

Kalman Filter 에 의한 Online 流出豫測

Online Flow Prediction by Kalman Filter

李 元 煥*
Lee, Won Hwan
李 英 錫**
Rhee, Young Seok

Abstract

The need of forecasting river flows arised whenever a river authority must make controls to protect the life and property from the flood and maintain the adequate flows for water use. This study is on the real time flood forecasting from the gauged and ungauged rainfall input and identification of second-order autoregressive(AR(2)) which is used as system model. A Kalman filter is used to obtain the values of the system parameters needed for the optimal control strategy. This system model was applied to the data at the Naju gauging station in Young san river basin to check the accuracy and efficiency of prediction. One step ahead prediction is checked by stochastic analysis and the order of autoregressive model is proved to be satisfied, Discussions on interesting features of the model are presented.

要 旨

本 研究는 雨量觀測所가 未備된 小流域에서 實時間 流出豫測을 위해 Kalman filter 를 이용했으며 이때의 시스템模型으로 AR(2)를 택하였다. 時間別 유출자료는 榮山江流域의 羅州 觀測地點에서 관측된 時間別 유량자료를 이용하였다. 여기서 예측된 모든 결과는 統計的인 방법으로 分析한 결과, Kalman filter 에 의한 流出豫測은 좋은 結果를 얻을 수 있었으며 過程模型으로서 AR(2)가 적합한 것을 알 수 있었다. 또한 홍수예측에도 効果적임이 입증되었다.

1. 序 論

最近 水文學的 時系列資料의 예측 및 檢定을 위한 여러가지 적용방법이 Hino(1974), Szölösi-Nagy(1976), Maissis(1977), Wood(1970)등에 의해 연구되었다. (1). 時系列예측에는 AR(auto-regressive)模型, MA(moving average)模型 또

는 ARMA(Autoregressive Moving Average)模型 등이 있는데 이들은 집단자료를 이용한 時不變 혹은 주위여건에 따라 시스템構造와 同時에 變하는 媒介變數, 즉 자료의 代辦值(data window)⁽¹⁾를 구하는 線形시스템이다. 한편 St. Venant 방정식은 하천유출을 支配하는 非線形 모델로서 Dooge(1973) 및 Natale and Todini (1976)⁽²⁾는 이것을 線形으로 변환시켜 성공적으

* 正會員 · 延世大學校 工科學科 教授, 土木工學科

** 正會員 · 延世大學校 大學院 博士課程

로 이용하였으며 Todini and Wallis(1977)⁽³⁾는 이것을 진보시켜 더욱 細分하여 線形化 시켰는데, 이것을 制約線形系(Constrained Linear System)라 칭한다. 그러나 하천유출을 예측하는 경우 시간이 經過하면서 그 하천유역의 特性이 地域에 따라 自然的으로 또는 人爲的으로 變하게 되므로 과거의 많은 觀測資料에 依해서 구한 時不變 媒介變數를 이용한 것보다는 real time 방식을 이용해서 단계별로 들어오는 水文資料를 근거로 하천유출을 예측하고 관측치와 비교하여 再調整한 후 다음단계를 예측하는 방법이 실측치에 더욱 接近할 수 있다. 그러나 우량관측소가 존재하지 않는 소유역이거나, 우량관측소가 설치된 지역의 강우와 설치되지 않은 지역의 강우가 混入될 때, 혹은 상류에 制御가 가능한 dam이 존재할 경우 實時間에 의한 시간별 유출에측은 강우자료를 근거로 하기에는 많은 문제점을 안고 있다. 고로 本 研究는 雨量觀測所가 없는 小流域內의 流出豫測지점에서 豫測하기 前의 實測資料를 이용했다. 즉, $t-1$ 시간과 $t-2$ 시간의 유량 관측자료를 deterministic input로 정하고 t 시간의 流量을 豫測하고자 한다. 이러한 目的에 알맞은 시스템은 非線形보다는 線形動的 시스템이 더욱 効果的이라고 볼 수 있다.⁽²⁾ Kalman filter는 이러한 시스템을 効果的으로 表現하는 技法 중의 하나이다. Kalman(1960)⁽⁴⁾은 확률과정의 定常性을 假定하지 않고, 最適推定誤差의 共分散行列을 구하기 위해 非線形微分方程式을 誘導하므로써 最適線形 filter의 微分方程式의 係數를 얻게 되었다. 또한 Kalman and Bucy(1961)⁽⁵⁾는 최적 filter에서 발생하는 오차의 共分散行列을 Riccati型의 非線形微分方程式으로 유도했다. 이것은 Hamilton의 微分方程式의 變分法과 相關性이 있으므로 變分方程式이라고 定義했다. 시스템의 觀測系를 이용한 測定結果를 기준으로 構成된 Kalman filter의 理論은 問題設定이 一般化 되어 있으며 과거의 오랜 자료가 필요없으므로 資料가 빈약한 지점의 예측에 큰 利點을 지니고 있다. Kalman filter는 주어진 過程模型(process model)의 狀態벡터의 空間을 決定하는데 있다. 水文系에 이용되는 Kalman의 狀態量은 資料를 狀態量으로

간주하는 것과 媒介變數를 狀態量으로 간주하는 방법이 있다.⁽⁶⁾ Todini(1978)⁽⁷⁾는 前者의 방법을 택하고 Hino(1974)⁽⁸⁾는 後者의 방법을 택한 예를 찾아 볼 수 있다. 本 研究에서는 後者의 방법을 택하였다. 한편 最適 filter를 얻기 위해서 Kalman은 模型雜音⁽⁹⁾(process noise)과 計測雜音⁽⁹⁾(measurement noise)의 共分散行列을 精確하게 알아야 하는 問題點을 안고 있다. 이에 대한 擴張된 algorithm으로 Myer and Tapley⁽¹⁰⁾(1976), Todini⁽⁷⁾(1978), Robust Kalman Filter⁽¹¹⁾(1983) 등이 소개되고 있다. 本 研究는 2차 Auto regressive 模型을 過程模型으로 정하고 Kalman and Bucy⁽⁵⁾의 알고리즘을 이용하였다. 適用對象은 榮山江流域(流域面積: 2058.7 km²)의 羅州觀測地點(流路延長: 70.3 km)을 對象으로 時間別 流量資料를 택하였다.

2. 基本理論

2.1 過程模型

次數가 2인 AR(2)를 過程模型으로 정하였으며 한時間 前에 觀測된 流量을 q_{t-1} , 두시간전에 관측된 유량을 q_{t-2} 로 하면 AR(2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹²⁾

$$q_t = \alpha_1 q_{t-1} + \alpha_2 q_{t-2} + \epsilon_t, \quad \dots\dots(1)$$

여기서 α_1 과 α_2 는 AR係數로서 本 研究에서는 狀態벡터가 된다. ϵ_t 는 백색잡음(white noise)으로 평균이 0이고 分散이 Q 인 Gaussian分布를 갖는다.⁽²⁾ 이것을 Filtering하기 위해서 觀測計로 바꾸면

$$Z = Mx + v_t, \quad \dots\dots(2)$$

로 바꿀 수 있다(2.2.2 참조).

여기서 $Z = [q_t]$

$$M = [q_{t-1}, q_{t-2}]$$

$$x = [\alpha_1, \alpha_2]$$

$$v_t = \epsilon_t,$$

이다.

Kalman filter에 依해서 추정된 結果를 檢定하기 위해 auto correlation 函數를 求할때 95% 信賴區間에 收斂이 되면 最適필터로 간주할 수 있을 것이다.⁽⁹⁾ 여기서 auto correlation 函數는 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

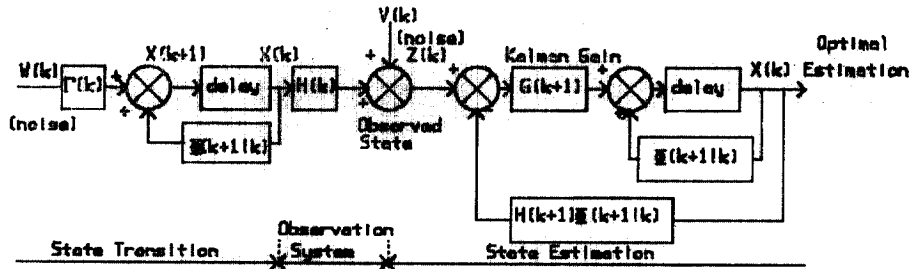


그림 1. Kalmin Filter 에 對한 概念圖⁽¹⁴⁾

$$R(k) = \frac{\sum_{j=1}^{N-k} (\epsilon_j - \bar{\epsilon})(\epsilon_{j+k} - \bar{\epsilon})}{\sum_{j=1}^N (\epsilon_j - \bar{\epsilon})^2} \quad \dots\dots(3)$$

여기서 $\bar{\epsilon}$ 는 全體誤差의 平均値, k 는 Lag 이며, N 는 總資料數이다. 여기서 Lag k 의 最大値는 $\frac{N}{5} \sim \frac{N}{10}$ ⁽¹²⁾ 혹은 $\frac{N}{4}$ ⁽⁴⁾ 으로 定할 수 있으며 標準誤差는 $\pm(1.96/N^{1/2})$ 이다. 本 研究는 k 값의 最大値를 $\frac{N}{10}$ 으로 하였다.

2.2 Kalman Filter

Kalman filter 는 最適制御에 적합한 계산을 위해 필요한, 시스템의 媒介變數를 구하기 위해 이용되었다. Kalman filter 를 概念的으로 나타내면 그림 1과 같이 (1) 狀態變換 (2) 觀測系 (3) 狀態推定으로 나눌 수 있다.

2.2.1 狀態變換

시스템의 狀態量을 表示하는 要素가 n 개일때 n 次元의 벡터를 갖는 狀態벡터를 $X(t)$ 로 나타내면, 시스템의 狀態推定을 위한 狀態變換 方程式은 $X(t)$ 에 對한 1階 常微分方程式으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁸⁾

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + G(t)w(t) \quad \dots\dots(4)$$

여기서 $X(t)$ 는 狀態벡터(n 次元), $F(t)$ 는 狀態推定行列($n \times n$ 行列), $w(t)$ 는 백색잡음(p 次元), $G(t)$ 는 亂數變換行列($n \times p$ 行列)인데, 이를 離散型으로 나타내면 다음式과 같이 쓸 수 있다.

$$X(k+1) = \Phi(k+1|k)X(k) + \Gamma(k+1|k)w(k) \quad \dots\dots(5)$$

여기서 $\Phi(k+1|k)$ 는 k 시각에 $k+1$ 시각의 狀態變換行列을 의미하며 $\Gamma(k+1|k)$ 는 k 시각에 $k+1$ 시각의 亂數變換行列($n \times p$)를 말하고 있다.

2.2.2 觀測系

狀態量과 觀測벡터 $Z(t)$ (m 次元)사이에는 다음과 같은 관계를 가지고 있다.

$$Z(t) = M(t)X(t) + v(t) \quad \dots\dots(6)$$

여기서 $M(t)$ 는 觀測行列($m \times n$ 行列), $v(t)$ 는 觀測系의 入力誤差(m 次元)이다. 식(5)를 離散型으로 바꾸면

$$Z(k+1) = M(k+1)X(k+1) + v(k+1) \quad \dots\dots(7)$$

이다.

$k+1$ 시각 이전의 觀測行列 $M(k+1)$ 을 주고 狀態벡터를 狀態方程式(2.2.3 참고)에 의해서 얻게 되면 예측치를 구할 수 있다. 여기서 $v(k+1)$ 은 觀測值의 잡음(noise)으로 그값의 크기에 따라 관측치의 信賴度가 좌우된다.

2.2.3 狀態推定

最適推定을 위해 첫째 $X(k|k)$ 와 狀態推定誤差의 共分散行列 $P(k|k)$ 가 주어져야 하며 初期條件으로는 $X(k_0|k_0)$ 와 $P(k_0|k_0)$ 를 가정해야 한다. 다음은 $X(k|k)$ 와 $P(k|k)$ 를 $X(k+1|k)$ 와 $P(k+1|k)$ 로 變換하기 위해서 狀態變換行列 $\Phi(k+1|k)$ 를 이용하여 식(8)과 식(9)로 나타낼 수 있다.

$$X(k+1|k) = \Phi(k+1|k)X(k|k) \quad \dots\dots(8)$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1|k)P(k|k)\Phi^T(k+1|k) + \Gamma(k+1|k)Q(k)\Gamma^T(k+1|k) \quad \dots\dots(9)$$

여기서 $Q(k)$ 는 백색잡음으로서 $w(k)$ 의 共分散行列이다. 다음은 식(8)과 식(9)를 이용하여 Kalman gain matrix G 를 구한다.

$$G(k+1) = P(k+1|k)M^T(k+1)[M(k+1)P(k+1|k)M^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \dots\dots(10)$$

여기서 $R(k+1)$ 은 計測雜音의 共分散行列이

다. Kalman gain matrix $G(k+1)$ 을 이용하여 $k+1$ 시각의 새로운 정보 $Z(k+1)$ 을 얻어서 $k+1$ 시각에서 $k+1$ 시각의 狀態벡터와 推定誤差의 共分散行列은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$X(k+1|k+1) = \Phi(k+1|k)X(k|k) + G(k+1)[Z(k+1) - M(k+1)\Phi(k+1|k)X(k|k)] \quad \dots\dots(11)$$

여기서 식(8)을 식(11)에 대입하면

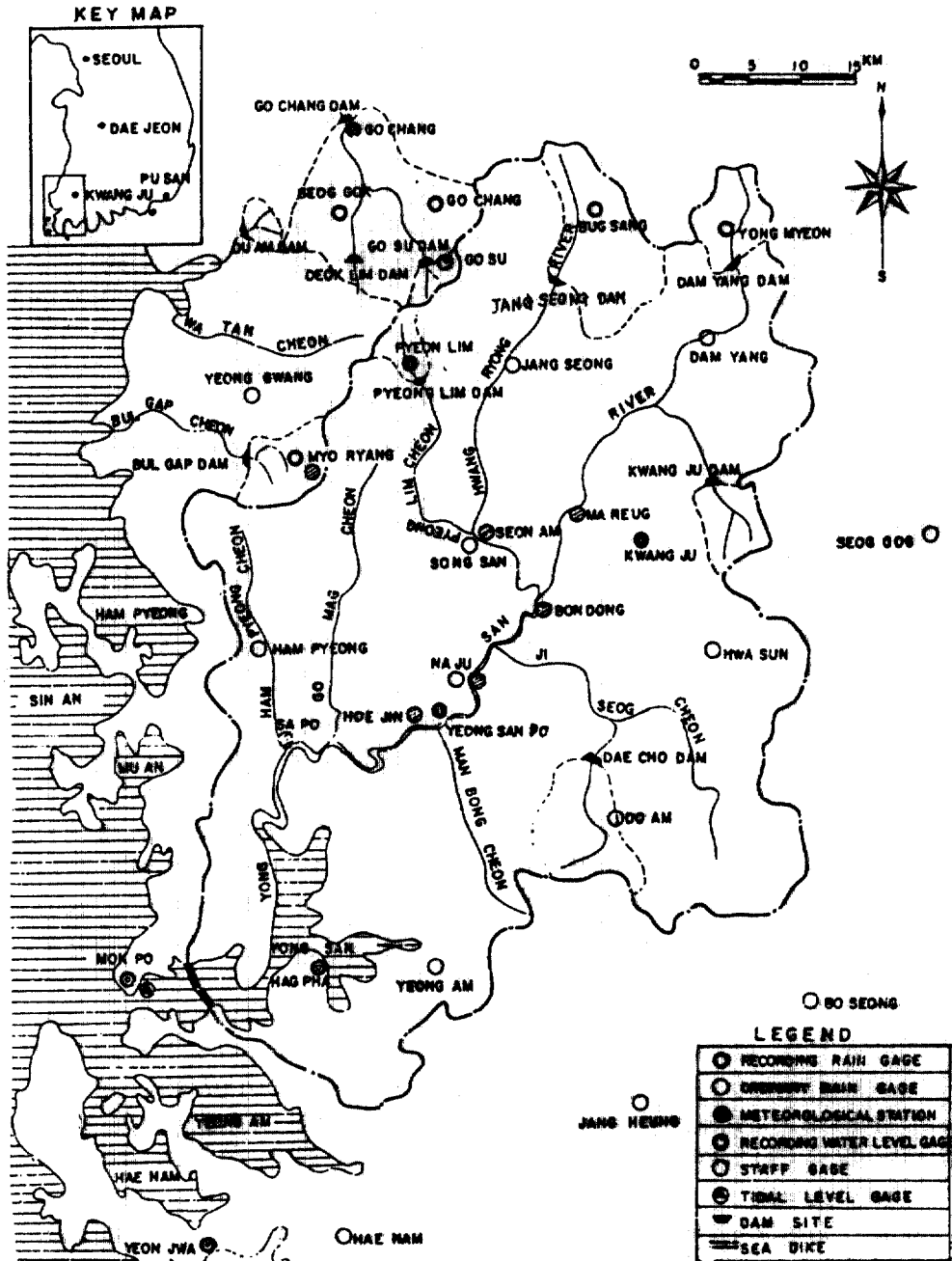


그림 2. 榮山江 流域圖⁽¹⁶⁾

$$X(k+1|k+1) = X(k+1|k) + G(k+1)$$

$$[Z(k+1) - M(k+1)X(k+1|k)] \dots (12)$$

를 얻을 수 있다. 또한 狀態推定誤差의 共分散行列은

$$P(k+1|k+1) = [I - G(k+1)$$

$$M(k+1)]P(k+1|k) \dots \dots \dots (13)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $k+1$ 은 다시 k 로 變換하여 첫번째 방식으로 넘어가 順次的으로 반복하면 다음과 같이 단계별로 예측치를 구할 수 있다. 즉 식(12)에서 右邊 제 2항에 있는 [] 內의 $M(k+1)X(k+1|k)$ 를

$$\hat{Z}(k+1) = M(k+1)X(k+1|k) \dots \dots \dots (14)$$

로 놓으면 k 시각에서 $k+1$ 시각의 豫測值 $Z(k+1)$ 을 求할 수 있으며 또한 觀測值와의 誤差는 다음식으로 구할 수 있다.

$$\varepsilon = Z(k+1) - \hat{Z}(k+1) \dots \dots \dots (15)$$

3. 適用例

適用對象은 榮山江流域의 羅州水位 觀測地點 (그림 2 참조)이다. 나주 관측소에서 1983년 4월 3일 1시부터 1983년 11월 30일 24시까지 自記水位計의 時間別(총 5008 시간)資料를 이용하였으며 建設部에서 제시된 rating curve⁽¹⁸⁾를 이용해서 다음과 같이 유량으로 換算하였다.

$$y = 1.31 - 59.06x + 44.71x^2 \dots \dots \dots (16)$$

여기서

$$x : \text{水位, 단 } 7.74 > x > 1.1m$$

y : 流量(CMS)

計算過程에 있어서 模型雜音과 計測雜音의 共分散行列($Q_{(10)}$, $R_{(10)}$)은 確실한 값을 입력해야 確실한 推定이 가능하나 複雑한 시스템에서는 이러한 입력이 불가능하므로 근접한 初期值를 事前에 定하고 그 精度를 확인하기 위해 既存資料에 의한 檢定이 필요하다. 本 研究에서는 다음과 같이 初期值를 假定하였다⁽¹⁾.

$$X(k_0|k_0) = 0.0$$

$$\Phi(k_0|k_0) = I$$

$$\Gamma(k_0|k_0) = I$$

$$P(k_0|k_0) = 100I$$

$$Q(k_0|k_0) = 0.01$$

$$R(k_0|k_0) = 0.0001$$

여기서

I : 單位行列

이다.

한편, 컴퓨터 記憶量은 k 시각에서 $k+1$ 시각으로 移動할 때 $X(k|k)$, $P(k|k)$, $M(k+1)$, $\Phi(k+1|k)$, $\Gamma(k+1|k)$, $Q(k)$, $R(k+1)$ 이다. 그러나 次數가 增加하면 相對的으로 情報量이 커지므로 計算速度가 減少된다. 이러한 점은 次數節約(parsimonious)⁽¹³⁾問題를 考慮하면 micro computer 로서도 충분히 처리가 가능하다.

4. 結果分析

그림 3은 觀測值와 豫測值를 比較한 結果를

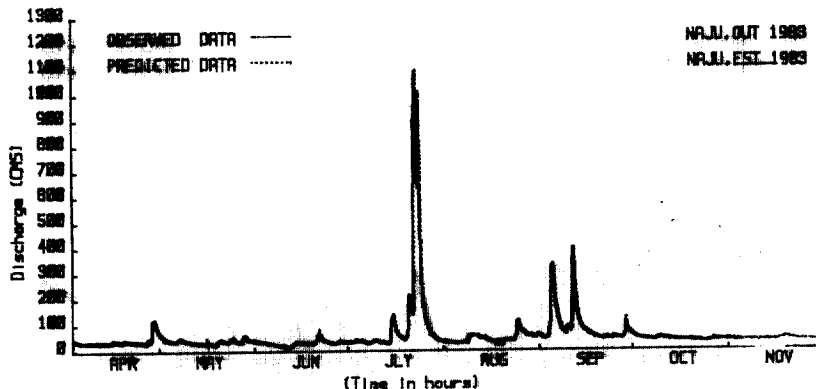


그림 3. Predicted Result(Naju Gauging Station)



그림 4. Innovation Sequence of Kalman Filter

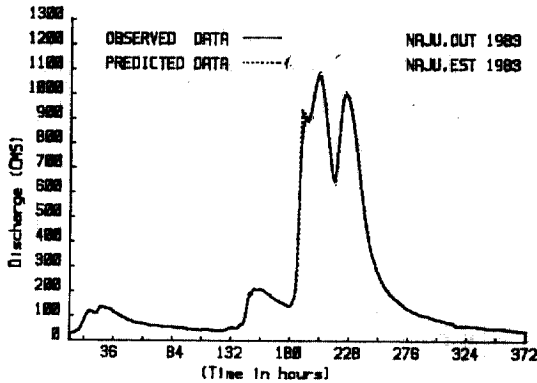


그림 5. Predicted Result(Naju Gauging Station)

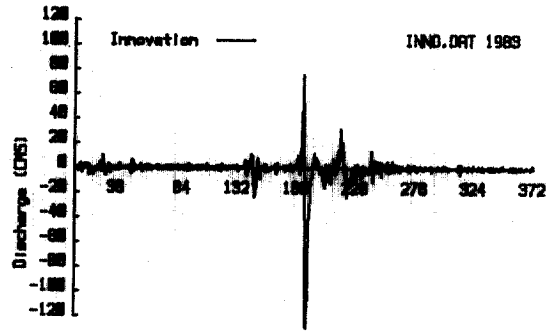


그림 6. Innovation Sequence

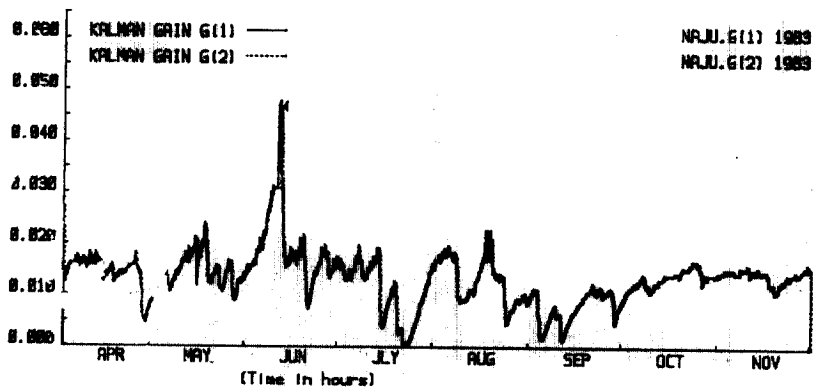


그림 7. Kalman Gain $G(1)$, $G(2)$

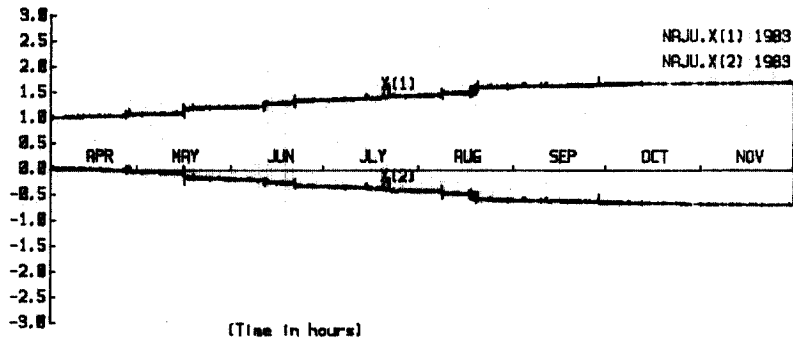


그림 8. State Vector $X(1)$, $X(2)$

表 1. Autocorrelation Coefficients(Innovation)

Lag	Value	Lag	Value	Lag	Value
1	1.000	2	-.049	3	.012
4	-.037	5	.038	6	-.013
7	.004	8	.003	9	-.008
10	.005	11	.002	12	-.007
13	.005	14	.070	15	-.023
16	-.029	17	-.069	18	.092
19	-.071	20	-.003	21	.005
22	.019	23	-.020	24	.017
25	.004	26	-.004	27	.002
28	-.028	29	-.031	30	.002

表 2. Autocorrelation Coefficients(Innovation)

Lag	Value	Lag	Value	Lag	Value
1	1.000	2	.511	3	.020
4	-.202	5	-.104	6	-.101
7	-.103	8	-.101	9	-.050
10	-.030	11	.000	12	.000
13	.024	14	.018	15	.047
16	-.040	17	.027	18	-.003
19	.011	20	.007	21	.037
22	.022	23	-.035	24	-.024
25	.006	26	-.052	27	-.093
28	-.129	29	-.078	30	-.065

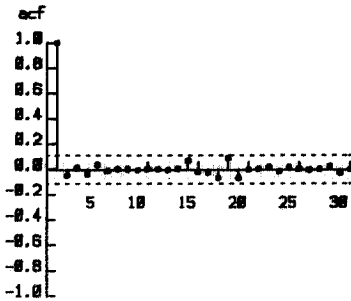


그림 9. Autocorrelation function

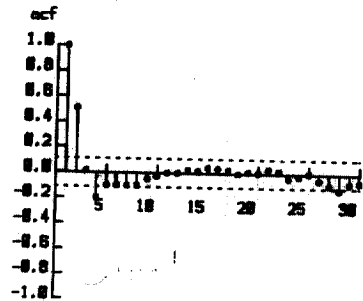


그림 10. Autocorrelation function

圖示한 것이며, 그림 4는 觀測値와 豫測値의 差(innovation)를 圖示한 것이다. 그림에서 +값은 豫測値가 觀測値보다 더 적고, -값은 그 반대이다. 그림 5는 洪水時를 基準으로 7月 14日 13時부터 7月 29日 24時 사이의 時間軸(372 시간)을 10倍로 擴大하여 나타냈다. 그림 6

도 같은 方式으로 innovation 를 部分的으로 擴大한 것으로 Fractional Gaussian noise(FGn)⁽¹⁷⁾을 보이고 있다. 7月 22日 22時에서 23時까지 洪水量(1073.863 m³/sec)이 最大일 때 豫測値(1082.909 m³/sec)와의 差(9.046 m³/sec)는 微少하지만 같은 날 8時와 9時에 나타나는 誤差

(126.940 m³/sec, 129.042 m³/sec)는 最高値를 記錄하였다. 그것은 流量變動의 相樣이 과거와 완전히 相異하기 때문이다. 즉 低水位 期間과 洪水位 期間의 相關性이 매우 貧弱하다. 이때 나타나는 Kalman gain 은 0.0에 근접한 값(그림 7)을 가지고 있으므로 狀態推定을 更新하는 단계(式 12)를 무시하고 있음을 알 수 있다.⁽¹⁸⁾ 그림 8은 狀態벡터를 plot한 것으로 X(1)과 X(2)가 0.5를 중심으로 對稱이 되었으며 두 벡터의 합은 1.0이 됨을 알 수 있다. 또한 Gain 값의 變動이 심한 부분에서 振動이 큼을 알 수 있다. Autocorrelation function(N=300, Lag=30)은 低水位 期間(그림 9, 表 1)과 洪水位 期間(그림 10, 表 2)으로 나누어 plot했으며, 과 선은 標準誤差(±0.113)의 範圍를 나타내고 있다.

5. 結 論

本 研究를 通하여 얻어진 成果를 要約하면 다음과 같다.

1) Kalman filter를 이용하여 流出模型의 時變性을 追跡하였으며, 過程模型으로서 AR(2)는 시스템構造의 變動에 잘 適應됨을 확인할 수 있다.

2) 實時間에 따라서 狀態벡터의 空間이 決定되므로 多量의 과거 資料에 의존하지 않아도 流出變動에 따른 豫測이 가능함을 알 수 있다.

본 연구를 계속 보완하기 위해서 模型雜音과 計測雜音의 共分散行列(Q, R)에 관한 擴張된 알 고리즘의 研究개발이 있어야 할 것이다. 또한 Kalman filter는 段階別 最適推定이 가능하므로 洪水豫測 뿐만 아니라 댐의 制御에도 効率的으로 이용할 수 있을 것으로 판단되어 이에 관한 지속적인 연구를 하고자 한다.

參 考 文 獻

1. Simons, D.B., Duong, N. and Ruh-Ming, Li, "An Approach to Short-term water and Sedi-ment Discharge Prediction Using Kalman Filter", Application of Kalman filter to Hydro-
2. Wood, E.F., "An Application of Kalman filtering to river flow Forecasting", Application of Kalman filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources, Proc. of AGU Chapman Conference, Univ. of pittsburgh, pittsburgh, Penn. 473~481, 1978.
3. Todni, E. and Wallis, J.R., "Using CLS for continous Daily or Longer period Rainfall Runoff Modeling", Mathematical Model for Surface water Hydrology, John Wiley and Sons, 433, 1977.
4. Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and prediction Problems", Trans. ASME. Journal of Basic Eng., Vol. 82, 35~45, 1960.
5. Kalman, R.E. and Bucy, R.S., "New Results in linear filtering and Prediction theory, Trans, ASME, Journal of Basic Eng., Vol. 83, 95~107, 1961.
6. Chi-Hong, K. "A study on the Flood Forecasting Method considering physical structure in Rainfall-runoff system", D.E. in Graduate college of Tokyo Institute of Technology, 1983.
7. Todini, E. "Mutually interactive state-parameter(MISP) Estimation", Application of Kalman filter, Proc. of AGU Chapman Conference, Univ. of pittsburgh, pittsburgh, Penn., 135~151, 1978.
8. 日野幹雄, "水文流出系豫測へのカルマン・フィルタ-理論の適用, 日本土木學會論文報告集, 第22號 39~47, 1974.
9. Raman, K.M., "On the Identification of variances and Adaptive Kalman Filtering", IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, No. 2, 175~184, 1970.
10. Myers, K.A. and Tapely, B.D., "Adaptive Sequential estimation with unknown noise statistics", IEE, Transactions on Automatic Control, 520~523, 1976.
11. Chee, T. and Ludwik, K. "An Adaptive Robustizing Approach to Kalman Filtering", Automatica, Vol. 19, No. 3, 279~288, 1983.

12. Kottegoda, NT, *Stochastic water Resources Technology*, The mamillan pross LTD., 49, 1980.
13. Alan, P., *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models*, John Willey & Sons, New York, 33, 81, 212~219, 1983.
14. Sage, A.P. and White, C.C., *Optimum System Control*, Univ. of Virginia, 230~236, 1984.
15. 建設部, 洪水量 測定調査 附錄, 296, 1983.
16. 농수산부, 농업진흥공사, 영산강개발 Ⅱ단계 농업 종합개발사업 하구둑 공사지, 47, 1984.
17. Rafae, L.B. and Ignacio, R., *Random Functions and Hydrology*, Addison-wesley Publishing Co., 217~218, 1985.
18. 徐炳夏, "KALMAN FILTERING 技法(2)", 韓國水文學會誌<講座>, 第18卷, 第1號, 113~117, 1985. (接受: 1986. 3. 5)