

냉각부를 갖는 四角形 密閉空間內的 自然對流에 關한 數值解析

Numerical Study of Natural Convection in a Rectangular Enclosure with Cooling Strip

이 정 옥\* 서 정 윤\*\* 김 중 보\*\*  
 ( Lee, Cheong Ouk ) ( Seo, Jeong Yun ) ( Kim, Chong Bo )

ABSTRACT

The influence on natural convection was studied by solving the partial differential equations within a rectangular enclosure which have a cooling strip at the right side wall of the space, a isothermally heated bottom plate and adiabatic two other walls.

Computation was carried out for the range of Grashof number from  $5 \cdot 10^3$  to  $2.5 \cdot 10^5$  with Prandtl number of 0.73. The results have been obtained in cases of four aspect ratios and various strip sizes.

Temperature and Stream function distributions have been plotted using explicit finite difference method in two dimensional, laminar flow, and also mean Nusselt number and Local Nusselt number have been obtained.

NOMENCLATURE

- g : gravitational acceleration
- Gr : Grashof number,  $g\beta H^3(T_h - T_c)/\nu^2$
- h : heat transfer coefficient
- H : height of enclosure
- L : length of cold wall
- $Nu_h$  : local Nusselt number at the hot wall
- $\overline{Nu}$  : mean Nusselt number
- Pr : Prandtl number
- S : distance of center of cold wall from bottom plate
- W : width of enclosure
- u, v : fluid velocities
- U, V : dimensionless velocities
- X, Y : dimensionless coordinate
- x, y : cartesian coordinate
- T : temperature of fluid
- $T_h$  : temperature of the hot wall

- $T_c$  : temperature of the cold wall
- $T_o$  : mean temperature,  $T = (T_h + T_o)/2$
- $c_p$  : specific heat at constant pressure
- p : pressure
- $\overline{P}$  : dimensionless pressure
- $\rho$  : density
- $\beta$  : coefficient of thermal expansion
- $\psi_{max}$  : maximum dimensionless stream function

1. 緒 論

有限體積을 갖는 密閉空間內에서 流體가 加熱 혹은 冷却될 때 發生되는 密度變化에 의한 自然對流 現象은 太陽熱 集熱器, 家庭暖房, 熱絕緣材 (thermal insulation), 原子爐의 設計, 各種 燃料탱크 및 에너지變換系등의 여러 工學分野에 서 應用되는 重要한 物理的 現象이다. 따라서 이러한 密閉空間內에서의 自然對流에 대한 研究가 多角的으로 實驗 및 解析的인 方法에 의해 活潑히 進行되고 있다.

\*인하대학원  
 \*\* 正會員 : 인하대학교 기계공학과

J.O.Wilkes와 S.W.Churchill<sup>1)</sup>은 上下의 두 벽면이 斷熱이고 좌우의 두 벽면중에서 한면이 加熱되고 다른 면이 冷却되는 直四角形 密閉空間內의 自然對流에 관해 Prandtl 수를 0.733 과 1, 종횡비를 1~3, Grashof 수를 6850~10<sup>5</sup>으로 하여 數值的方法으로 얻은 結果가 解析的인 結果와 잘 一致함을 보였고 G.S. Shiralkar와 C.L. Tien<sup>2)</sup>은 종횡비를 10 이상인 경우에 대하여 수치적으로 연구하여,  $Nu = 0.35Ra^{0.25} Pr^{0.25}$  라는 식을 얻어냈으며, R.K. McGregor와 A.F. Emery<sup>3)</sup>는 다양한 Grashof 수와 Prandtl 수에 따른 流動現象들을 實驗과 비교하며 설명하였으며, S. Kimura와 A. Bejan<sup>4)</sup>은 左右의 한 면으로 일정한 熱流束이 流入되고 다른 한 면으로 流出되는 경우를 수치적으로 연구하였다.

左右의 두 면이 斷熱이고 윗면이 冷却되고 아랫면이 加熱되는 경우를 M.R. Samuels와 S. W. Churchill<sup>5)</sup>이 수치적으로 연구하였다.

H.H. S. Chu와 C.V. S. Patterson<sup>6)</sup>은 左壁의 一部分이 加熱되는 경우에 대해 수치적으로 연구하였으며, B.I. Turner와 R.D. Flack<sup>7)</sup>은 右壁의 一部分이 冷却되는 경우를 實驗的으로 연구하였다.

本 研究에서는 바닥면을 等溫加熱, 右側面의 一部分을 等溫冷却하고, 나머지 면을 斷熱시킨 直四角形 密閉空間內에서 等溫冷却部の 크기 및 位置를 變化시키고, Prandtl 數를 0.73, Grashof 數를  $5 \times 10^3 \sim 2.5 \times 10^5$ , 縱橫比를 0.5 ~ 2까지 變化시킬 때 密閉空間內에서의 流動現象 및 熱傳達現象을 數值解析的으로 究明한다.

## 2. 理論解析

### 2-1. 解析條件 및 基本方程式

고찰하고자 하는 形狀 및 좌표계는 Fig.1과 같으며 아래의 假定에 따라 Navier-Stokes 方程式과 Energy 方程式을 정리하여 支配方程式을

얻는다.

- 1) 유체의 流動은 二次元 層流이다.
- 2) 밀폐공간내의 物理的 性質은 重力項의 密度를 제외하고는 一定하게 維持된다. (Boussinesq approximation)
- 3) 복사열전달, 粘性消散 및 압축성효과는 무시한다.
- 4) 냉각부와 가열부의 온도는 各各 均一하며 일정한 온도차를 유지한다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g\beta(T-T_0) \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

여기서,  $T_0 = \frac{1}{2}(T_h + T_c)$ 이다.

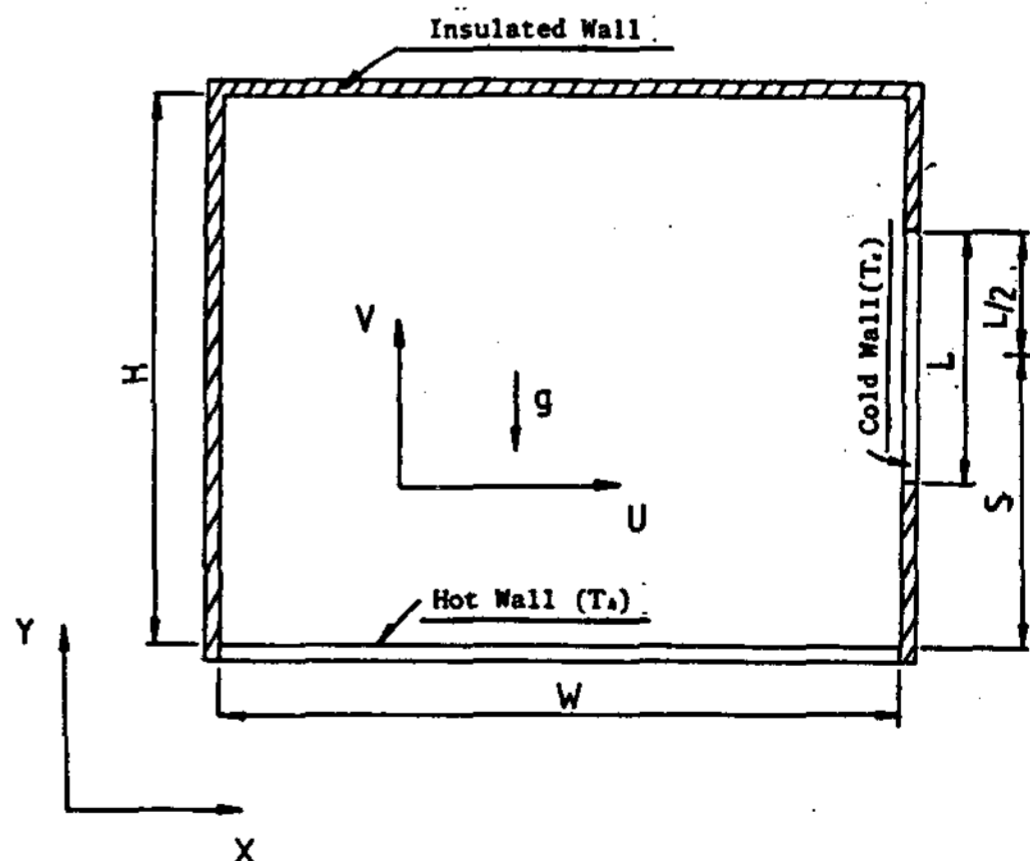


Fig. 1. Coordinate system and Thermal boundary conditions of a rectangular enclosure.

### 2-2. 無次元方程式과 境界條件

解析을 一般化시키기 위하여 다음과 같은 無

次元變數와 無次元數를 정의한다.

$$X = x/H, Y = y/H, U = \frac{H}{\nu} \cdot u, V = \frac{H}{\nu} \cdot v,$$

$$\tau = \frac{\nu}{H^2} \cdot t$$

$$Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}, Gr = \frac{g\beta H^3 (T_h - T_c)}{\nu^2},$$

$$\theta = \frac{2(T - T_o)}{T_h - T_c}, \bar{P} = \frac{H^2}{\rho \nu^2} \cdot P$$

式(1)과 (2)에 위의 무차원수와 무차원 변수를 넣어 정리하면 다음의 式이 된다.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \nabla^2 U \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial V}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} + \nabla^2 V + \frac{1}{2} Gr \cdot \theta$$

.....(6)

式(5)와 (6)을 Y와 X에 대하여 微分한 후 壓力項을 除去하고 Vorticity 方程式  $\Omega = -\nabla^2 \cdot \psi$  를 代入하여 無次元運動方程式을 구하였으며 式(3)과 (4)에 無次元數와 變數를 넣어 無次元에너지 방정식과 연속방정식을 구하였다.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega) + \frac{\partial}{\partial X} (U\Omega) + \frac{\partial}{\partial Y} (V\Omega) = \nabla^2 \Omega + \frac{1}{2} Gr \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\theta) + \frac{\partial}{\partial X} (U\theta) + \frac{\partial}{\partial Y} (V\theta) = \frac{1}{Pr} \cdot \nabla^2 \theta$$

.....(8)

$$\Omega = -\nabla^2 \psi \dots\dots\dots(9)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \dots\dots\dots(10)$$

初期條件 및 境界條件

$$\tau = 0; 0 \leq X \leq W/H, 0 \leq Y \leq 1 \text{에서}$$

$$\theta = 0, \Omega = 0, U = V = 0$$

$$\tau > 0; 0 \leq X \leq W/H, Y = 0 \text{에서}$$

$$\theta = 1, U = V = 0$$

$$0 \leq X \leq W/H, Y = 1 \text{에서}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, U = V = 0$$

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1 \text{에서}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, U = V = 0$$

$$X = W/H, 0 \leq Y \leq S/H - L/(2H)$$

$$S/H + L/(2H) \leq Y \leq 1 \text{에서}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, U = V = 0$$

$$X = W/H, S/H - L/(2H) \leq Y \leq S/H + L/(2H) \text{에서}$$

$$\theta = -1, U = V = 0$$

### 3. 數值解析

#### 3-1. 有限差分方程式

無次元方程式을 有限差分方程式으로 바꿀 때 式(7)과 (8)의 좌변의 두번째 세번째 항은 非線形 이므로 수치적 Scheme의 安定性을 고려하여 Second 方程式과 동일한 식이므로 수렴속도가 빠른 S.O.R. Method를 사용하였다. 境界벽에서의 Vorticity는 Stream function을 Taylor Series로 전개하여 세 점을 이용하는 方法을 썼다.

#### 3-2. Nusselt 數의 計算

加熱部인 바닥面에서의 局所 Nusselt 數와 平均 Nusselt 數는 다음과 같이 計算하였다.

$$Nu_h = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}$$

$$\bar{Nu} = \frac{W}{H} \int_0^{W/H} \left[ -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \right] \cdot dx$$

### 4. 結果 및 考察

본 연구에서는 有限差分方程式의 계산에 Point-iteration Method를 사용하였으며 S.O.R. Method의 overrelaxation factor는 1.5~1.8을, 시간증분  $\Delta \tau$ 는 安定性을 고려하여 0.0005를, 사용한 절점 (grid)의 수는 11 x 11로 하여  $M/V = 10000$ 을 이용하여 計算 하였다.

4 - 1. 冷却部 位置의 影響

Fig.2 과 Fig.3는  $L/H = 0.4, W/H = 1.0$   $Gr = 2.5 \times 10^5$  일때  $S/H$ 의 변화에 따른 流線과 等溫線의 分布를 나타낸 것으로 Fig.2에서  $S/H$  값이 증가하면  $\Psi_{max}$  이 증가되며  $S/H$ 가 0.8인 경우에는 약간의 減少가 생긴다. 이것은  $S/H$ 가 커질수록 부력이 증가되지만  $S/H$ 가 0.8이 되는 경우에는 냉각부의 윗 부분에서의 열전달이 전도에 의해서 이루어지므로 對流에 의해서 열전달이 이루어지는  $S/H$ 가 0.6인 경우보다 흐름이 活潑하지 못한 것으로 생각된다.  $S/H$ 의 변화에 따른 流線의 形態는 냉각부가 있는 방향으로 기울어지고 있음을 볼 수 있다. Fig.3를 보면  $S/H$ 가 0.6일 때까지는 冷却部의 영향이 더 넓은 영역까지 미치게 되지만  $S/H$ 가 0.8인 경우에는 감소되며 위와 동일한 理由에 의한 것으로 사료된다.

Fig.4에서 Grashof 수가 증가될수록 또  $S/H$ 가 감소 될 수록 平均 Nusselt 수가 증가 됨을 알 수 있다.

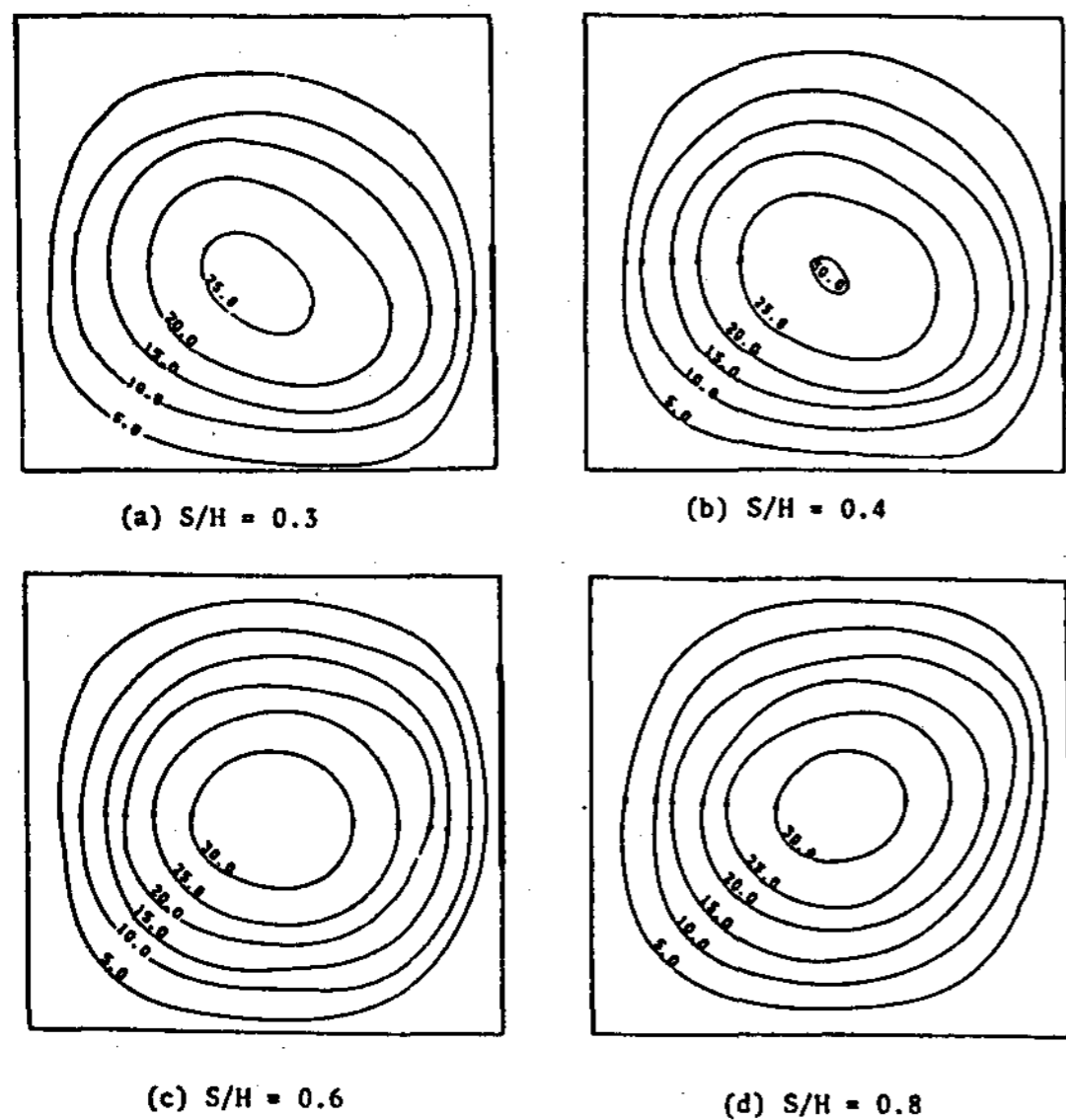


Fig. 2. Streamlines for various cold wall locations. ( $L/H = 0.4, W/H = 1.0, Gr = 2.5 \times 10^5$ )

4 - 2. 冷却部 크기의 影響

Fig.5와 Fig.6는  $S/H = 0.5, W/H =$

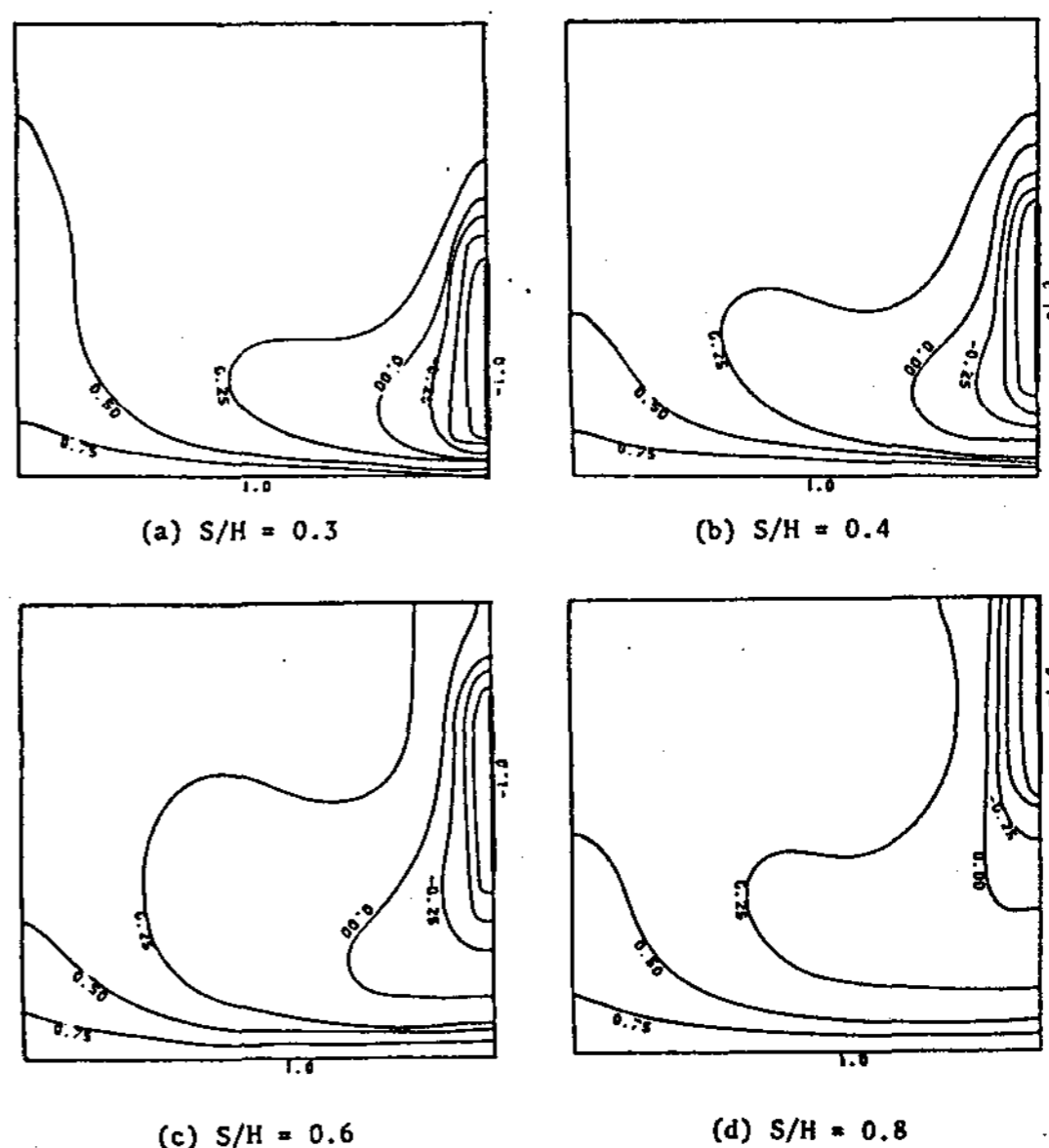


Fig. 3. Isothermal lines for various cold wall locations. ( $L/H = 0.4, W/H = 1.0, Gr = 2.5 \times 10^5$ )

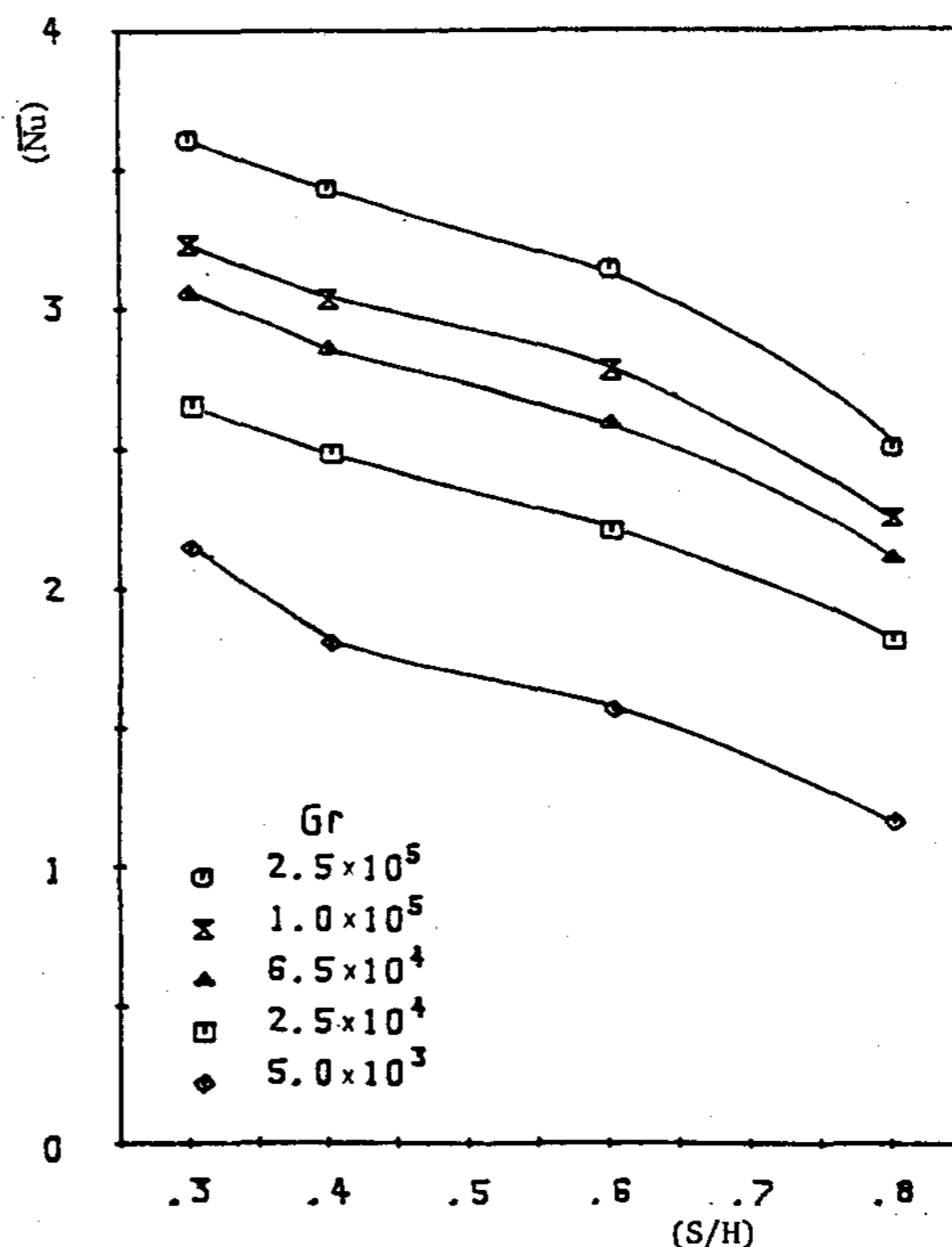


Fig. 4. Effect of cold wall location and Grashof number on rate of heat transfer in a rectangular enclosure. ( $L/H = 0.4, W/H = 1.0$ )

$1.0, Gr = 2.5 \times 10^5$ 인 경우  $L/H$ 의 변화에 따른 流線과 等溫線의 分布를 나타낸 것으로 냉

각부의 크기가 커질수록 浮力이 증가되어  $\psi_{max}$  이 증가되고 냉각부의 영향이 빠른 속도로 더 넓은 영역까지 미치게 됨을 알 수 있다. Fig.7 은 Grashof 수가 증가될수록 平均 Nusselt 수가 증가되고 그 기울기는 변함이 일정하다.

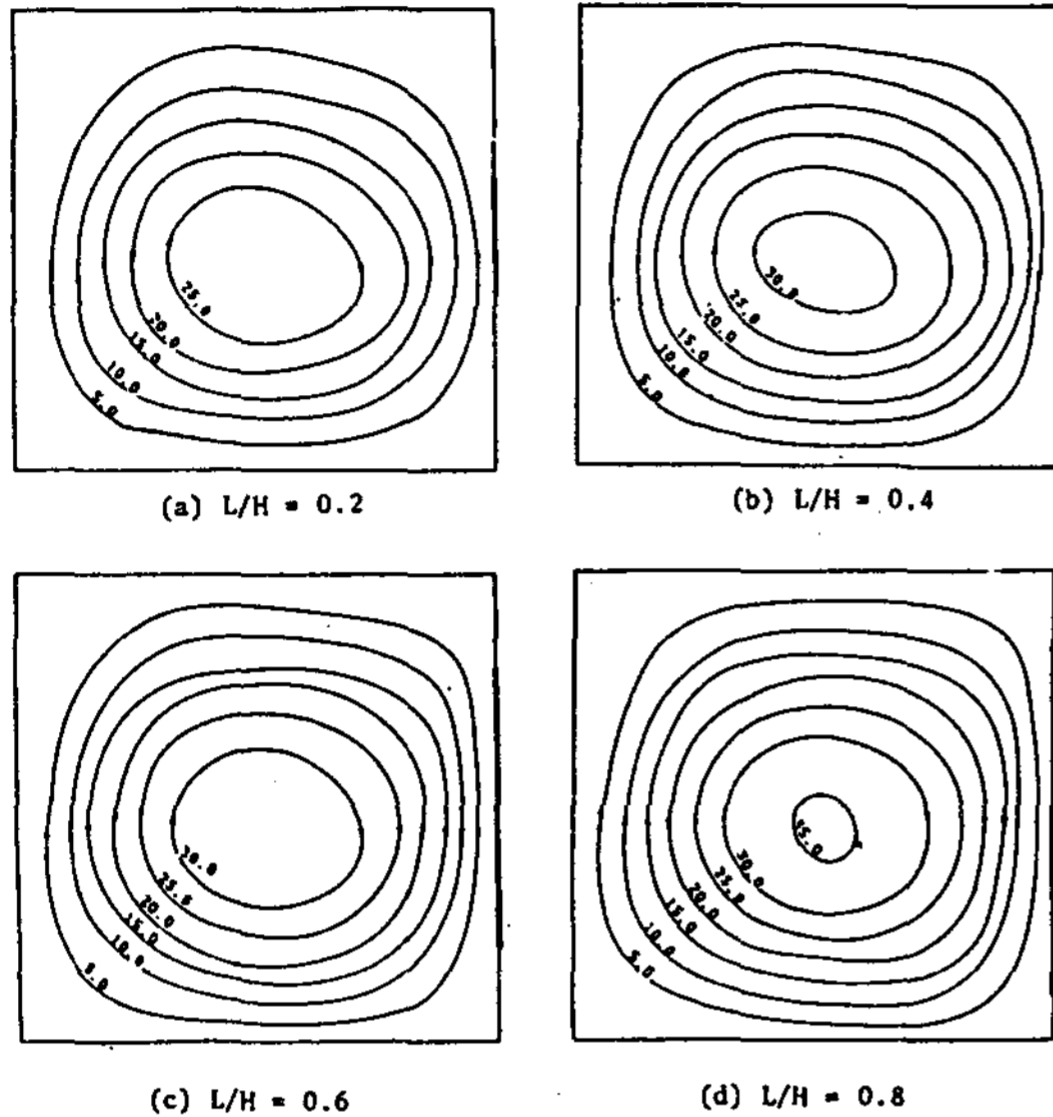


Fig. 5. Streamlines for various cold wall sizes (S/H = 0.5, W/H = 1.0, Gr = 2.5 x 10<sup>5</sup>)

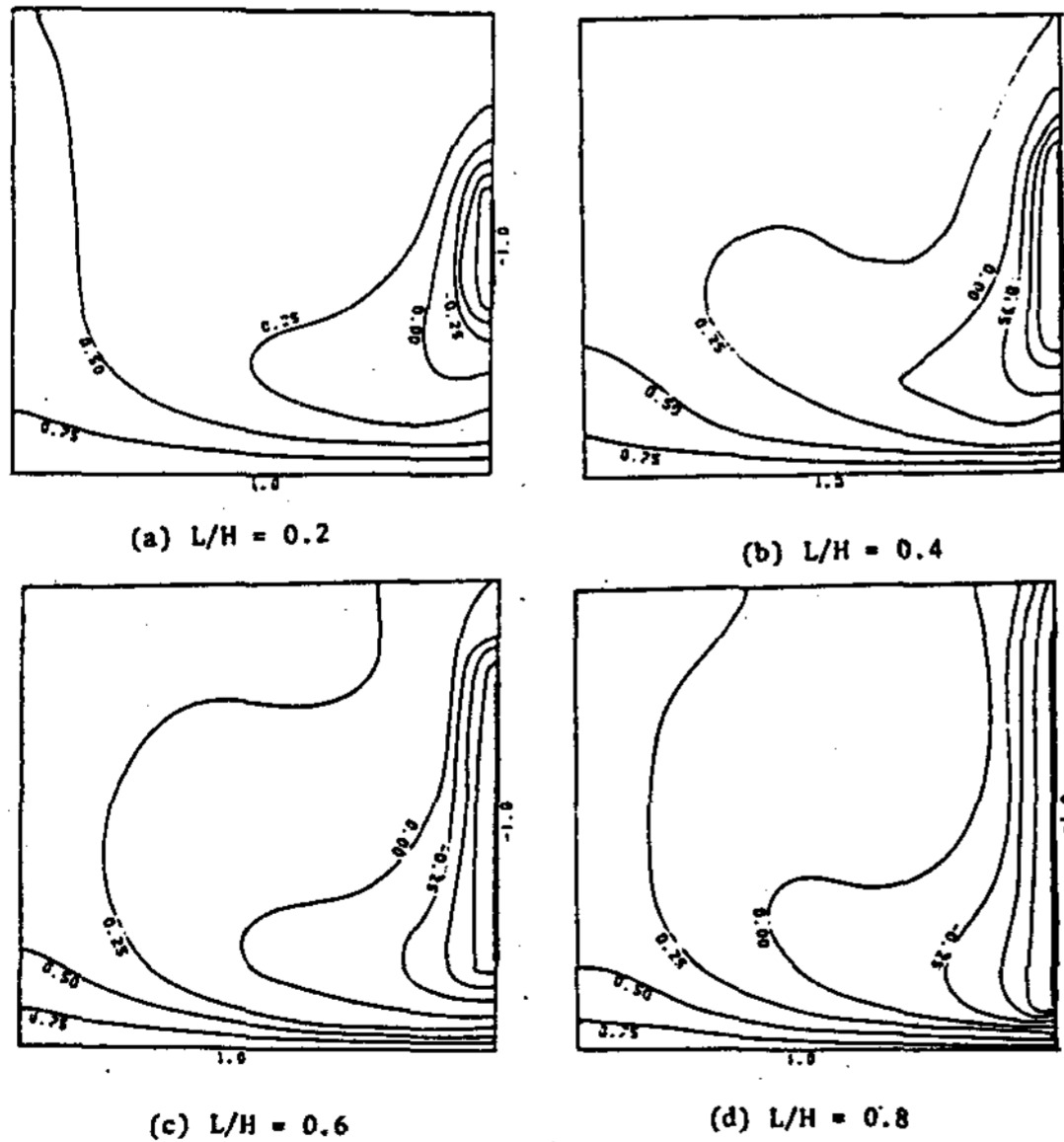


Fig. 6. isothermal lines for various cold wall sizes (S/H = 0.5, W/H = 1.0, Gr = 2.5 x 10<sup>5</sup>)

4 - 3 . 縱橫比의 影響

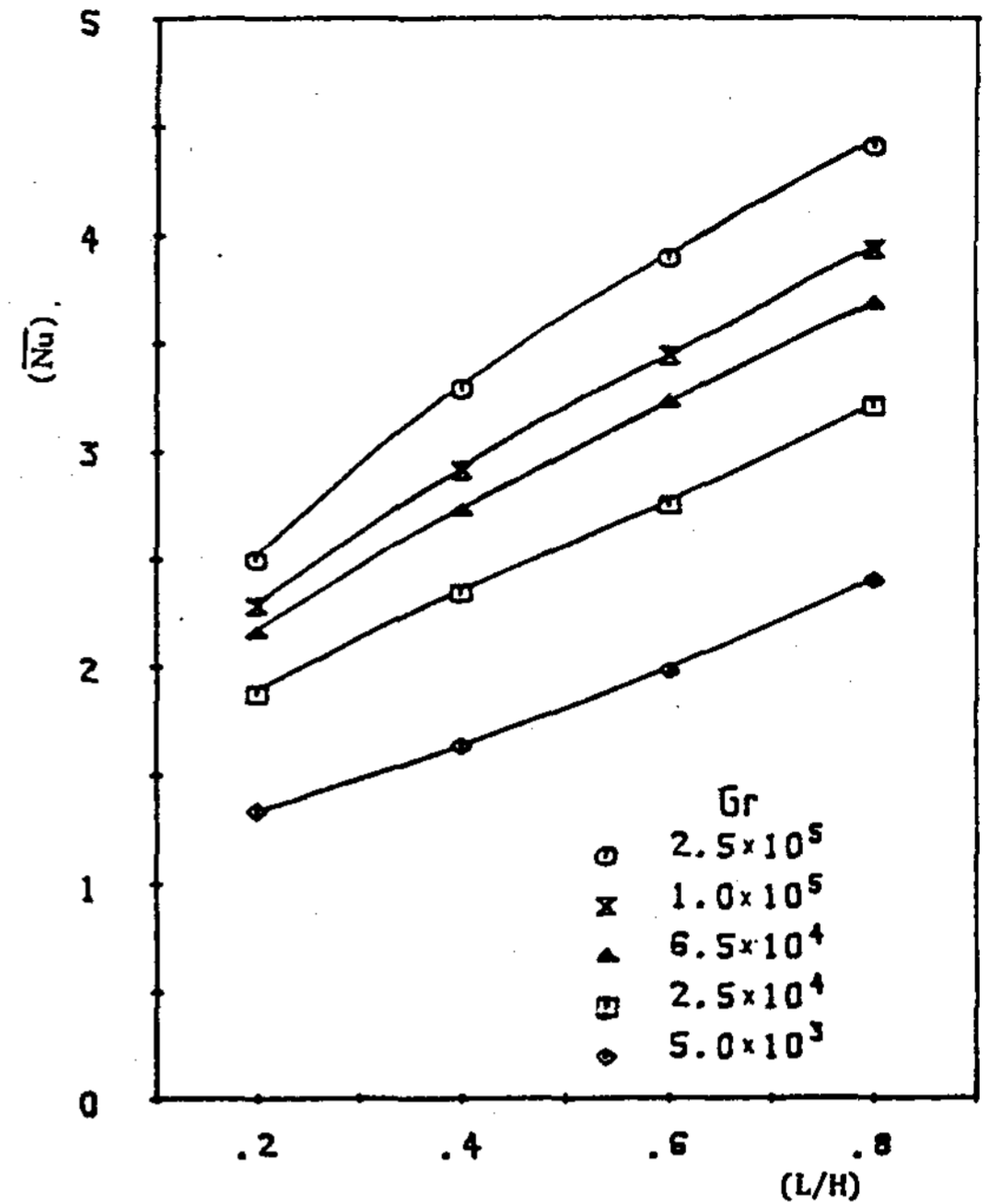


Fig. 7. Effect of cold wall size and Grashof number on rate of heat transfer in a rectangular enclosure (S/H = 0.5, W/H = 1.0)

Fig.8 과 Fig.9 는 S/H=0.5, L/H=0.4, Gr=2.5x10<sup>5</sup> 일때 종횡비의 變化에 따른 流線과 等溫線을 나타낸 것으로 종횡비가 1.0 以上이 되면  $\psi_{max}$  이 약간 減少하며 흐름의 中心點이 冷却部쪽으로 移動하며 이것은 냉각부 근처의 浮力이 다른 部分의 浮力보다 크므로 이 部分에서의 흐름이 活潑해지고 質量保存을 만족키 위하여 흐름의 中心이 冷却部쪽으로 이동하기 때문에 發生되는 것으로 생각된다. 종횡비가 커져도 Venard-cell 이나 Secondary flow가 發生되지 않고 있는데 이는 加熱부와 冷却部가 對稱이 아닌 直角을 이루고 있기 때문으로 생각된다. 종횡비가 증가될수록 冷却部の 영향이 점점 減少하고 있는데 이는 加熱部の 크기에 대한 冷却部の 크기가 相對적으로 작아지기 때문이다.

Fig.10 에서 종횡비가 작아질수록 平均 Nusselt 수가 증가되는 것을 알 수 있는데 이는 加熱部の 크기에 비례하는 冷却部크기의 증가에 기인하는 것으로 생각되며 H.H.S.Chu<sup>6)</sup> 의 연구와 같은 경향을 보이고 있다.

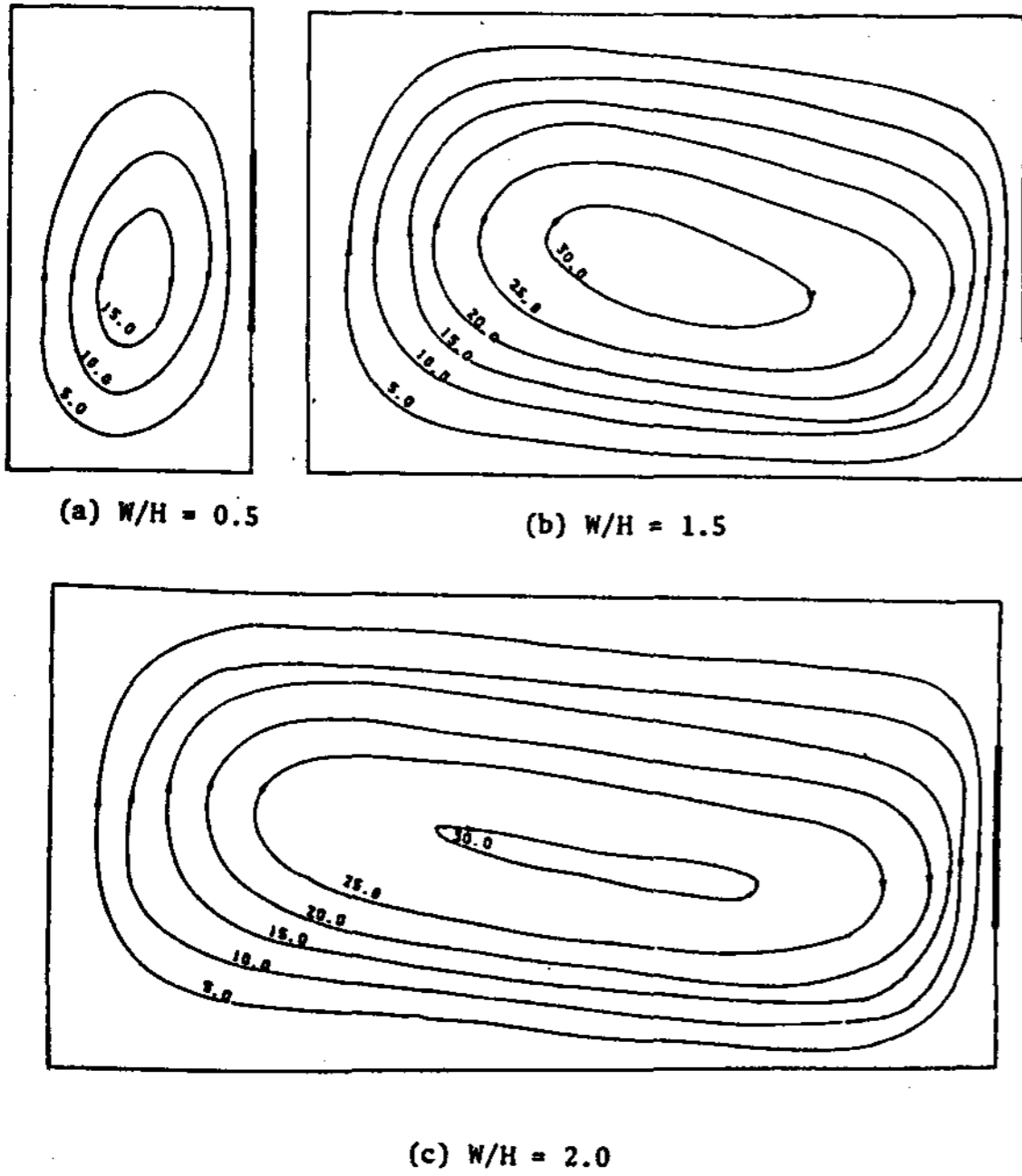


Fig. 8. Streamlines for various aspect ratios (S/H = 0.5, L/H = 0.4, Gr = 2.5 x 10<sup>5</sup>)

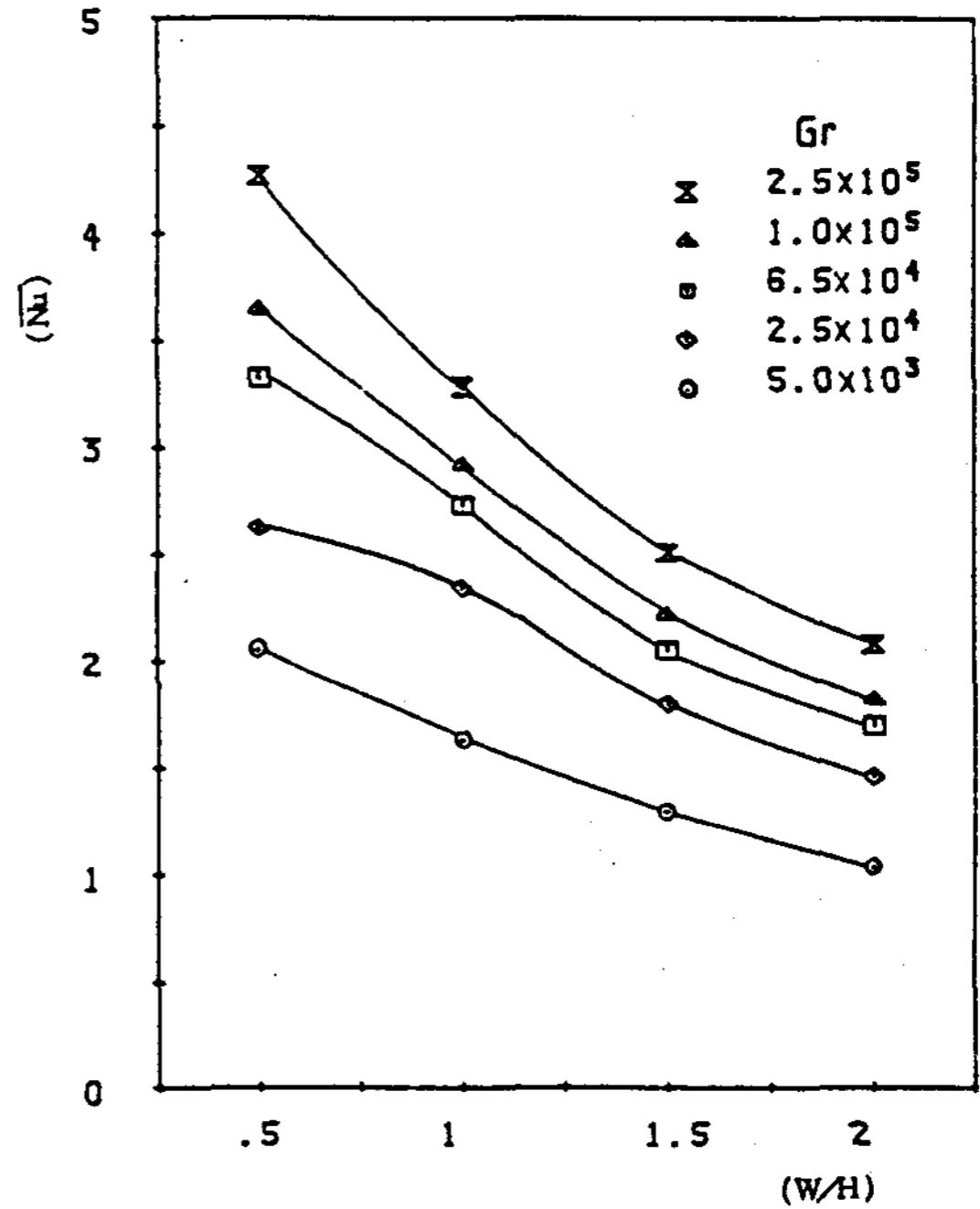


Fig. 10 Effect of aspect ratio and Grashof number on rate of heat transfer in a rectangular enclosure (S/H = 0.5, L/H = 0.4)

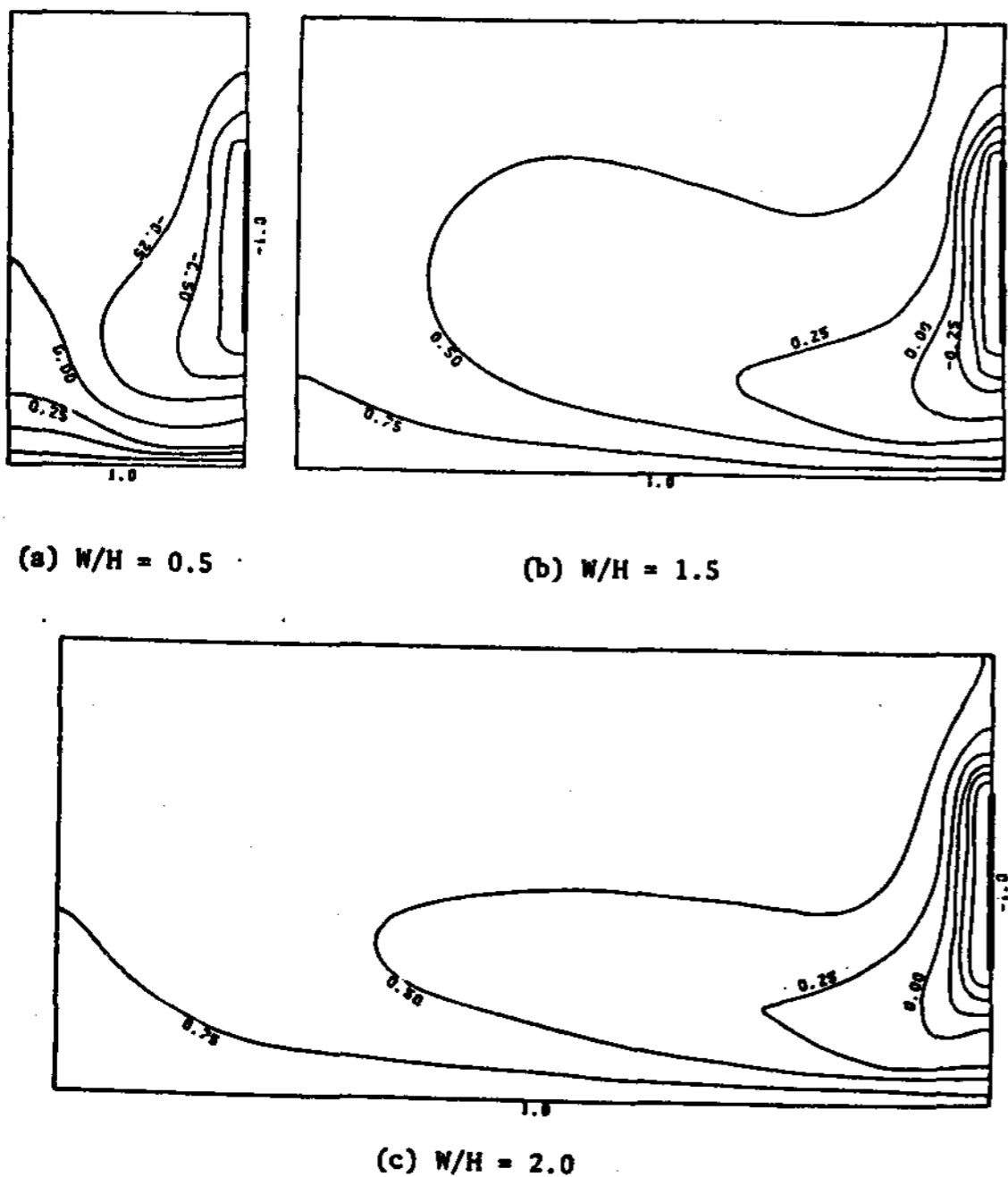


Fig. 9. Isothermal lines for various aspect ratios. (S/H = 0.5, L/H = 0.4, Gr = 2.5 x 10<sup>5</sup>)

4 - 4. Grashof 數의 影響

Fig.11 과 Fig.12은 S/H=0.5, L/H=0.4 W/H=1.0인 경우 Grashof 數의 증가에 따른 流線과 等溫線의 分布를 나타낸 것으로 Grashof 數의 증가에 따라 흐름이 活潑해지고 Grashof 數가 5 x 10<sup>3</sup>인 경우에 A.F. Emery<sup>3)</sup>의 연구에서 밝힌 遷移流動영역으로 볼 수 있다. 等溫線의 分布에서 Grashof 數가 더 커지면 活潑한 흐름에 영향을 받아 等溫線의 傾斜度가 급해짐을 알 수 있다. Grashof 數는 同一한 종횡비를 갖는 경우 溫度의 함수이므로 그림에서 살필 수 있듯이 Grashof 數의 증가는 溫度差를 크게하며 따라서 흐름을 活潑하게 하고 열전달량이 많아진다.

Fig.13는 Grashof 數가 2.5 x 10<sup>4</sup> 이상이 되면서 x/H가 0.9되는 部分에서 局所 Nusselt 數가 감소됨을 볼 수 있는데 이는 흐름이 活潑한 境界層流動이 일어나고 있음을 알 수 있게한다.

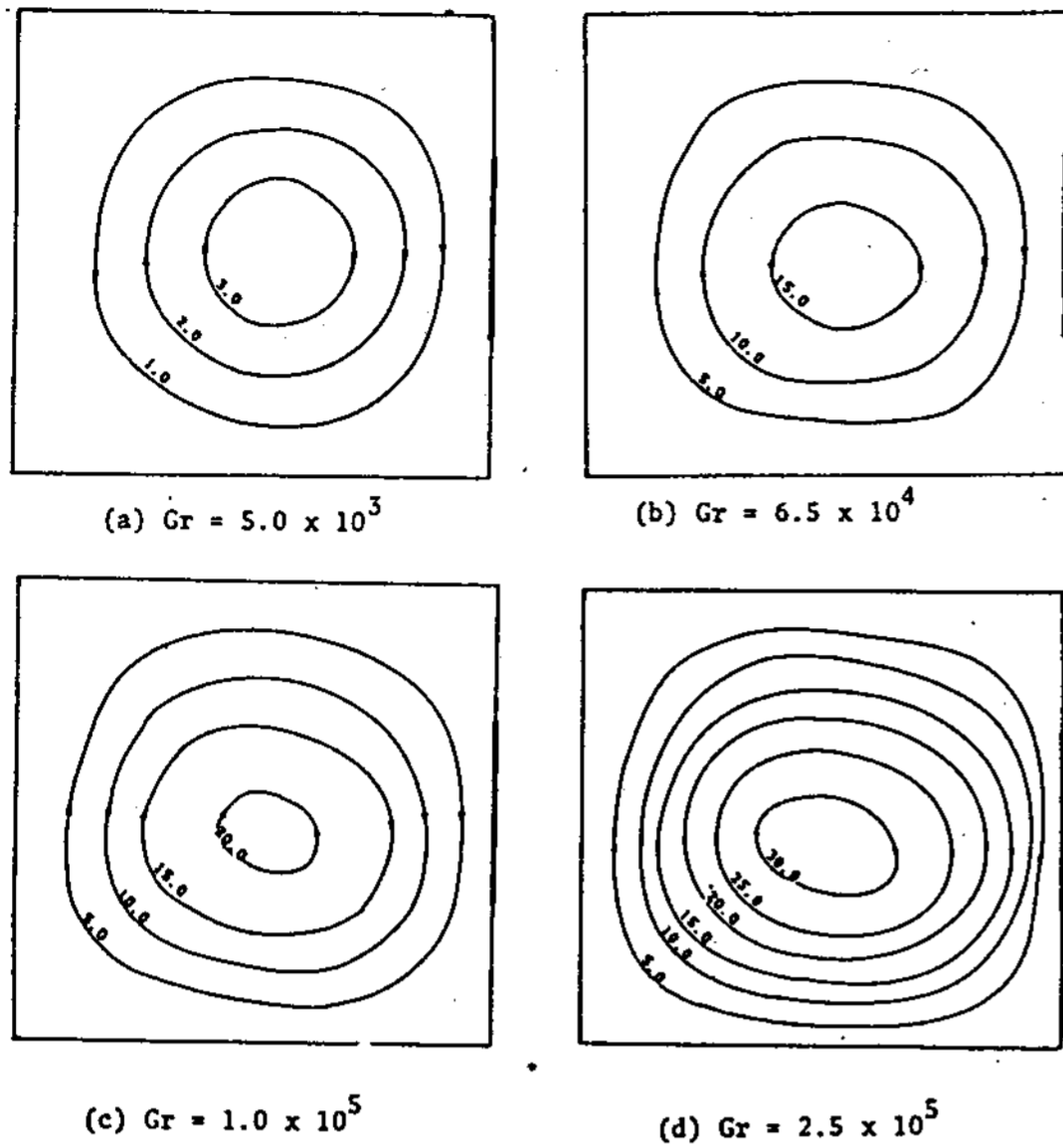


Fig. 11. Streamlines for various Grashof numbers (S/H = 0.5, L/H = 0.4, W/H = 1.0)

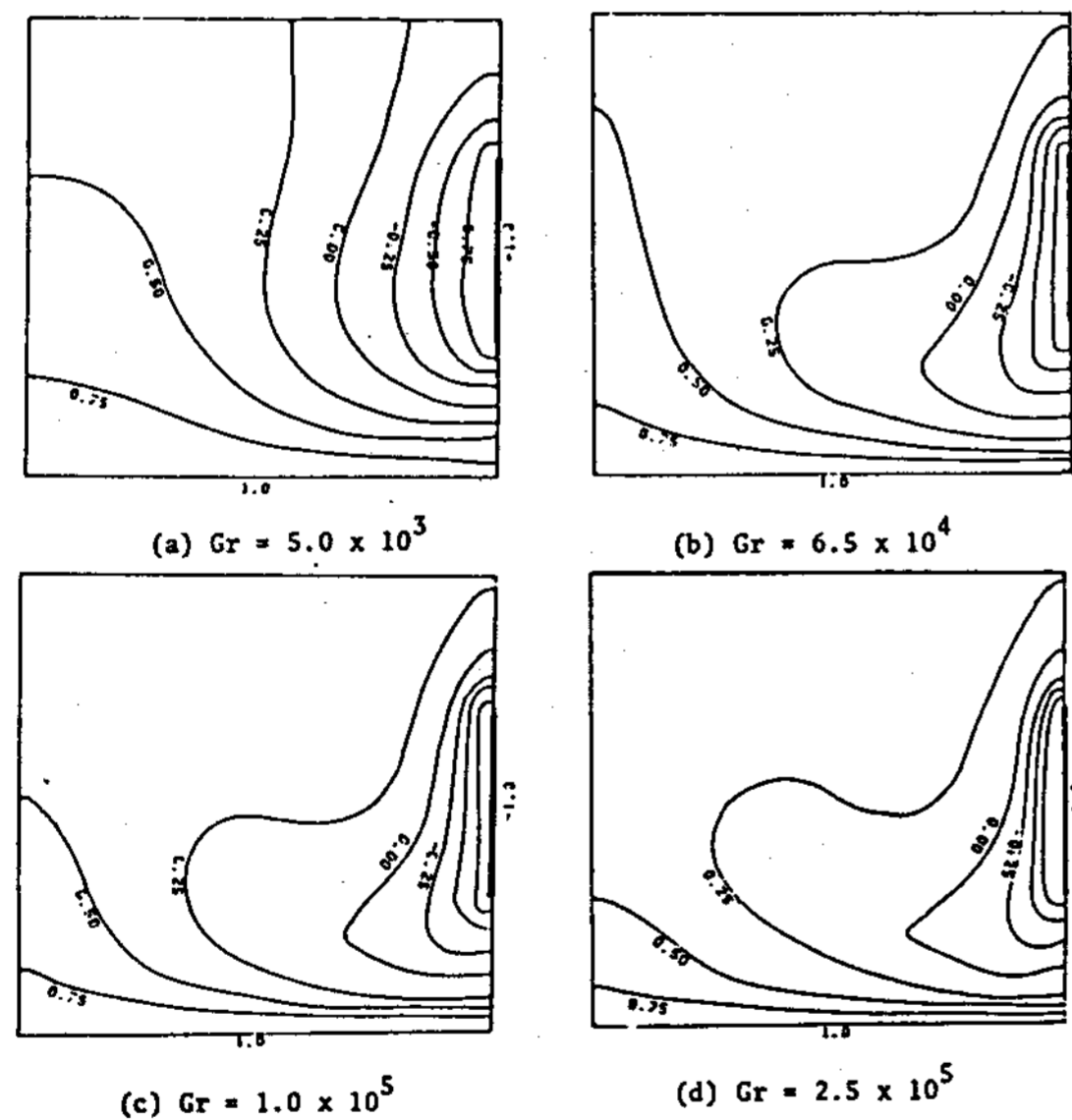


Fig. 12. Isothermal lines for various Grashof numbers (S/H = 0.5, L/H = 0.4, W/H = 1.0)

### 5. 結論

1) 冷却部の 位置가 밑으로 내려갈수록 Nusselt 數는 增加하며, 冷却部の 位置, 즉 S/H 가 0.6일 때에 가장 큰  $\psi_{max}$  값을 갖는다.

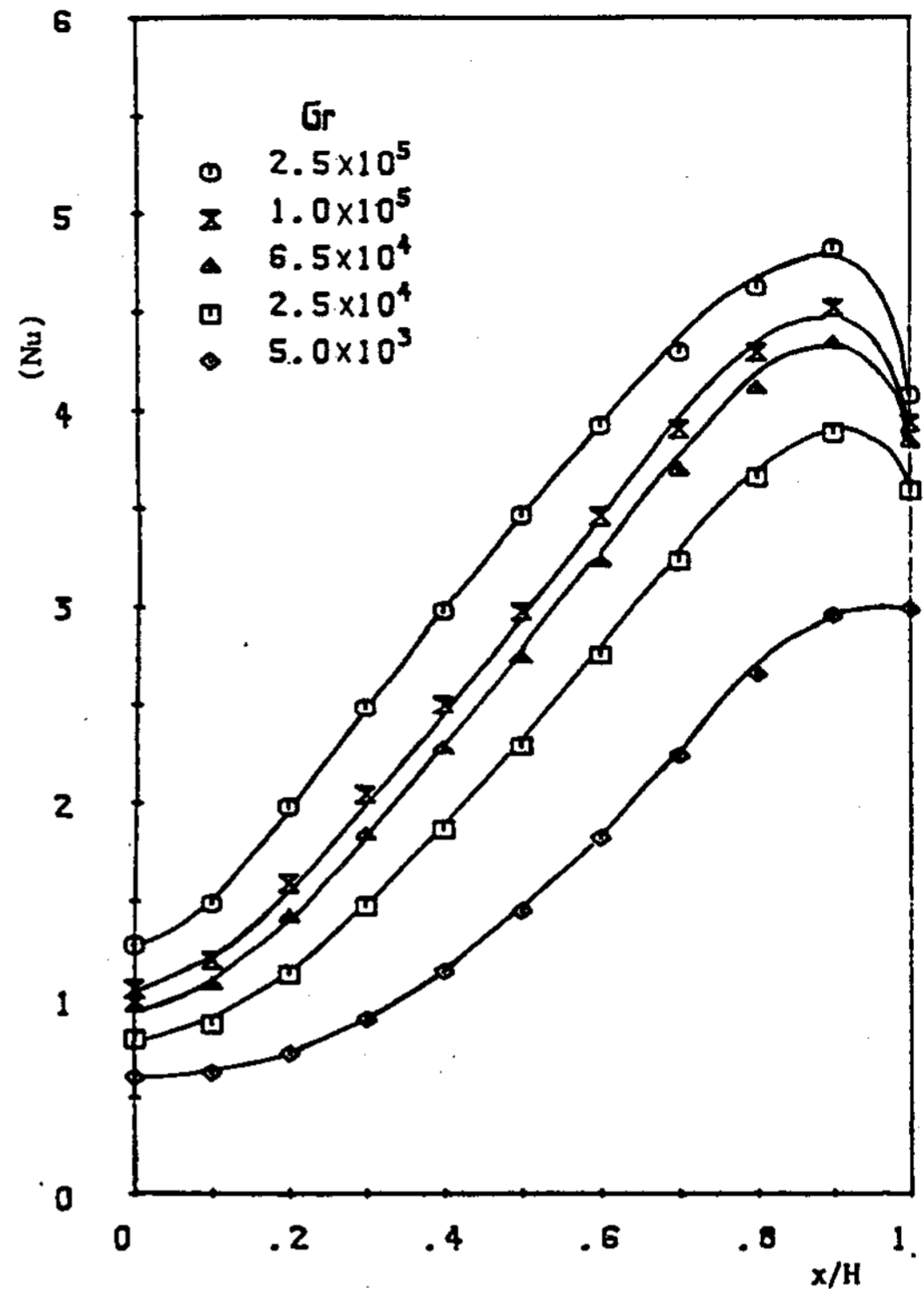


Fig. 13. Local Nusselt number at the hot plate (L/H = 0.4, S/H = 0.5, W/G = 1.0)

2) 縱橫比가 작아질수록 平均 Nusselt 數는 增加하며 縱橫比가 1.0 以上이 되는 境遇에는  $\psi_{max}$  값은 거의 變하지 않는다.

3) 縱橫比가 1.5 以下이고 Grashof 數가  $5 \times 10^3$  인 境遇에는 遷移流動이 일어나며 Grashof 數가  $2.5 \times 10^4$  以上인 경우에는 境界層流動이 된다.

### REFERENCES

1. J.O. Wilkes and S.W. Churchill, "The Finite-Difference Computation of Natural Convection in a Rectangular Enclosure," A.I. Ch.E. Journal, Vol. 12, 1966, pp. 161-166.
2. G.S. Shiralkar and C.L. Tien, "A Numerical Study of Laminar Natural Convection in Shallow Cavities," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 103, 1981, pp. 226-231.

3. R.K. Macyregor and A.F. Emery, "Free Convection through Vertical Plane Layers-Moderate and High Prandtl Number Fluids," ASME Journal of Heat Transfer, 1969, pp. 391-403.
4. S. Kimura and A. Bejan, "The Boundary Layer Natural Convection Regime in a Rectangular Cavity with Uniform Heat Flux from the Side," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 106, 1964, pp. 98-103.
5. M.R. Samuels and S.W. Churchill, "Stability of a Fluid in a Rectangular Region Heated from Below," A.I.C.H.E. Journal, Vol. 13, 1967, pp. 77-85.
6. H.H.S. Chu and S.W. Churchill and C.V.S. Patterson, "The Effect of Heater Size, Location, Aspect Ratio, and Boundary Condition on Two Dimensional, Laminar, Natural Convection in Rectangular Channels," ASME Journal of Heat Transfer, 1976, pp. 194-201.
7. B.L. Turner and R.D; Flack, "The Experimental Measurement of Natural Convective Heat Transfer in Rectangular Enclosures with Concentrated Energy Sources," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 102, 1980, pp. 236-241.
8. Patrick J. Roache, "Computational Fluid Dynamics," Hermosa publishers, 1976.