Journal of the KSQC
Vol. 14, No. 1, 1986

제품인도기간에 함수인 확률적 주문수준 재고정책에 관한 연구
Stochastic Order Level Inventory System with Dependent Lead Times

金 永 敏*

ABSTRACT

This paper deals with probabilistic order level inventory system which the quantity ordered at the end of the scheduling period is dependent on lead times. To find an optimal solution, pearson system of distributions is used to approximate the probability density function of the on-order quantity. An example is solved and sensitivity analysis is performed to examine the relation between lead times and the ordering quantity.

I. 서 론

제품을 생산하는 기업에 있어서 중요한 기능 중의 하나인 재고품의 관리는 기업의 생산성에 지대한 영향을 미치므로 재고품의 효율적 관리를 위한 연구가 다양하게 시도되고 있다.

그러나 경제적 주문량(E. O. Q)을 결정하는 간단한 문제로부터 확률적 재고 System에 이르기까지 여러분야에 걸친 끊임없는 연구에도 불구하고 현실적 상황이 충분히 고려된 재고모형은 아직도 연구과제로 남아있다.

기존의 연구에 의하면 제품인도기간은 상수로 취급되는 경우와 확률분포함수를 갖는 확률변수로 취급하는 두가지 경우로 나뉜다. 제품인도기간이 상수인 경우는 이들 기간의 변동이 크지 않아서 대략적인 수치로서 사전분석을 하고자 할때 적합한 것으로 여겨지며, 확률적인 경우는 주문중 제품의 량에 관한 확률 분포함수를 구해야 하는 어려움 등으로 인해 적용범위가 한정되어 있으나 Kaiman과 Kaplan에 의한 동적재고모형을 비롯하여 최근 많은 연구가 이루어지고 있다.

그러나 이들 제품인도기간에 관한 연구들은

* 仁荷大学校 産業工学科

모두 제품인도기간과 발주량과의 관계를 무시하고 있다. 일반적으로 제품에 대한 발주가 이루어진 후 제품이 실제 도착하기 까지의 기간은 발주량에 따라 변화하는 것이 사실이므로 발주량과 제품인도 기간은 상관관계가 있다. 따라서 본논문에서는 제품인도기간에 관한 실제상황을 고려하여 제품인도기간을 발주량의 함수로 표현하며, 이러한 가정하에서 재고관리를 위한 의사결정변수의 최적치를 구하고자 한다.

Ⅱ. 모델의 설정 및 고찰

확률적 주문수준 결정체계를 연구하여 확률적 제품인도기간에서의 주문중 제품의 량을 확률변수로 하는 확률분포함수를 분포체계를 이용하여 다음과 같은 가정을 한다.

1. 체계는(t_p, S) Policy
2. 수요는 연속적, 확률적
3. 수요발생형태 : 균등하게 발생(uniform demand pattern)
4. lead time : $L=a+b\ \log(q+1)$, $q>0$
5. 제품인도 : Scheduling period 말에 인도.
6. 비용함수 : C_1(Carrying Cost), C_2(Shortage Cost), C_3(replenishment Cost)

이러한 가정하에서 기존의 비용함수식 및 최적주문수준 결정식은 다음과 같다.

$$C(t_p,s)=C_1\int_0^z\int_0^{z-v}\left(z-v-\frac{x}{2}\right)f(x)\,h(v)dx\,dv+\int_0^z\int_{z-v}^\infty\left[C_1\frac{(x-v)^2}{2x}+C_2\frac{(x-z+v)^2}{2x}\right]f(x)\,h(v)dx\,dv+C_2\int_z^\infty\int_0^\infty\left[v-z+\frac{x}{2}\right]f(x)\,h(v)\,dv \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\int_0^{z_0}\left\{\int_0^{z_0-v}f(x)\,dx+\int_{z_0-v}^\infty\frac{z_0-v}{x}f(x)dx\right\}\times h(v)dv=\frac{C_2}{C_1+C_2}\quad\cdots\cdots(2)$$

주문중 제품의 양 v에 대한 분포함수를 구해서 $h(v)$에 대체함으로서 (2)식으로 부터 Z_0를 구하고 이것을 (1)식에 대입함으로서 최소비용 C_0를 구할수 있다.

본 논문에서는 주문중 제품의 양에 관한 확률밀도함수를 구하기 위해 Pearson 체제를 사용한다. 이 Pearson의 확률밀도함수(PDF)는 다음의 미분방적식을 말한다.

$$\frac{df}{dx}=\frac{(x-a)f}{D_0+D_1x+b_2x^2}\quad\cdots\cdots(3)$$

위의 가정에 따라 재고변동을 고려하면 식3은 변수변황에 의해 다음과 같이 된다.

$$\frac{d(\log f)}{dx}=\frac{x}{B_0+B_1x+B_2x^2}\quad\cdots\cdots(4)$$

위식의 Solution의 형태는 $K=B_1^2/4B_0B_2$의값에 따라 변한다. 따라서 K는 체제의 형태를 결정해주는 기준으로 사용하며 이값은 다음과 같이 주어진다.

$$K=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)}\quad\cdots(5)$$

K의 값에 따라 체계의 형태와 함수 형태를 정리하여 보면 표 1과 같다.

표 1에 나타나 있는 가정에 따라 재고변동을 표시하면 다음과 같다. 어느 시점 T_i에서의 현재량 Q^*(inventory on-hand quantity)는 아래와 같다.

$$Q^*=S-Q\quad\cdots\cdots(6)$$

평균 재고 유지량(I_1)과 평균품절량(I_2)의 값을 구하기 위해 Q^*의 확률밀도함수가 필요하다. 식(6)에서 Q^*는 Q에 의해 표현되므로 Q^*에 대한 확률밀도함수대신 그림 1에서의 Q의 것을 사용하기로 한다.

표 1. K 에 따른 함수형태

K	type	p·d·f·	비 고
$K<0$	Ⅰ	$f(x)=K(x-a_1)^{m_1}\cdot(a_2-x_2)^{m_2}$	β 분 포
	Ⅱ	〃	$m_1=m_2$
$K=0$	Ⅲ	$f(x)=K(C_0+C_2x^2)^{-(2C_2)^{-1}}$	t 분 포
$0<K<1$	Ⅳ	$f(x)=K\{C_0+C_2(x+c_1)^2\}^{-(2C_2-1)}\cdot Exp[\frac{a-c_1}{\sqrt{c_2c_0}}\tan^{-1}\frac{x+c_1}{\sqrt{c_0/c_2}}]$	
	Ⅴ	$f(x)=K(x+c_1)^{-1}/c_2\ \ \mathrm{Exp}[\frac{a-c_1}{c_2(x+c_1)}]$	inverse Gauss 분포
$K=1$	Ⅷ	〃	$a=c\ \ 0<c_2<1$
	Ⅸ	〃	$a=c,\ -1<c_2<1$
$K>1$	Ⅵ	$f(x)=K(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}$	
$K=\infty$	Ⅲ	$f(x)=K(c_0+c_1x)^{m}\mathrm{Exp}(-x/c_1)$	Gamma 분포

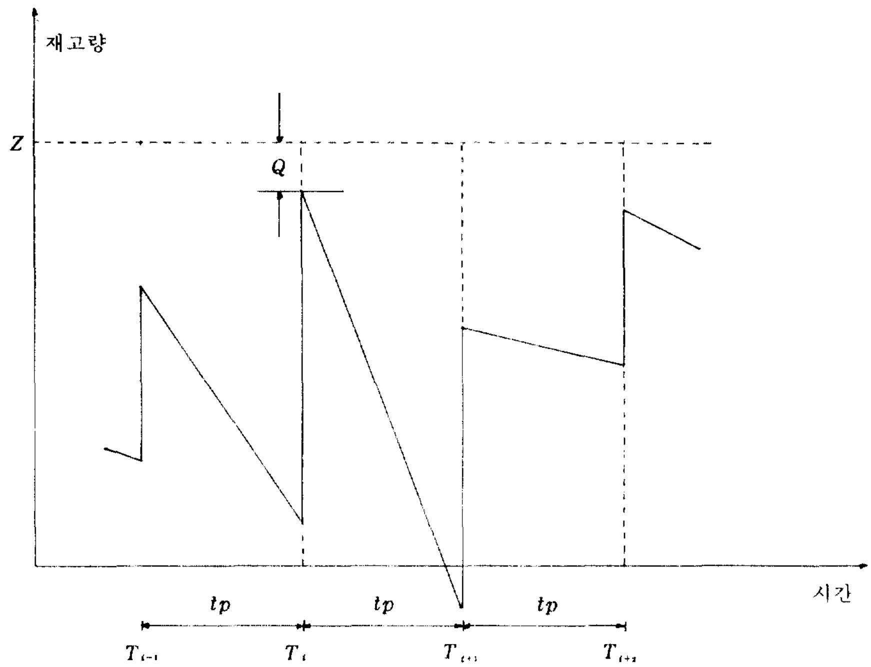

그림 1. $L=a+b\log(q+1)$일때 (tp, Z) 체계의 재고변동

Q는 주문중 제품의 량을 나타내며 i기간 이전에 주문한 량을 q_i라 하면 Q는 다음의 식과 같이 표현될 수있다.

$$Q=q_0'+q_1'+\cdots\cdots q_n' \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

여기서 L이 $i\cdot t_p$보다 적으며 i기간전에 주문한 량 q_i는 주문중 제품의 량(on order quantity)이 아니고 현재량(on hand quantity)이 된다.

즉 $L=a+b\log(q_i+1)\leqq i\cdot t_p$에서 $q_i\leqq e^{(i\cdot tp-a)/b}-1=A_i$이면 $q_i'=0$가 되며 그렇지 않으면 q_i가 된다. 이것을 수식으로 만들면 식 8과 같이 된다.

$$q_i=\begin{cases}0, \delta_i\leq A_i \\ q_i \quad \text{otherwise}\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

단 $A_i=e^{(i\cdot tp-a)/b}-1$

식 7 과 같이 표현되는 Q의 분포함수를 분석적인 방법으로 유도해 내려면 이산 확률분포의 형태를 지니는 각 q_i'에서 $n=2$ 이면 최소한 4 개의 구간으로 나뉘어 $g(Q)$가 계산되어야 하며, n이 증가함에 따라 2^n만큼 증가하게 된다. 따라서 $g(Q)$를 분석적인 방법으로 유도하려는 시도는 현실적으로 불가능하게 받아들여진다.

본 논문에서는 이러한 Q의 분포함수를 추정하기 위해 4 개의 매개변수를 가진 분포함수의 체계를 사용한다. 이같은 분포함수의 체계는 Pearson 체계를 비롯해서 Schmeiser—Deutsch의 분포체계등이 있다.

본 논문에서는 여러 함수형태를 가지면서 관측되어 질 수있는 모든 분포함수에 유사한 분포함수를 제공해 주는 Pearson체계로 Q의 확률밀도 함수를 추정하도록 한다. Pearson 체계는 식 3 을 만족하는 분포함수들로 구성되어진다. 그리고 아래의 4 개의 변수에 의하여 분포함수가 결정된다.

$$\begin{cases} a=-\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)/A \\ \quad =\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)\;/A' \\ b_0=-\mu_2(4\mu_2\mu_4-3\mu_3^2)/A \\ \quad =-\mu_2(4\beta_2-3\beta_1)/A' \\ b_1=-\mu_3(\mu_4+3\mu_2)^2/\mathrm{A} \\ \quad =-\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)\;/A' \\ b_2=-(2\mu_2\mu_4-3\mu_3^2-6\mu_2^3)/A \\ \quad =-(2\beta_2-3\beta_1-6)\;/A' \end{cases}$$

$$\text{단}\begin{cases} A=10\mu_4\mu_2-18\mu_2^3-12\mu_3 \\ A'=10\beta_2-18-12\beta_1 \end{cases}$$

최빈값 $X=a$를 원점으로 식 3 을 X에 관해 미분하면,

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\,\frac{xf}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

$$=\frac{f(b_0-b_2x_2x^2)}{(b_0+b_1x+b_2x^2)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

식 9 에서 보면 2 개 이상의 변곡점을 가질수 없으며 변곡점이 2 개 일때는 변곡점들은 최빈값과 같은 거리에 위치한다. 또한 식 3 에서 보면 $df/dx=0$ 이며, $f=0$ 일때 $df/dx=0$ 이므로 Pearson체계는 한개의 최빈값을 가지며, X 축에 양 끝점에서 0 에 접근하는 분포함수를 포함함을 알수있다.

이외에 Pearson 분포함수의 특수한 형태로 U형(U-shaped)과 J형(J-shaped)의 분포함수도 있다. 적용 분포함수를 결정해 주기위해 매개변수의 값을 Pearson의 PDF에 대입하여 적분으로부터 해를 구할수도 있으나 일반적으로 type결정기준 (K)에 의해 type를 결정한 다음 선정된 type의 분포함수가 가진 4 개의 매개변수를 결정해 주는 절차를 따른다.

4 개의 매개변수를 결정하기 위해 1차에서 4 차까지의 중심화 모멘트(first four central moment)를 사용한다.

본 논문의 제품인도기간에 관한 모형에 의하면 주문중 제품의 량은 식 7 과 같이되어 4 개의 모멘트는 다음 식으로부터 구해질 수 있다.

$$U_1=E(Q)=\sum_{i=0}^{n} E(q_i')$$

$$U_2=E(Q-E(Q))^2=\sum_{i=0}^{n} E(q_i'-E(q_i'))^2$$

$$U_3=E(Q-E(Q))^3=\sum_{i=0}^{n} E(q_i'-E(q_i'))^3$$

$$U_4=E(Q-E(Q))^4=\sum_{i=0}^{n} E(q_i'-E(q_i'))^4$$

$$+6\sum_{i>j}^{n}\sum_{i=0}^{n} E(q_i'-E(q_i'))^2$$

$$\cdot\, E(q_j'-E(q_i')^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

이때

$$\begin{cases} E(q_i'-E(q_i'))^2=E(q_i')^2-(E(q_i'))^2 \\ E(q_i'-E(q_i'))^3=E(q_i)^3 \\ \qquad -3E(q_i')^2\,E(q_i')+2\,(E(q_i'))^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(q_i' - E(q_i'))^4 = E(q_i')^4 \\ -4E(q_i')^3 E(q_i') + 6E(q_i')^2 \cdot (E(q_i'))^2 \\ -3(E(q_i'))^4 \quad \cdots\cdots (11) \end{cases}$$

단, $$E(q_i)^k = \int_{A_i}^{q_{max}} {q_i'}^k f(q_i') dq_i',$$

$$K = 1, 2, 3, 4 \quad \cdots\cdots (12)$$

식10으로부터 Shewnessα_3와 Kurtosis α_4를 구하면

$$\begin{cases} \alpha_3 = U_3 / U_2^{1.5} \\ \alpha_4 = U_4 / U_2^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots (13)$$

체계의 매개변수를 결정하기 위해 흔히 U_3, U_4 대신 α_3, α_4를 사용한다. 주문중 제품의 량에 관한 확률밀도함수를 추정하기 위한 순서를 도표로 작성해 보면 다음과 같은 순서가 된다.

1. 주문중 제품의 량에 관한 식10의 4개의 모멘트를 계산한다.

2. 4개의 모멘트로부터 식13의 α_3, α_4, β_1, β_2를 각각 구한다(단, $\beta_1 = \alpha_3^2$, $\beta_2 = \alpha_4$)

3. 식5에 β_1, β_2를 대입하여 type 결정기준 K를 구한다.

4. K에 의해 Pearson체계의 type을 결정한다. (표1 참조)

5. type결정후 그에 해당하는 변수로 U_1, U_2, α_3, α_4를 구한다.

6. 순서5와 순서 2를 같게 놓고 분포함수의 4개의 매개변수의 값을 구한다.

위와 같은 6단계 절차를 통해 Q에 관한 분포함수를 Pearson체계로부터 구한다. 여기서 얻어진 확률밀도함수를 앞에서 언급한 $h(v)$에 대체시켜 최적해(Optimal Solution)을 구할수 있다.

Ⅲ. 결　론

본 논문에서는 제품인도기간에 관한 모형을 발주량의 함수로 놓았고, 그 함수의 모형을(tp, Z) 재고정책에 적용하여 연구해 보았다. 주문중 제품의 량에 관한 분포함수를 Pearson 체계에 의해 유도하고, 이것을 이용하여 비용함수와 최적 주문수준을 유도해 보았다.

Pearson체계에 의한 분포함수 추정은 적합도 검정을 통해 바람직한 것으로 밝혀졌다. 본 논문은 Pearson체계를 이용한 확률적 제품인도기간의 현실화 방안을 강구했다는 점에 의의를 들 수 있으며, 이같은 현실적인 모형을 개발함으로써 재고관리비용에 있어서 큰 효과를 볼 수 있다.

본 논문의 제품인도기간 모형에서 제품인도기간이 커질수록 비용상의 효과가 상당히 커지는 결과를 감도분석을 통해 밝힐수 있었으며, 특히 높은 재고수준이 요구되어지는 상황하에서는 이같은 효과가 더욱 커진다는 사실을 알 수 있었다.

결론적으로 본 논문의 제품인도기간에 대한 모형은 높은 재고수준이 요구되며 제품인도기간의 불확실성이 커질때 많은 효과를 볼수있다. 주문중 제품의 량에 관한 확률분포추정의 어려움 등으로 인하여 본 논문에서는 제품인도기간 모형과(tp, Z)체계외의 다른 체계에 대한 적용을 앞으로의 연구과제로 생각할 수 있으며 이 논문은 인하대학교 산업과학 기술연구소의 연구조성비의 일환으로 이루어진 것임을 감사한다.

REFERENCES

1. Bellfatto, W.R. (1974), "*Lead Time Vs. the Production Control System,*" Production and Inventory Management, 2nd Otr., 14-22.
2. Collier, D.A. (1975), "*Lead Time Analysis for Purchased Items,*" Production and Inventory Management, 1st Otr., 25-34.
3. Ferreri, C. (1964), "*A new-frequency Distribution for Single Variate Analysis,*" Statistica (Bologna), 24, 223-251.
4. Gross, D. and Harris, C.M. (1972), "*On One for One Ordering Inventory Policy with State Dependent Lead Time,*" Operations Research, 19, 735-760.
5. Gross, D. and Sorino, A. (1969), "*The Effect of Reducing Lead Time on Inventory Levels-Simulation Analysis,*" Management Science, 16, 61-76.
6. Johnson, N.L. and Kotz, S. (1969), "*Continues Univerate Distribution-1, Distributions in Statistics,*" John Wiley and Sons, N.Y.
7. Kaiman, R.A. (1974), "*A Comparision of E.O.Q. and Dynamic Inventory Models with Safety Stock and Variable Lead Time Consideration*", Production and Inventory Management, 1st Otr., 1-19.
8. Kaplan, R.S. (1979), "*A Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Time,*" Management Science, 10, 491-507.
9. Koopman, B.O. (1936), "*On Distribution Admitting a Sufficient Statistic,*" Transaction of the American Mathematical Society, 39, 399-407.
10. Naddor, E. (1966), Inventory Systems, John Wiley & Sons, Inc., N.Y.
11. Orlicky, J. (1974), *Material Requirements Planning,* Mcgraw-Hill Book Company.
12. Pearson, K. (1895), "*Contributions to the Mathematical Theory of Evolution II. Skew Variation in Homogeneous Material,*" Phylosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A, 186, 343-414.
13. Schmeiser, B.W. (1977), "*A Versatile Four Parameter Family of Probability Distribution Suitable for Simulation,*" AIIE Transaction, 9, 176-181.
14. Sculli, D. and Wu, S.Y. (1981), "*Stock Control with two Suppliers and Normal Lead Times,*" J. Opl. Res. Soc., 3, 1003-1009.
15. Toranzos, F.I. (1952), "*An Asymmetric Bell-Shaped Frequency Curve,*" Annals of Mathematical Statistics, 23, 467-469.
16. Zalkind, D. (1978), "*Order Level Inventory System with Independent Stochastic Lead Times,*" Management Science, 24, 1384-1392.