賣却하기 위하여 仲介手數料를 支拂하여야 하기 때문이다. 그러나 콜옵션의 소유자는 그의 포트폴리오에 株式을 포함시킬 수도 있고, 주식의 숏포지션(short posrtion)을 커버하기를 원할 수도 있기 때문에 이 價格範圍에서 옵션을 행사할 수도 있다.

$K \leq S_T \leq K+2T_T^s$가 成立하고, 콜옵션의 所有者가 옵션을 행사하지 않으면 헷저는 만기의 株價가 行使價格보다 크기 때문에 그의 株式을 賣却하지만, 풋옵션은 行使하지 않는다.



〔그림 Ⅳ-1〕 **만기에서의 株價函數로 表示한 現金흐름**

$K \leq S_T \leq K+2ST_T{}^s$가 成立하고 콜옵션의 所有者가 옵션을 行使하면, 헷저는 그의 株式을 전달하고 풋옵션은 行使하지 않는다. 세째, $K+2T_T{}^s \leq S_T$가 成立하면, 콜옵션은 行使될 것이고, 株式은 콜옵션을 커버하기 위하여 사용되지만, 풋옵션은 행사되지 않는다.

〔表Ⅳ-1〕은 成果에 대한 價値와 現金흐름을 說明한다. 만기 T에서 現金흐름은 〔그림 Ⅳ-1〕에 표시되어 있다.

이것을 더 상세하게 분석하기 전에 또다른 포트폴리오를 살펴 보는 것이 必要하다. 이 代替案에서 헷저는 풋옵션을 賣却하고, 콜옵션을 買受하고, 주식의 숏포지션을 취한다. 만기인 T에서 株式價格인 S_T와 풋옵션의 所有者와 헷저의 戰略에 따라 만기에서 4가지 結果를 구할 수 있다. 숏포지션이 모든 경우에 커버된다고 가정한다.

첫째, $S_T \leq K-2T_T{}^s$가 成立하면, 풋옵션은 行使되지만 콜옵션은 行使되지 않는다. 풋옵션의 所有者가 풋옵션을 行使하므로써 買受한 주식으로 숏포지션을 커버한다. 왜냐하면, 市場에서 株式을 買受하여 풋옵션을 행사한다면 二重의 仲介手數料(double brokerage fees)를 지불하여야 하기 때문에 풋옵션 所有者는 풋옵션을 행사하는 것이 有利하다.

둘째, $K-2T_T{}^s \leq S_T \leq K$가 成立할 경우에는 두가지 가능성이 있다. 풋옵션 所有者는 市場에서 株式을 買受하고 행사가격인 K로 株式을 賣却하므로써 現金利益은 즉시 實現할 수 없지만, 그의 포트폴리오에 株式을 포함하고 있다면 풋옵션을 行使할 것이다.

풋옵션의 所有者가 株式을 所有하고 있을 경우에는 現金흐름이 첫번째 결과와 동일하며, 헷저는 콜옵션을 行使하지 않는다. 풋옵션의 所有者가 株式을 所有하고 있지 않거나 풋옵션을 행사하지 않는다면, 풋옵션과 콜옵션은 소멸될 것이며, 株式을 市場에서 買受하여 株式의 숏포지션을 커버한다.

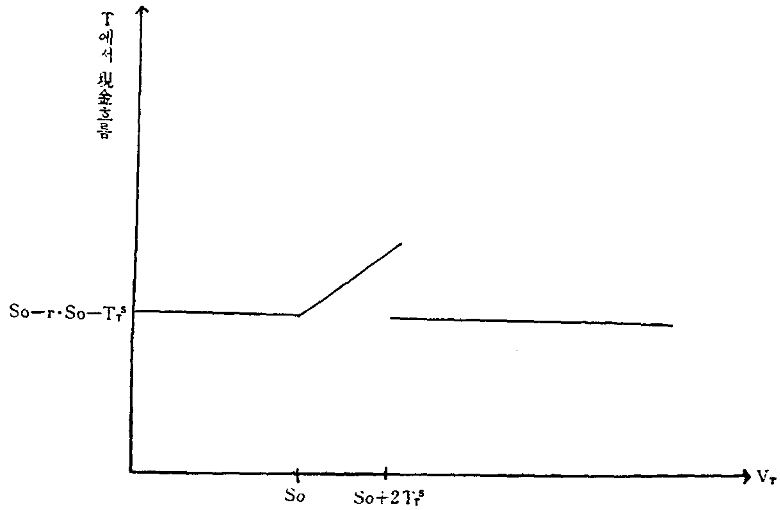
세째, $K \leq S$가 成立하면, 풋옵션의 所有者는 풋옵션을 行使하지 않지만 콜옵션의 所有者는 콜옵션을 行使한다. 콜옵션의 行使에 의하여 買受한 株式은 株式의 숏포지션을 커버하기 위하여 사용한다.

각 결과로부터 발생하는 現金흐름은 〔표 Ⅳ-2〕와 〔그림 Ⅳ-2〕에 설명되어 있다.

〔表 Ⅳ-2〕 풋옵션을 賣却할 경우의 去來費用을 포함한 現金흐름

포 지 션	t_0에서 去來開始	$S_T < K-2T_T{}^s$	$K-2T_T{}^s \leq S_T \leq K$ 풋옵션 所有者가 株式所有	$K-2T_T{}^s \leq S_T \leq K$ 풋옵션 所有者가 株式未所有	$S_T < K$
풋옵션의 賣却	P	$S_T-K-T_T{}^s$	$S_T-K-T_T{}^s$	0	0
콜옵션의 買受	$-C-T^c$	0	0	0	$S_T-K-T_T{}^s$
株式의 空賣	λS_0-T^s	$\gamma \cdot K-S_T$	$\gamma \cdot K-S_T$	$\gamma \cdot K-S_T-T_T{}^s$	$\gamma \cdot K-S_T$
合 計	$P+\lambda S_0-C-T^c-T^s$	$\gamma \cdot K-K-T_T{}^s$	$\gamma \cdot K-K-T_T{}^s$	$\gamma-K-S_T-T_T{}^s$	$\gamma \cdot K-K-T_T{}^s$

이 포트폴리오에서 모든 去來費用이 발생하지 않을 경우에는 現金흐름이 S_T의 모든 값에 대하여 동일하다는 것을 나타내고 있는 것이 특이하다. 去來費用이 發生할 경우에는 헷저와 옵션 買受者(option buyer)의 戰略은 영향을 받기 때문에 헷저의 성과를 不確實하게 한다.



〔그림 Ⅳ-2〕 滿期에서의 株價函數로 表示한 現金흐름

投資家가 첫번째 포트폴리오에서 주식포지션(stock position)을 해체시킨다고 假定하자. 발생 가능한 최악의 성과는 $K-\lambda K-T_S{}^T$이며, 다음 부등식이 成立한다.

$$C-P-T^p-\lambda K-T_0{}^s+[(K-\gamma K-T_T{}^s)B(t,\tau)]\leq 0 \qquad (\text{Ⅳ-3})$$

혹은

$$C-P\leq[K.\{B(t,\tau)-1\}.B(t,\tau)]+[T_T{}^s.B(t,\tau)]+T^p+T_0^s$$

두번째 포트폴리오에서 유럽 풋옵션을 가정하면 다음 부등식이 성립한다.

$$P+\lambda\cdot K-C-T^c-T^s+[(\gamma K-K-T_T{}^s).B(t,\tau)\leq 0 \qquad (\text{Ⅳ-4})$$

혹은

$$C-P\geq[K\{B(t,\tau)-1\}B(t,\tau)]-[T_T{}^sB(t,\tau)]-T^p-T_S{}^0$$

만약 풋옵션이 만기전에 행사된다면, 두번째 헷지는 다음과 같다.

$$C-P\geq-(T_T{}^s+T^c+T_0{}^s) \qquad (\text{Ⅳ-5})$$

만기에서 不等式은 $T_T{}^s$가 만기에서의 株價에 의하여 영향을 받지 않는다는 가정에 의존한다. 그러나 중개수수료는 株價의 함수이므로 이 가정은 옳지 않다. 去來費用을 확실하게 고려할 경우에는 만기에서의 확실한 최소의 현금흐름은 만기에서의 株價인 S_T와 株式去來量에 좌우된다.

마진 λ는 영역을 유도함에 있어서 제거되기 때문에 이 모형에서 추가적인 알력(additional friction)을 나타내지 않는다. 특히 두번째 포트폴리오의 공매에서 마진 λ는 −1과 1사이의 값을 취한다. 만약 λ의 값이 −1이라면 空賣를 위하여 포트폴리오의 구성시에 S_0를 支拂하여야 한다. 이 경우에 만기에서 S_0에 대하여 이중의 利子費用을 갖는다. 즉, 한번은 그가 소유하지

않는 空賣의 收益때문에 또 한번은 空賣를 수행하는 것을 연기한 마진 때문이다. 만약 λ가 1이라면, 投資家가 포트폴리오의 구성시에 S_0를 받지만 브로커에 의하여 커버된 숏포지션의 이자를 支給한다. 이 경우에 利子는 상쇄된다. λ값은 마진의 效果를 제거한다. 支拂額이 만기에서 명확하지 않을 경우에 $T_0{}^s$의 수정에 의하여 調整된다.

앞에서 살펴 본 바와 같이 두가지 포트폴리오에서의 콜옵션과 풋옵션사이의 價格差異는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(C-P)/S_0 \leq [B(s,\tau)-1]+\pi_T{}^s B(t,\tau)+\pi^p+\pi_0{}^s \qquad (\text{Ⅳ-6})$$

$$(C-P)/S_0 \geq -(\pi_p{}^s+\pi^c+\pi_0{}^s) \qquad (\text{Ⅳ-7})$$

여기서, $\pi_p{}^s=T_T{}^s/S_0$, $\pi^p=T^p/S_0$, $\pi_0{}^s=T^s/S_0$, $\pi^c=T^c/S_0$는 株式과 옵션의 去來費用이다. (Ⅳ-6)式과 (Ⅳ-5)式으로 표현된 領域에서 去來費用은 옵션의 만기전 행사 혹은 세금의 영향과 반대로, 上限을 높이는 반면에 下限을 낮춘다. 去來費用을 고려하지 않을 경우에는 利益機會(profit opportunity)는 $(C-P)/S_0$가 $\{B(t,\tau)-1\}/B(t,\tau)$를 초과하거나 0以下로 떨어질 때마다 발생하지만, 去來費用이 고려될 경우에는 이 영역은 초과될 수 있으며 이 경우에는 이익기회가 발생하지 않는다.

Ⅴ. 結　　言

1974年에 시카고 옵션去來所가 設立된 후에 옵션去來가 활발하게 이루어진 것은 周知의 事實이다. 이와 같이 옵션去來所가 活況을 이루게 된 주요한 要因은 옵션契約條件의 標準化이다. 즉, 옵션의 行使價格과 滿期에 대하여 投資家가 쉽게 理解할 수 있도록 標準化하므로써 投資家의 投資를 유도한 것이다. 또한 콜옵션, 풋옵션, 株式의 롱포지션과 숏포지션, 社債등으로 포트폴리오를 구성하여 헷지효과를 얻을 수 있는 것도 옵션去來를 활발하게 한 要因이다.

이와 같이 포트폴리오를 구성할 때에 裁定去來機會를 제거하는 풋옵션과 콜옵션의 價格差異의 領域에 대하여 以上에서 살펴 본 결과로 다음 사실을 알 수 있다.

풋·콜 패러티定理로부터 代替的인 證券을 利用하여 콜옵션과 동일한 포트폴리오를 구성할 수 있으며 콜옵션은 株式의 롱포지션으로 구성되기 때문에 콜옵션의 組合에 풋옵션이 포함되는 것 이외에는 株式의 특성을 갖는다.

配當이 確率的인 경우에는 풋옵션과 콜옵션價格間의 關係는 配當의 範圍에 의하여 決定된다. 그리고 利子率이 確率的으로 變動할 경우에는 콜옵션價格의 영역을 決定하기가 어렵다. 왜냐하면 利子率이 變動하기 때문에 社債의 정확한 가치를 알 수 없기 때문이다.

稅金을 고려하더라도 옵션의 滿期까지 株價의 상승과 하락과는 관계없이 풋옵션과 콜옵션의 價格關係는 일정하다. 그리고 去來費用은 영역의 下限을 높이는 반면에 下限을 낮춘다. 去來費

用을 고려하지 않을 경우에는 利益機會는 $(C-P)/S_0$가 $\{B(t,\tau)-1\}/B(t,\tau)$를 초과하거나 0 以下로 떨어질 때마다 발생하지만, 去來費用이 고려될 경우에는 이 영역은 초과될 수 있으며, 이 경우에는 이익기회가 발생하지 않는다.

參 考 文 獻

1. Copeland, T.E. and Weston, J.E., Financial Theory and Corporate Policy, 2nd ed., Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., 1983.
2. Elton, E.J. and Gruber, M.J., Modern Portfolio Theory and Investment Amalysis, 2nd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1981.
3. Geske, R., "The Pricing of Options with Stochastic Dividend Yield," Journal of Finance, May 1978, pp.617～630.
4. Gould, J.P. and Galai, D., "Transactions Costs and the Relationship Between Put and Call Prices," Journal of Financial Economics 1, 1974, pp.105～129.
5. Jarrow, R.A. and Oldfield, G.S., "Forward Contracts and Futures Contracts," Journal of Financial Economics 9, 1981, pp.373～382.
6. Jarrow, R.A. and Rudd, A., Option Pricing, Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1983.
7. Kalay, A., "The Ex-Dividend Day Behavior of Stock Prices: A Re-Examination of the Clientele Effect," Journal of Finance, September 1982, pp.1059～1070.
8. Klemkosky, R.C. and Resnick, B.G., "Put-call Parity and Efficiency," Journal of Finance, December 1979, pp.1141～1155.
9. Merton, R.C., "The Relationship Between Put and Call Option Prices: Comment," Journal of Finance, March 1973, pp.184～194.
10. Merton, R.C., "On the Pricing of Contingent Claims and the Modiglioni-Miller Theorem," Journal of Financial Economics 5, 1977, pp.241～249.
11. Merton, R.C., Scholes, M.S. & Gladstein, M.L., "The Returns and Risks of Alternative Put-Option Portfolio Investment Strategies," Journal of Business, 1982, pp.1～55.
12. Roll, R., "An Analytic Valuation Formular for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends," Journal of Financial Economics 5, 1977, pp.252～258.
13. Rendleman, R.J. Jr. and Bartter, B.J., "Two-State Option Pricing," Journal of Finance, December 1979, pp.1093～1127.
14. Scholes, M., "Taxes and the Pricing of Options," Journal of Finance, May 1976, pp.319～332.
15. Smith, C.W., "Option Pricing," Journal of Financial Economics 3, 1976, pp.3～51.