Comm. Korean Math. Soc. 1 (1986)

# 양자통계역학에서 Green함수, 하밀토니안 및 양자동역학계 구축
# (Green's Functions, Hamiltonian and Construction of Quantum Dynamical Systems in Quantum Statistical Mechanics)

박용문 · 이범수 · 이현덕 · *이현우

## 1. 머 릿 말

통계역학에서 물리학적으로 흥미가 있는 통계역학모델에 대하여 유한영역내에서 정의되는 상관함수(correlation functions)와 같은 통계역학적 양의 무한체적 극한(infinite volume limits)의 존재성을 증명하고 이 결과로 부터 동역학계(dynamical systems)을 구축하여 여러가지 수학적 구조와 물리학적 성질을 규명하는 것은 중요하다[1, 4, 9].

무한체적 극한이론을 구축하는 방법에는 취급하는 대상(모델)에 따라서 여러가지 방법이 있지만 무계양자스핀계(unbounded quantum spin systems)나 연속공간의 양자질점계(quantum particle systems in continuous spaces)와 같이 복잡한 모델에는 직접적인 접근방법이 불가능하고 일반적으로 Green함수방법(Green's function method)을 사용한다[1, 5]. 이때 건축된 동역학계의 시간진행군과 불변벡터인 modular 상태(state)에서 유도되는 Tomita-Takesaki의 modular automorphism 사이에 관계가 모호하며[1, 5, 6] 이들 사이의 관계를 명확하게 규명하는 것은 취급하는 대상의 구체적인 구조 및 성질을 규명하는데 필요하다.

본 논문에서는 유한영역에 정의되는 Green함수에 대하여 몇가지 가정을 한후 무한체적 극한의 존재성을 증명하고 동역학계를 구축하려한다. 구축된 동역학계를 $(\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{A}}, U(t), \Omega)$라 하자, 여기서 $\mathscr{H}$는 Hilbert공간, $\tilde{\mathscr{A}}\subset L(\mathscr{H})$는 von-Neumann대수, $U(t)$는 유니타리 작용소로 이루어진 시간진행군이고 $\Omega$는 불변벡터이다. 일반적으로 $\tilde{\mathscr{A}}$의 부분대수 $\mathscr{A}$가 존재하고 $\Omega$는 $\mathscr{A}$의 modular벡터가 된다. $\alpha_t$를 $\mathscr{A}$에 정의되는 modular automorphism이라 하자, 주어진 가정하에서 $\mathscr{A}=\tilde{\mathscr{A}}$ 및 $\alpha_t(A)=U(t)AU(t)^*$가 됨을 증명하려 한다.

결과의 한가지 응용으로서 polyacetylene의 통계역학모델을 취급하려 한다. 몇가지 선험적 계산(apriori estimates)를 유도한 후 이로부터 대응되는 Green함수가 가정한 모든 조건을 만족시킴을 보이겠다. 끝으로 무

계양자스핀계 (unbounded quantum spin systems)에 대한 응용의 가능성에 대하여 논하려 한다.

본 논문의 내용에 대하여 간단하게 설명하자, 제 2절에서 필요한 기호 및 정의를 도입한후 유한영역 Green함수에 대하여 몇가지 가정을 한 후 이 논문의 결과(정리 2.2)를 서술 하겠다. 결과의 증명은 제 3절에서 한다. 제 4절은 본 논문의 결과를 polyacetylene모델에 응용하는데 활해한다.

## 2. 기호, 정의 및 결과

$\Lambda$를 $\nu$-차원 격자(또는 역속)공간 $\boldsymbol{Z}^\nu(\boldsymbol{R}^\nu)$의 유계영역 (bounded region)이라 하자. 각 $\Lambda\subset\boldsymbol{Z}^\nu(\boldsymbol{R}^\nu)$에 대하여 Hilbert공간 $\mathscr{H}_\Lambda$, 국소측정 가능한 것 (local observables)으로 이루어진 $C^*$-대수 $\mathscr{A}_\Lambda\subset L(\mathscr{H}_\Lambda)$ 및 자기수반 작용소 (self-adjoint operator)인 하밀토니안 $H_\Lambda$를 대응시키자. $(\mathscr{H}_\Lambda, H_\Lambda, \mathscr{A}_\Lambda)$의 선책은 취급하는 모델에 따라서 결정된다[1, 4]. 또 $\exp(itH_\Lambda)$는 $\mathscr{A}_\Lambda$의 원소가 된다고 하자. 만약 $\Lambda_1\cap\Lambda_2=\phi$이면 $\mathscr{H}_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}=\mathscr{H}_{\Lambda_1}\otimes\mathscr{H}_{\Lambda_2}$이고 $\mathscr{A}_\Lambda$는 항등원 (identity)을 갖고 있다고 가정하자, 따라서 $\mathscr{A}_{\Lambda_1}$은 $\mathscr{A}_{\Lambda_1}\otimes\mathbf{1}_{\Lambda_2}$와 동치이다. 다음과 같이 정의되는 $C^*$-대수

$$\mathscr{A}=\Big(\bigcup_{\Lambda\subset\boldsymbol{Z}^\nu(\boldsymbol{R}^\nu)}\mathscr{A}_\Lambda\Big)^- \tag{2.1}$$

를 준 국소측정가능 (quasi-local observables)한 대수라고 한다. $\mathscr{A}$는 항등원 1를 갖고 있다.

유한체적에서 분활함수 (partition function) $Z_\Lambda$ 및 Gibbs상태 (state) $\omega_\Lambda$는

$$Z_\Lambda=Tr_{\mathscr{H}_\Lambda}(e^{-\beta H_\Lambda})$$
$$\omega_\Lambda(A)=Z_\Lambda^{-1}Tr_{\mathscr{H}_\Lambda}(Ae^{-\beta H_\Lambda}),\quad A\in\mathscr{A}_\Lambda \tag{2.2}$$

로 정의된다. 물론 $\exp(-\beta H_\Lambda)$는 trace class에 속한다고 가정한다. $\alpha^\Lambda$를

$$\alpha_t^\Lambda(A)=e^{itH_\Lambda}Ae^{-itH_\Lambda},\quad A\in\mathscr{A}_\Lambda \tag{2.3}$$

로 정의되는 $\mathscr{A}_\Lambda$에서의 시간진행 automorphism이라고 하면 유한체적 $\Lambda$에서의 Green함수는

$$G_\Lambda(A,B;t)=\omega_\Lambda(A\alpha_t^\Lambda(B)) \tag{2.4}$$

로 정의된다. 부등식

$$|G_\Lambda(A,B;t)|\le\|A\|\;\|B\| \tag{2.5}$$

는 자명하게 설립한다. 비록 상태 (state) $\omega_\Lambda$는 $\mathscr{A}_\Lambda$에 정의되지만 Hahn-

Banach 정리에 의하여 $\mathscr{A}$로 확장하여 $\mathscr{A}$에서의 상태로 볼 수 있다. 한편 부등식 (2.5)와 Tychonoff 정리를 사용하면 다음 결론에 도달한다. 즉 $Z^\nu(\boldsymbol{R}^\nu)$로 수렴하는 부분네트(subnet) $\{\Lambda_\alpha\}$가 존재해서 모든 $t\in\boldsymbol{R}$, $A, B\in\mathscr{A}$에 대하여 무한체적 극한(infinite volume limit)

$$G(A,B;t)=\lim_{\Lambda_\alpha\to Z^\nu(\boldsymbol{R}^\nu)} G_\Lambda(A,B;t) \tag{2.6}$$

이 존재한다. 또한

$$\omega(A)=G(A,1;0) \tag{2.7}$$

는 준 국소 $C^*$-대수 $\mathscr{A}$의 상태(state)를 정의한다. 가능하다면 $\mathscr{A}$에 정의되는 automorphism $\alpha$가 존재하여

$$G(A,B;t)=\omega(A\alpha_t(B)) \tag{2.8}$$

가 성립하게 되는 것을 원하게 된나 일반적으로는 기대하기 힘들다. 본 논문에서는 $G_\Lambda(A,B;t)$가 특정한 조건을 만족시키면 (2.8)이 성립되는 것을 보이겠다.

먼저 유한체적 그린함수 $G_\Lambda(A,G;t)$가 만족시키는 성질들을 종합하여 보자.

**보조정리 2.1.** $G_\Lambda : \mathscr{A}_\Lambda\times\mathscr{A}_\Lambda\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$를 (2.4)에서 정의된 Green함수라 하면 $G_\Lambda$는 다음 성질을 만족시킨다.

(a) $A\to G_\Lambda(A,B;t)$는 선형(linear)이다.

(b) $B\to G_\Lambda(A,B;t)$는 선형이다.

(c) $t\to G_\Lambda(A,B;t)$는 연속이다.

(d) $G_\Lambda(A,CB;0)=\omega_\Lambda(A\ CB)=G_\Lambda(AC,B;0)$

(e) $G_\Lambda(1,1,0)=\omega_\Lambda(1)=1$

(f) 수열 $\{A_i\}_{1\le i\le n}$과 $\{t_i\}_{1\le i\le n}$에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$\sum_{i,j=1}^{n} G_\Lambda(A_i^*,\ A_j;\ t_i-t_j)\geq 0$$

(g) $[\alpha^\Lambda$-KMS조건$]$ $\cdot$ $D_\beta\subset\boldsymbol{C}$를

$$D_\beta=\{z\in t\boldsymbol{C} : 0<Imz<\beta\}$$

라 정의하자. 모든 $A,B\in\mathscr{A}_\Lambda$에 대하여 $D_\beta$에서 해석적(analytic)인 복소수함수 $G_{A,B}$가 존재해서 $\bar{D}_\beta$에서 연속이고 모든 $t\in\boldsymbol{R}$에 대하여

$$G_{A,B}(t)=G_\Lambda(A,B;t)$$

$$G_{A,B}(t+i\beta)=G_\Lambda(B, A;-t)$$

를 만족시킨다.

**증명** : (a)～(b)는 (2.2)～(2.4)에 있는 정의로부터 쉽게 유도되는 결과다. (g)는 (2.4)와 (2.2)에 정의된 Gibbs상태 $\omega_\Lambda$이 KMS조건

$$\omega_\Lambda(A\alpha_{i\beta}(B))=\omega_\Lambda(BA) \tag{2.9}$$

를 만족 시키는 결과에서 유도된다. KMS조건 (2.9)와 성질(g)가 동치임은 참고문헌 [1]의 정리 (5,3,6)에 증명되어 있다.

다음에는 본 논문의 가장 중요한 결과를 기술하겠다.

**정리 2.2.** 모든 유한영역 $\Lambda$에 대하여 $\mathscr{A}_\Lambda$의 조밀한(dense) 부분집합 $\mathscr{B}_\Lambda$가 존재해서 모든 $A, B\in\mathscr{B}_\Lambda$에 대하여 $t$의 함수로서 $G_\Lambda(A, B;\cdot)\in C^\infty(\boldsymbol{R})$이고

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}G_\Lambda(A, B;t)\right|+\left|\frac{d^n}{dt^n}G_\Lambda(B, A;-t)\right|\leq \| A| C_B{}^n n!$$

를 만족시키는 $\Lambda$에 무관한 상수 $C_B$가 존재한다고 가정하자. $\omega$를 (2.7)에서 정의된 $\mathscr{A}$의 상태(state)라고 하고 $(\mathscr{H}_\omega, \pi_\omega(\mathscr{A}), \Omega_\omega)$를 $\omega$의 GNS표현(representation)이라 하면 다음 사실이 성립한다.

(a) $\Omega_\omega$는 $\pi_\omega(\mathscr{A})''$의 순환(cyclic) 및 분리(separating)벡터이다.

(b) $\alpha_t : \pi_\omega(\mathscr{A})''\to\pi_\omega(\mathscr{A})''$를 modular automorphism이라 하고 $G(A, B;t)$를 $G_\Lambda(A, B;t)$의 무한체적 극한이라고 하면 다음 관계

$$G(A, B;t)=(\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\alpha_t(\pi_\omega(B))\Omega_\omega),\ \ A, B\in\mathscr{A},\ \ t\in\boldsymbol{R}$$

가 성립한다.

위의 정리는 다음 절에서 증명하겠다. 참고사항으로서

$$(\mathscr{H}_\omega, \pi_\omega(\mathscr{A})'', \alpha_t, \Omega_\omega)$$

가 무한체적 극한의 양자동역학계를 형성한다는 것을 유의하기 바란다.

## 3. 주 결과(Main Result)의 증명

이 절에서는 본 논문의 주 결과인 정리 2.2를 증명하겠다. $A, B\in\mathscr{A}_\Lambda$에 대하여 $G_{A,B}(z)$를 보조정리 2.1 (g)에서 유도된 $D_\beta$에서 정의되는 해석함수라고 하면 유한체적 Green함수 $G_\Lambda(A, B, t)$를 다음과 같이

$$G_\Lambda(A, B, z)=G_{A,B}(z),\ \ z\in D_\beta \tag{3.1}$$

$D_\beta$ 위로 확장시키면 $D_\beta$에서 해석함수가 된다. 간단하게

$$G_\Lambda^{(n)}(A, B; z) = \frac{d^n}{dz^n} G_\Lambda(A, B, z)$$

로 쓰면 임의의 $A, B \in \mathscr{B}_\Lambda$와 $n=0, 1, 2, .$에 대하여 $G_\Lambda^{(n)}(A, B, z)$는 $D_\beta$에서 해석함수이고 정리 2.2의 가정에 의하여 $\bar{D}_\beta$에서 연속이며, 보조정리 2.1 (g)와 세줄정리(three line theorem or maximum modular principle)에 의하여 $\bar{D}_\beta$ 위에서 부등식

$$|G_\Lambda^{(n)}(A, B; z)| \leq \| A \| C_B{}^n n! \qquad (2.2)$$

이 성립한다.

부등식 (3.2)와 Tychonoff 정리(compactness argument)를 사용하면 다음 결론에 도달한다. 즉 $Z^\nu$(또는 $\boldsymbol{R}^\nu$)로 수렴되는 부분네트(subnet) $\{\Lambda_\alpha\}$가 존재해서 모든 $A, B \in \mathscr{B}_\Lambda$, $z \in \bar{D}_\beta$ 및 $n=0, 1, \cdots$에 대하여

$$G^{(n)}(A, B; z) = \lim_{\Lambda_\alpha \to Z^\nu(R^\nu)} G_{\Lambda_\alpha}{}^{(n)}(A, B; z) \qquad (3.3)$$

가 존재하고 부등식

$$|G^{(n)}(A, B; z)| \leq \| A \| C_B{}^n n! \qquad (3.4)$$

를 만족시킨다. 또 Vitali 정리와 부등식 (3.2)에 의하여 $G(A, B, z)$는 $D_\beta$에서 해석적이고 $D_\beta$에서 연속이다. 보조정리 2.1 (g)와 (3.3)에 의하여 $G(A, B, z)$는 KMS조건

$$G(A, B; t+i\beta) = G(B, A; -t) \qquad (3.5)$$

를 만족시킨다.

다음으로 무한체적 극한의 동역학계 구축을 생각하자. $\omega$를

$$\omega(A) = G(A, 1; 0) \qquad (3.6)$$

로 정의되는 $\mathscr{A}$의 상태(state)라고 하자. KMS조건 (3.5)로부터 다음 결론이 유도된다[1]. 모든 $A, B \in \mathscr{A}$와 $\hat{f} \in \mathscr{D}$인 $f$에 대하여

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) G(A, B; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t+i\beta) G(B, A; -t) \qquad (3.7)$$

이 성립한다. $(\mathscr{H}_\omega, \pi_\omega(\mathscr{A}), \Omega_\omega)$를 $\omega$에 대응되는 $\mathscr{A}$의 GNS 표준표현(canonical representation)이라고 하면 KMS조건 (3.7)에서 순환벡터(cyclic vector) $\Omega_\omega$는 von-Neumann대수 $\pi_\omega(\mathscr{A})''$의 순환(cyclic) 및 분리(separating)벡터

가 된다(참고문헌 [1]의 Example 5, 3, 13을 보라). $\Delta$를 $\Omega_\omega$에 대응되는 Tomita-Takesati의 modular 작용소라고 하자[1, 10].

정리 2.1과 위의 결과로부터 다음 결과를 얻는다.

**정리 3.1** : $G: \mathscr{A}\times\mathscr{A}\times \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$를, (3.3)에서 정의되는 유한체적 Green함수 $G_\Lambda$의 무한체적극한의 Green함수라 하면 $G$는 정리 2.1에서 $G_\Lambda$가 만족시키는 성질들을 모두 만족시킨다.

**증명** : 위의 결과는 정리 2.1과 (3.3) 및 (3.7)에서 유도된 결과이다.

다음으로 정리 3.1과 참고문헌 [1]의 정리 6, 3, 27의 증명에서 사용된 방법을 이용하면 다음 결과를 얻는다.

**정리 3.2** : $(\mathscr{H}_\omega,\ \pi_\omega(\mathscr{A}),\ \Omega_\omega)$를 (3.6)에서 정의된 상태 $\omega$의 GNS 순환표현(cyclic representation)이라 하면 $\mathscr{H}_\omega$를 포함한 Hilbert공간 $\mathscr{H}$와 $\boldsymbol{R}$의 유니타리표현(unitary representation) $U$가 존재해서 모든 $A, B\in\mathscr{A}$, $t\in\boldsymbol{R}$에 대하여

(a) $\mathscr{H}=V_{t\in R}U(t)\mathscr{H}_\omega$

(b) $G(A, B; t)=(\pi_\omega(A^*)\Omega_\omega,\ U(t)\pi_\omega(B)\Omega_\omega)$

이 된다.

**증명**. 이 결과는 정리 3.1과 참고문헌 1의 정리 6.3.27의 증명방법의 결과이다. 지금서부터 정리 2.2를 증명하자.

**정리 2.2의 증명** : $H$를 정리 3.2의 유니타리군 $U(t)$의 생성자(generator), $U(t)=\exp(itH)$라고 하자. 정리 3.2에 의하여

$$G^{(n)}(A, B; 0)=(\pi_\omega(A^*)\Omega_\omega,\ (iH)^n\pi_\omega(B)\Omega_\omega)$$

가 되고 부등식 (3.4)에 의하여 임의의 $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}_\Lambda$에 대하여

$$|(\pi_\omega(A^*)\Omega_\omega,\ (iH)^n\pi_\omega(B)\Omega_\omega)|\leq\|A\|C_B{}^n n! \qquad (3.2)$$

가 성립한다. $\mathscr{B}_\Lambda$가 $\mathscr{A}_\Lambda$에 조밀(dense)하므로 $\bigcup\mathscr{B}_\Lambda$는 $\mathscr{A}$에 조밀하다. 따라서 $\bigcup\pi_\omega(\mathscr{B}_\Lambda)\Omega_\omega$는 $\mathscr{H}_\omega$에 조밀하다. 부등식 (3.8)로 부터 $(iH)^n\pi_\omega(B)\Omega_\omega$는 $\mathscr{H}_\omega$에 속하는 것을 알 수 있고 또 부등식

$$\|H^n\pi_\omega(B)\Omega_\omega\|\leq C_B{}^n n! \qquad (3.9)$$

이 성립함을 알 수 있다. 관계식 (3.9)는 $\bigcup\pi_\omega(\mathscr{B}_\Lambda)\Omega_\omega$가 $H$의 해석적이고 조밀한 영역(analytic dense domain)이 됨을 말해준다. 따라서 $H$는 $\bigcup\pi_\omega(\mathscr{B}_\Lambda)\Omega_\omega$에서 essentially self-adgoint가 된다[8]. 이 결과로부터 $U(t)\mathscr{H}_\omega\subset\mathscr{H}_\omega$가 된다. $\Omega_\omega$는 $U(t)$에 불변이므로

$$G(A, B, t) = (\pi_\omega(A^*)\Omega_\omega,\ \ U(t)\pi_\omega(B)U(t)^*\Omega_\omega) \tag{3.10}$$

이고

$$\tau_t(\pi_\omega(B)) \equiv U(t)\pi_\omega(B)U(t)^*$$

라 하면 $G(A, B, t)$의 KMS 조건으로부터 상태

$$\omega(A) \equiv (\Omega_\omega,\ \ A\Omega_\omega),\ \ A \in \pi(\mathscr{A})''$$

는 von-Neumann 대수 $\pi(\mathscr{A})''$에 대하여 $\tau$-KMS 조건을 만족시키는 것을 알 수 있다. Takesaki의 modular automorphism의 유일정리 [[1]의 정리 5.3.10]에 의하여 $\tau_t = \alpha_t$이다. 즉

$$U(t) = \Delta^{it} \tag{3.11}$$

가 된다. 정리 2.2는 (3.10)과 (3.11)의 결과이다.

## 4. Polyacetylene 통계역학모델에 응용

정리 2.2의 결과를 polyacetylene 모델에 응용하여 보자. $\Lambda = \{n, n+1, \cdots, m\} \subset Z$을 1차원 격자공간에서 구간이라자. 모델의 반 고전근사(semi-classical approximation)적 하밀토니안은 다음과 같이

$$H_\Lambda = H_{\Lambda,B} + H_{\Lambda,F} \tag{4.1}$$

$$H_{\Lambda,B} = \sum_{i=n}^{m} \frac{w^2}{2} {\phi_{i+1/2}}^2$$

$$H_{\Lambda,F} = \sum_{i=n}^{m-1} [C_i^* C_{i+1} + C_{i+1}^* C_i](t + g\phi_{i+1/2})$$

로 주어진다. 여기서 각 $i \in \Lambda$에 대하여 $\phi_{i+1/2} \in \boldsymbol{R}$이고 $C_i$는 $2^{|\Lambda|}$-차원 Hilbert 공간에서 정의되는 연산자로서 다음 조건

$$\{C_i^*, C_j\} = \delta_{ij},\ \ \{C_i, C_j\} = 0 \tag{4.2}$$

을 만족시킨다. 여기서 $\{A, B\} = AB + BA$이다. 자세한 모델의 배경과 설명은 참고문헌 [3, 7]을 참조하기 바란다. 분할함수(partition function)와 Gibbs상태 $\omega_\Lambda$는

$$Z_\Lambda = \int \prod_{i=n}^{m} d\phi_{i+1/2} e^{-\beta H_{\Lambda,B}} Tr(e^{-\beta H_{\Lambda,F}}) \tag{4.3}$$

$$\omega_\Lambda(A)=Z_\Lambda^{-1}\int\prod_{i=n}^{m}d\phi_{i+1/2}e^{-\beta H_{\Lambda,B}}Tr(Ae^{-\beta H_{\Lambda,F}})$$

로 주어진다. 국소측정가능한(local observables) 것의 대수는 다음과 같이

$\mathscr{A}_\Lambda{}^F=\{C_i, C_i^*;\ i\in\Lambda\}$로 생성된 $C^*$-대수
$\mathscr{A}_\Lambda{}^B=$변수 $\phi_{i+1/2}$, $i\in\Lambda$, 의 유계연속함수로 이루어진 $C^*$-대수
$\mathscr{A}_\Lambda=\mathscr{A}_\Lambda{}^B\otimes\mathscr{A}_\Lambda{}^F$

로 주어진다.

먼저 필요한 선험적 계산(opriori estimates)을 유도하자. 주어진 연산자 $A, B$에 대하여

$$\delta_A{}^0(B)=B \tag{4.4}$$
$$\delta_A{}^m(B)=[A, \delta_A{}^{n-1}(B)]$$

로 쓰자. 여기서 $[A, B]=AB-BA$이다. 다음은 참고문헌 [7]의 정리 2.3의 결과이다.

**보조정리 4.1.** 고정된 유한영역 $\Lambda\subset\mathbf{Z}$와 임의의 $B\in\mathscr{A}_\Lambda$에 대하여 $\Lambda$에 무관한 상수 $C_B$가 존재해서 부등식

$$\omega_\Lambda(\delta_{H\Lambda}{}^m(B)^*\delta_{H\Lambda}{}^m(B))\le C_B{}^m m!$$

이 성립한다.

**증명 :** 참고문헌 [7]의 정리 2.3(Proposition 2.3)을 참조하라.

**정리 4.2 :** 임의의 $z\in D_\beta$와 $A, B\in\mathscr{A}_\Lambda$에 대하여

$$\left|\frac{d^m}{dz^m}G(A, B;z)\right|\le\|A\|C_B{}^m\sqrt{m!}$$

이 성립한다.

**증명 :** 간단히 $f(z)=G(A, B;z)$라 하자. 그러면 $f^{(m)}(z)$는 $D_\beta$에서 해석적이고 $\bar{D}_\beta$에서 유계이며 연속이다. 따라서 $|f^{(m)}(z)|$의 최대는 $D_\beta$의 변경에 있다. 정의에 의하여

$$f^{(m)}(z)=i^m\omega_\Lambda(A\alpha_z{}^\Lambda(\delta_{H\Lambda}{}^m(B))$$

이고 따라서 Schwasz부등식과 보조정리 4.1에 의하여

$$|f^{(m)}(z)|_{z=t}{}^2\le\|A\|^2\omega_\Lambda((\delta_{H\Lambda}{}^m(B))^*\ \delta_{H\Lambda}{}^m(B))$$

$$\leq \| A \|^2 C_B{}^m m! \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(z)|^2_{z=t+i\beta} &= |\omega_\Lambda(\delta_{H\Lambda}{}^m(B)\alpha_{-t}{}^\Lambda(A))| \\ &\leq \omega_\Lambda(\delta_{H\Lambda}{}^m(B)(\delta_{H\Lambda}{}^m(B))^*)\omega_\Lambda(A^*A) \\ &\leq \| A \|^2 C_B{}^m m! \end{aligned} \tag{4.6}$$

이 성립한다. (4.6)의 첫째 관계식을 유도하기 위하여 (4.3)에 있는 $\omega_\Lambda$의 정의 및 $\omega_\Lambda$의 KMS조건(보조정리 2.1 (g))를 사용하였다. 정리 4.2는 (4.5) 및 (4.6)의 결과이다.

정리 4.2는 취급하는 모델이 정리 2.2의 조건을 만족시키는 것을 보여주고 따라서 정리 2.2의 결과는 polyacetylene모델에 적용된다.

끝으로 몇가지 다른 통계역학 모델에 대하여 정리 2.2의 응용가능성에 대하여 이야기 하겠다. 위에서는 polyacetylene모델의 반 고전근사(semi-classical approximation)적 모델을 취급하였으나 반 고전근사가 아닌 양자모델에 대하여도 위의 방법을 적용할 수 있다고 생각한다[7]. 양자모델에 대하여 정리 2.2의 가정을 증명하기 위하여는 보조정리 4.1과 비슷한 결과가 요구된다. 아직까지 필요한 계산이 매우 복잡하여 보조정리 4.1에 해당하는 결과를 유도하지 못하였고 앞으로 자세히 검토하려 한다.

또 본 논문의 결과를 무계양자스핀계(unbounded quantum spin systems)에 대하여도 응용할 수 있다고 믿고 있고 이것도 앞으로의 연구과제이다. 또한 정리 2.2의 가정을 얼마만큼 약화시키면서 같은 결론에 도달할 수 있는가 하는 것도 매우 흥미있는 문제라고 생각된다.

## 참 고 문 헌


1. Bratteli, O. and Robinson, D.W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, I and II, Springer-verlag, New York (1981).
2. Lebowitz, J.L. and Presutti, E.: Statistical Mechanics for Unbounded Spins, Comm. Math. Phys. **50**, 195 (1976).
3. Grosse H., Ito, K.R. and Park, Y.M.: Statistical Mechanics of Polyacetylene $(CH)_x$, to be appeared in Nucl. Phys. (1986).
4. Israel R.: *Convexity in the Theory of Lattic Gases*, Princeton Univ. Press (1979).
5. Park, Y.M.: Quantum Statistical Mechanics of Unbounded Continuous Spin Systems, J. Korean Math. Soc. **32**, 43-74 (1985).
6. Park, Y.M.: Quantum Statistical Mechanics for Superstable Interastions; Bose-Einstein Statistics, J. Stat. Phys. **40**, 259-301 (1085).
7. Park, Y.M.: Existence and Uniqueness of Gibbs States for a Statistical Mechanical Polyacetylene Model, to be appeared in J. Stat. Phys. (1986).

8. Reed, M. and Simon, B.: *Method of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Academic Press, New York (1975).
9. Ruelle, D.: *Statistical Mechanics*, Bengamin Inc. New York (1969).
10. Takesaki M.: *Theory of Operator Algebras, I and II*, Springer-verlag New York (1979).

연세대학교 수학과
성신여자대학교 수학과