

간트 차아트를 이용한 m-機械 n-製品의 最適 흐름作業 順序決定

(A Scheduling Method for the m-Machine
n-Job Flow-Shop Problem by Gantt Chart)

金 南 洙*
李 相 鎔*

Abstract

This paper is concerned with flow-shop permutation scheduling problem.

This paper presents an algorithm for the minimum makespan sequence.

The efficiency of proposed algorithm is demonstrated by comparisons with the existing algorithms: Johnson's, branch & bound method, and heuristic algorithms.

The proposed algorithm is more effective than the other algorithms.

A numerical example is given to illustrate the procedure.

I. 序 論

흐름작업장(Flow-Shop)은 직렬로 배열된 m-機械로 구성되어 있고, 각 작업이 다른 機械에서 수행되고 있는 n개의 작업을 필요로 하는 製品들로 구성되어 있으며, 작업흐름이 單一方向이므로 각 製品은 規定된 順序에 따라 각 機械를 거쳐서 製造되어야 한다. [5]

이러한 흐름 작업장 문제는 본래의 조합의 인성질 때문에 解를 구하는데 많은 어려움이 있으나, 주어진 評價尺度(Measure of performance)를 만족하는 最適日程을 구하기 위한 많은 技法의 研究가 進行되고 있다.

이에 대한 研究는 總 作業時間(Makespan) 基準을 갖는 2-機械 및 3-機械 흐름작업장에 대한 Johnson의 最適化 節次[1]를 基點으로 하고 있으며, 그 이후의 日程計劃問題에 많은 影響을 마치고 있다.

Johnson 법이 적용되지 않은 一般的인 3-機械 흐름 작업장 問題의 경우 總作業時間을 最小化 하는 順序決定을 위한 接近方法으로서 整数計劃法(Integer Programming), 分岐限界法(Branch and Bound Method)과 휴리스틱 技法(Heuristic Method) 등이 있으며, 이들 接近方法들 중 分岐限界法과 휴리스틱 技法은 大型흐름 작업장 問題(機械의 數가 4臺以上인 경우)로 확장할 수 있다.

*建国大学校 工科大学 産業工学科

Story와 Wagner [9], Giglio와 Wagner [3]는 整数型問題로서 日程計劃問題를 定式化 했으나 불행히도 매우 큰 計算의 어려움을 가지고 있다.

Ignall과 Schrage [6](이와는 별도로 Lomnick [7]에 의해 흐름 作業場問題에 대한 分岐限界法이 提起되었으나 이 方法은 製品의 數가 많아지거나 機械의 數가 많아지면 解를 구하는 時間이 幾何級數의으로 증가하는 短點이 있다.

이러한 分岐限界法의 短點을 보완하기 위해 Palmer [8], Gupta [4], 그리고 Campbell, Dudek, Smith [2] 등에 의해 휴리스틱 技法이 개발되었으나, 여러 경우에 그 效率성을 보장할 수 없고, 解의 信賴度가 떨어진다는 缺點이 있다.

그러나 大型흐름作業場 問題에서는 計算의 어려움이 큰 分岐限界法보다는 휴리스틱 技法이 많이 사용되고 있다. [5]

따라서 本 研究에서는 以上과 같은 諸 技法들의 短點을 보완할 수 있는 새로운 技法을 構想한 後 이 技法을 사용하여 여러가지 事例問題에 적용하고, 그 性能을 檢討함으로써 m-機械 n-製品 흐름作業場 日程計劃을 위한 새로운 技法을 提案하고자 한다.

II. 새로운 技法의 考察

既存技法들은 그 技法 자체의 制限性, 計算的 複雜性和 解의 信賴度가 낮다는 問題點을 가지고 있다. 따라서 解를 구하는데 順序計劃에 입각한 간트 차아트(Gantt Chart)를 이용한 새로운 技法을 적용하면 흐름作業場 問題의 어느 경우이나 적용할 수 있고, 간편한 計算으로 信賴度가 높은 解를 구할 수 있다.

그 前提條件과 節次를 具體的으로 提示하면 다음과 같다.

1. 用語說明 및 前提條件

새로운 技法을 적용하는데 필요한 最大, 最

小作業時間은 다음과 같이 定義한다.

가. 마지막 機械에서 製品 j의 最小作業時間: A (여기서 $j=1, 2, \dots, n$)

나. 첫번째 機械로 부터 製品 j를 製造하기 시작하여 마지막 機械에서 製品 j를 生産해 내는데 所要되는 最小作業 時間: B

다. 두번째 機械로 부터 製品 j를 製造하기 시작하여 마지막 機械에서 製品 j를 生産해 내는데 所要되는 最小作業時間: C

라. 마지막 機械에서 製品 j의 最大作業時間: D

마. 첫번째 機械로 부터 製品 j를 製造하기 시작하여 마지막 機械에서 製品 j를 生産해 내는데 所要되는 最大作業 時間: E

바. t_{ji} : 機械 i에서 製品 j를 처리하는데 所要되는 時間(여기서 $i=1, 2, \dots, m$)

또한, 새로운 技法의 分析에는 다음과 같은 前提條件들이 필요하다.

가. A, B, C가 D, E를 優先한다.

나. t_{ji} 값이 競合하는 경우에는 t_{jm} 값이 더 큰 것을 선택한다.

다. A, B, C, D, E가 각 2個 이상 存在할 때는 다음의 選定基準에 따른다.

1) A가 2個이상 存在할 경우:

첫번째 機械로 부터 製品 j를 生産해 내는데 所要되는 作業時間을 비교하여 적은 값을 갖는 製品을 선택한다.

2) D가 2個이상 存在할 경우:

첫번째 機械로 부터 製品 j를 製造하기 시작하여 마지막 機械에서 製品 j를 生産해 내는데 所要되는 作業時間을 비교하여 큰값을 갖는 製品을 선택한다.

3) B, C, E가 2個이상 存在할 경우:

A = B, D = E, A = C, B = C인 경우를 優先하고, 이 條件이외의 것은 任意로 선택한다.

라. 各 節次에 該當되는 製品이 앞 節次에서 미리 配定되었을 경우에는 그 節次를 무시하고 다음 節次로 進行하다.

2. 計算節次

앞에서 제시된 前提條件을 적용하여 새로운 技法의 計算節次를 설명하면 다음과 같으며, 段階Ⅰ에서는 最適解를 찾아내기 위한 準備段階로서 最適解를 포함하고 있는 간트 차아트를 찾아내고, 段階Ⅱ에서 이 간트 차아트에 가장 적합하고 信賴度가 높은 最適解를 順序에 따라 구한다.

[段階Ⅰ]

(節次1) 製品의 數만큼 간트 차아트를 준비하고, 준비된 간트 차아트에 각 製品을 첫번째 製造順序로 놓는다.

(條件1) 첫번째 製造順序로 決定된 製品이 配定된 간트 차아트는 $B = C$ 일때 (節次3)으로 가고, $B \neq C$ 일때는 (節次2)로 간다.

(節次2) D에 해당되는 製品을 각 간트 차아트의 두번째 製造順序로 놓는다. 그리고 (節次4)로 간다.

(節次3) (節次1)에서 順序가 決定된 製品을 제외하고 順序가 決定되지 않은 製品중 t_{ji} 을 最小로 하는 製品을 해당 간트 차아트의 두번째 製造順序로 놓고, D에 해당되는 製品을 세번째 製造順序로 놓는다.

그리고 (節次4)로 간다.

(節次4) E에 해당되는 製品을 製造順序가 決定된 製品들 바로 뒤에 놓는다.

(節次5) A에 해당되는 製品을 간트 차아트의 맨뒤 順序로 놓는다.

(條件2) A에 해당되는 製品이 2개 이상일 때는 그 製品들의 B를 비교하여 적은 것을 선택한다.

(節次6) 順序가 決定되지 않은 나머지 製品들의 t_{ji} 을 비교하여 내림차순으로 정리하고, 順序가 決定된 製品들 바로 뒤에 크기順으로 간트 차아트에 配定한다.

(節次7) 以上の (節次1)~(節次6)에 의해 구한 간트 차아트들 중에서 總 作業時間을 最小로 하는 것을 선택한다.

(條件3) 總 作業時間을 最小로 하는 간트

차아트가 2개 이상일 때는, 이들 간트 차아트 상의 첫번째 機械에서 세번째 順序로 配定된 製品까지의 作業時間을 비교하여 가장 작은 것을 선택한다.

[段階Ⅱ]

(節次8) (製品數-2)개의 간트 차아트를 준비하고, (節次7)에서 구한 製造順序의 맨 앞에 配定된 製品만을 준비된 간트 차아트에 각각 첫번째 順序로 配定한다. [단, (節次3)이 적용된 간트 차아트일 경우에는 두번째 順序로 配定된 製品까지를 새로운 간트 차아트에 配定한다.]

(節次9) (節次8)에서 順序가 결정된 製品을 제외한 나머지 製品들을 각 간트 차아트에 두번째 (혹은 세번째) 順序로 하나씩 配定한다.

(節次10) D에 해당되는 製品을 順序가 결정된 製品의 바로뒤 順序로 配定하고, (節次5)를 적용한다.

(節次11) 順序가 決定되지 않은 나머지 製品들의 t_{ji} 을 비교하여 내림차순으로 順序가 決定된 製品의 바로 뒤 順序로 간트 차아트에 配定한다.

(節次12) (節次1)~(節次11)에 따라 구한 간트 차아트중 總 作業時間을 最小로 하는 간트 차아트를 선택하고, 解의 信賴度를 높이기 위해 이 간트 차아트의 製造順序중 맨뒤에 配定된 製品과 바로앞에 配定된 製品의 順序를 바꾼다.

(단, 總 作業時間을 最小로 하는 간트 차아트가 여러개일 경우에는 任意로 하나를 선택한다.)

(節次13) (節次1)~(節次12)에 따라 구한 간트 차아트들 중에서 總 作業時間을 最小로 하는 것을 구한다.

Ⅲ. 事例適用 및 結果의 比較

(事例1) 3-機械 n-製品問題(Johnson 법이 적용되는 경우)

어떤 工程에서 4個의 製品이 機械1, 2, 3을 거쳐서 製造되고 있으며, 이에대한 作業時間은 (表1)과 같다.

(表 1) 3-機械 n-製品問題의 作業時間 (단위 : 시간)

製品	機械			기계 2 ~ 기계 3	기계 1 ~ 기계 3
	1	2	3		
1	8	2	4	6	14
2	5	4	5	9	14
3	6	1	3	4	10
4	7	3	2	5	12

(表 2) 3-機械 n-製品問題의 作業時間 (단위 : 시간)
(一般의인 境遇)

製品	機械			기계 2 ~ 기계 3	기계 1 ~ 기계 3
	1	2	3		
1	12	5	13	18	30
2	6	10	3	13	19
3	9	11	18	29	38
4	17	16	4	20	37

(表 3) m-機械 n-製品問題의 作業時間 (단위 : 시간)

製品	機械					기계 2 ~ 기계 5	기계 1 ~ 기계 5
	1	2	3	4	5		
1	5	8	20	4	13	45	50
2	2	5	3	20	4	32	34
3	30	4	5	3	21	33	63
4	6	30	6	14	8	58	64

(事例2) 3-機械 n-製品問題(一般의인 경우)

어떤 工程에서 4個의 製品이 機械 1, 2, 3을 거쳐서 製造되고 있으며, 이에대한 作業時間은 (表2)와 같다.

(事例3) m-機械 n-製品問題

어떤 工程에서 4個의 製品이 機械1, 2, 3, 4, 5을 거쳐서 製造되고 있으며, 이에대한 作業時間은 (表3)과 같다.

위의 3가지 事例에 대하여 本論文에서 考案된 새로운 技法과 Johnson 法, 分岐限界法 및 휴리스틱 技法을 適用하여 얻어진 最適 흐름 作業順序는 (表4)와 같다.

(表 4) 諸技法의 計算結果

事例	技法	새로운 技法	Johnson 法	分岐限界法	CDS 휴리스틱 技法
1	製品製造順序	2-1-4-3	2-1-4-3		
	總作業時間	30	30		
2	製品製造順序	3-4-1-2		3-4-1-2	3-1-4-2
	總作業時間	63		63	67
3	製品製造順序	2-1-4-3		2-1-4-3	2-1-3-4
	總作業時間	94		94	101

(表4)에서 알 수 있듯이 휴리스틱 技法은 다른 技法보다 精確한 總作業時間을 구할 수 없기 때문에 總作業時間 最小化의 目的을 갖는 흐름 作業場 問題에서는 非效率의이다.

또한 Johnson 법은 3-機械 n-製品의 特殊한 경우에는 다른 技法들 보다 精確한 效率의이지만 一般의인 경우나 大型흐름 作業場 問題에는 적

용할 수 없다는 制限性을 가지고 있다.

以上的 두 技法이 各各 解의 信賴度에 대한 問題와 技法自體의 制限性을 가지고 있는 반면, 分岐限界法과 새로운 技法은 흐름 作業場 問題의 모든 경우에 적용할 수 있고, 信賴度가 높은 解를 구할 수 있다.

分岐限界法은 最小 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個의 노드

(node)를 計算해야 하며 解의 信賴度를 높이기 위해 逆進過程을 포함할 경우에는 그이상의 노드를 구해야 한다.

그러나 새로운 技法은 解의 信賴度를 높이기 위한 過程을 포함해서 最小(2n-3)個에서 最大(2n-1)個의 간트차아트만 그리면 간단하게 解를 구할 수 있다.

以上の 두 技法에서 노드數와 간트차아트數를 비교 함으로써 새로운 技法이 훨씬더 效率的이라는 것을 明確하게 立證할 수 있다.

노드數와 간트차아트數의 比較結果는 (表5)와 같다.

(表5) 노드數와 간트차아트 數의 比較

製品의數 (n)	技法	새로운技法
	分岐限界法 노드의 數	간트차아트의數
5	15個 以上	7 ~ 9個
10	55 "	17~19 "
15	120 "	27~29 "
20	210 "	37~39 "
25	325 "	47~49 "
30	465 "	57~59 "

(表5)에서 알 수 있듯이 分岐限界法은 製品의 數가 증가함에 따라 幾何級數的으로 노드의 數가 늘어나기 때문에 많은 計算的 어려움이

있으나, 새로운 技法은 製品의 數가 5個 증가할때 마다 10個의 간트차아트만 더 그려주면 解를 구할 수 있다는 利點을 가지고 있다.

IV. 結 論

흐름 作業場 日程計劃問題에 대한 많은 技法들이 발표되었지만, 이 問題의 전반에 걸쳐 效率的인 解를 제시할 수 있는 技法은 없다.

本 論文에서는 이러한 問題를 해결할 수 있는 새로운 技法을 제시하였으며, 事例問題를 통하여 Johnson 법, 分岐限界法과 휴리스틱 技法 等과의 效率性을 比較하였다.

그 比較結果를 요약하면 다음과 같다.

(1) 존슨법이 갖는 制限性을 극복할 수 있었다.

(2) 휴리스틱 技法을 사용하여 얻을수 있는 解보다 信賴度가 높은 解를 얻을 수 있었다.

(3) 分岐限界法보다 훨씬 간단한 計算으로 信賴度가 높은 解를 얻을 수 있었다. 以上에서 언급된 것과 같은 效率性을 갖는 새로운 技法도 既存의 技法들과 마찬가지로 大型흐름作業場 問題에서는 몇몇 경우에 最適解를 얻을 수 없다.

따라서 앞으로 이 問題에 대한 持續的인 연구가 행해져야 할 것이다.

References

- [1] Baker, K. R., *Introduction to Sequencing and Scheduling*, John Wiley and Sons, N.Y., 1974.
- [2] Campbell, H. G., Dudek, R. A., and Smith, M. L., "A Heuristic Algorithm for the n-Job m-Machine Sequencing Problem," *Management Science*, Vol. 16, No. 10, pp. B-630-637, 1970.
- [3] Giglio, R., J., Wagner, H. M., "Approximate Solutions to the Three-Machine Scheduling Problem," *Operations Research*, Vol. 12, No. 2, pp. 305-324, 1964.
- [4] Gupta, J. N. D., "A Functional Heuristic Algorithm for the Flow-Shop Scheduling Problem," *Operational Research Quaterly*, Vol. 22, No. 1, pp. 39-47, 1971.
- [5] Hax, A. C., Candea, D., *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1984.

- [6] Ignall, E., Scherage, L., "Application of the Branch and Bound Technique to some Flow-Shop Scheduling Problems," *Operations Research*, Vol. 13, No. 3, pp. 400-412, 1965.
- [7] Lomnicki, Z., "A Branch and Bound Algorithm for the Exact Solution of the Three-Machine Scheduling Problem," *Operational Research Quaterly*, Vol. 16, No. 1, pp. 89-100, 1965.
- [8] Palmer, D. S., "Sequencing Jobs through a Multi-Stage Process in the Minimum Total Time-A Quick Method of Obtaining a Near Optimum," *Operational Research Quaterly*, Vol. 16, No. 1, pp. 101-107, 1965.
- [9] Story, A. E., Wagner, H. M., "Computational Experience with Integer Programming for Job-Shop Scheduling," in J. F. Math and G. L. Thompson (editors), *Industrial Scheduling Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., pp. 207-219, 1963.