

平面트러스 構造物의 形狀最適化

Shape Optimization of Plane Truss Structures

金	成	完*
Kim,	Soung	Wan
李	奎	遠**
Lee,	Gyu	Won

Abstract

The algorithm Proposed utilizes the two-levels technique. In the first level which consists of two phases, the cross-sectional area of the truss member is optimized by transforming the nonlinear problem into SUMT, and solving SUMT utilizing the modified Newton-Raphson method.

In the second level, the geometric shape is optimized utilizing the unidirectional search technique of the Powell method which make it possible to minimize only the objective function. The algorithm Proposed in this study is numerically tested for several truss structures with various shapes, loading conditions and design criteria, and compared with the results of the other algorithms to examine its applicability and stability. The numerical comparisons show that the two-levels algorithm Proposed in this study is safely applicable to any design criteria, and the convergency rate is relatively fast and stable compared with other iteration methods for the geometric optimization of truss structures.

要 旨

本 研究에서는 全 解析過程을 two-levels 로 나누었다. Level 1 에서는 two-phases 로 나누어 斷面을 最適化하고, Level 2 에서는 트러스의 節點座標를 變數로 하여 形狀을 最適化하는 알고리즘을 提示한 것이다. 이 알고리즘의 Level 1 에서는 誘導된 非線形計劃問題를 SUMT 問題로 變換시켜 Modified Newton-Raphson Method 에 의한 SUMT 法을 채택하고, Level 2 에서는 Powell Method 의 一方向 探查技法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 하는 技法을 도입하여 最適化 알고리즘을 提示하였다. 提示된 알고리즘을 트러스의 形態, 設計制約條件, 載荷條件 등을 變化시켜 가면서 各種의 트러스에 適用하여 數值計算을 실시하고, 그 結果를 다른 알고리즘의 結果와 比較하므로써 알고리즘의 妥當性, 安全性, 適用性을 검토하였다. 研究結果의 two-level 알고리즘은 트러스의 設計條件에 拘束받지 않고 트러스의 形狀最適化에 適用할 수 있으며, 安定性있게 比較的 빠른 速度로 最適解에 收斂한다는 사실이 확인되었다.

* 忠南大學校 農科大學 教授, 農工學科

**正會員·全北大學校 工科大學 教授, 土木工學科

1. 序 論

數學的 計劃法에 의한 構造物의 最適設計가 工學者들에게 많은 관심의 대상이 되어온 이래 지금까지 大部分의 最適設計는 幾何學的 形狀이 固定된 構造物의 最適化에 集中되어 왔다.

그러나 幾何學的 形狀을 考慮한 最適化는 構造物의 重量, 體積, 經費를 相當히 減少시킬 수 있음을 알 수 있다. 따라서 形狀最適化가 절실히 要請되고 있다. 그러나 形狀이 固定된 最適化보다 形狀最適化는 設計變數 및 制約條件式이 增加하므로써 最適化過程도 複雜해질 뿐만 아니라 컴퓨터 容量이 커야 하고, 計算時間도 더 많이 所要된다. 또한 大型構造物의 最適化도 設計變數 및 制約條件式이 增加하여 마찬가지로의 어려움을 겪게된다.

이러한 어려움을 극복하기 위하여 많은 研究를 해온 바 Dantzig-Wolfe⁽¹⁾는 最適化問題를 分割처리함으로써 設計變數 및 制約條件式을 縮小할 수 있는 原理를 소개하였다. 그러나 이 방법은 線形計劃問題에만 適用할 수 있는 局限된 方法이었다. Vanderplant⁽²⁾는 立體트러스를 two-phases 로 分割最適化함으로써 分割되지 않은 最適化에서 所要된 時間의 절반정도만 所要됨을 발견하였다.

Uri kirsch⁽³⁾는 連續보 및 交叉보 (beam grid)의 最適化問題를 two-phases 最適化問題로 分割하여 各 phase에 必要한 設計變數 및 制約條件式만을 考慮한 最適化를 設圖하므로써 大型構造物의 最適化도 가능케 하고 있다.

따라서 本 研究에서는 文獻⁽²⁾의 理論을 트러스構造의 形狀最適化에 適用코자 形狀이 固定된 트러스를 two-phases 로 分割하여 各 phase에 必要한 設計變數 및 制約條件式만을 考慮한 最適化를 遂行한다. 이 첫 段階를 level 1 이라고 한다. level 2에서는 形狀의 最適化를 위해 節點座標를 設計變數로 하여 形狀最適化를 遂行하므로써 보다 效率的으로 大型트러스構造物의 形狀最適化를 可能케 하고자 한다.

本 研究에서 適用된 最適化過程은 文獻⁽³⁾의 理論과 Vanderplant의 理論⁽²⁾을 結合한 three-

phases 形狀最適化라 할 수 있겠다.

따라서 本 研究에서는 大型트러스構造物의 形狀最適化를 위하여 three-phases 最適化技法을 利用하여 트러스의 形態, 載荷條件, 制約條件 등의 制限을 받지 않는 效率的인 大型트러스構造物의 形狀最適化 알고리즘을 提示하는데 그 目的을 두고 있다.

2. 關係文獻의 考察

構造物의 最適設計에 많은 研究者들이 關心을 가져온 이래에 수많은 研究結果가 發表되었다.

本 研究와 關連된 形狀最適化에 關한 內容을 要約하면 다음과 같다.

1962年 Shmit, L.A. 와 Kicher, T.P.⁽⁴⁾는 簡單한 3部材트러스構造物의 最適形狀 및 最適材料를 Gradient Method로 誘導하였다.

1964年 Dorn Gomorg 와 Greenberg⁽⁵⁾는 線形計劃法을 適用하여 ground structure로부터 reduced optimal structure를 誘導하였다.

1969年 Dobbs 와 Fleton⁽⁶⁾은 文獻⁽⁵⁾의 理論을 擴張하여 多載荷條件, 應用 및 挖掘을 實際制約條件으로 包含한 最適化型式에 Gradient Method의 技法을 適用하여 文獻⁽⁵⁾의 研究結果와의 差異點에 대하여 考察하였다.

以上の 研究中 shmit의 理論을 除外하고 文獻^(5,6)은 空間上에 節點位置를 設定하고 이 節點에 部材를 連結한 트러스構造物을 最適化하여 部材力이 零인 部材를 除去하는 方法이므로 엄밀한 意味의 形狀最適化라고는 할 수 없다.

1972, 1973年 Pedersen^(7,8)은 移動限界(move limit)를 갖는 Gradient Method에 依해 平面 및 立體트러스의 形狀最適化를 誘導하였다.

1972年 Vanderplaat 및 Moses⁽⁹⁾는 設計空間을 2部分으로 分割하여 斷面最適化와 形狀最適化를 分離하는 方法이었다.

이 研究는 最初의 two-phases의 形狀最適化로써 phase-one에서는 stress-ratio 및 Zoutendijk의 feasible direction method를 修正한 알고리즘으로 斷面最適化한 後, phase-two에서 steepest descent method의 技法에 의해 形狀最適化問題를 다루었다.

이와 같이 形狀最適化를 試圖함으로써 最適化에 必要한 計算時間을 半가량 減少시킬 수 있다고 하였으므로 本方法은 效率인 最適化 技法으로 思料된다.

1975年 Spiller⁽¹⁰⁾는 Friedland⁽¹¹⁾의 研究와 똑같은 最適化모델에 Kuhn Tucker 條件을 利用한 트러스 構造物의 形狀最適化理論을 發表하였으나 이 研究 結果로는 多載荷條件, 挫掘應力 및 變位制約을 考慮한 形狀最適化를 試圖할 수 없었다.

그래서 1980年 上記의 研究를 擴張하여 AISC 示方書의 規定을 만족하는 最適解를 誘導하였다⁽¹²⁾.

1980年 Saka⁽¹³⁾는 逐次線形計劃法(SLP)의 適用으로 最適形狀을 誘導하였다.

1981年 Kanji Imai 및 Schmit, L.A⁽¹⁴⁾는 近似法과 數學的 計劃法을 調和한 乘數法(multiplier method or primal and dual method)에 의해서 斷面 및 形狀을 同時에 最適化하였다.

1983年 Topping B.H.V.⁽¹⁵⁾는 80年 初까지의 形狀最適化 現況에 對한 紹介를 하였다.

1983年 U. Kirsch 와 G. Toledano⁽¹⁶⁾는 形狀의 變化가 斷面の 變化보다도 構造應答에 큰 影響을 주므로 形狀이 變함에 따라 미치는 影響을 近似化하여 形狀을 最適化할 수 있는 技法을 提示하고 있다.

上記의 研究는 따라서 大型構造物의 形狀最適設計에 效率인 最適化技法으로 思料된다.

文獻調查結果 1975年 以前의 大部分 研究는 數學的 計劃法에 依한 最適化이었다.

數學的 計劃法은 數學的 複雜性 및 應用分野에 制限을 받고 構造物의 規模가 커짐에 따라 設計變數 및 制約條件式의 數가 增加하고 最適化 過程中 構造解析의 時間이 상당히 必要하게 되었다.

이러한 어려운 점을 극복하기 위해 1975年 以後에는 近似最適化技法^(17,18) 및 分割 適化^(19,20)를 試圖하여 大型構造物의 最適設計에 關心을 나타내고 있는 것으로 思料되었다. 分割最適設計는 設計空間을 分割하여 設計空間의 次元을 縮小시키고 있다.

또한 設計變數間의 關係를 附與(design vari-

able linking), 즉 同一設計變數組 形成 및 構造物의 對稱性을 導入하여 分割된 設計空間의 次元을 줄이였으며 最適化過程中 Critical한 制約條件만 考慮하여 制約條件式의 數도 縮小하였다.

文獻⁽¹⁾에서는 形狀이 固定된 경우의 近似概念과 數學的 計劃法을 調和한 最適化技法의 使用으로 最適化의 效率을 높였다.

文獻⁽¹⁹⁾에서도 形狀이 固定의 適合方程式을 近似化하여 빨리 最適解에 收斂시키고 있다.

以上の 研究結果로부터 斷面과 形狀을 同時에 最適化는 根本的으로 서로 다른 性質을 갖는 2種類의 變數로 設計空間을 形成한다.

이러한 變數들이 組合되면 收斂方法이 달라 最適解를 구하기 곤란하다. 따라서 本 研究에서는 斷面の 最適化와 形狀의 最適化를 獨立的으로 遂行할 수 있도록 two-level 最適化를 試圖하는 한편 level-one 에서는 分割最適化로 設計變數 및 制約條件式의 數를 減少하여 大型構造物의 形狀最適化에 寄與코자 하나 本 研究는 level-one 에서 數學的 計劃法을 利用하고 있으므로 大型 構造物 形狀最適化의 基礎的인 研究로 思料된다.

3. 形狀最適化 問題形式

트러스構造物의 最適形狀을 얻기 위한 一般的인 最適化問題形式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & W = W(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) \\ \text{Subject to : } & H_i(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = 0 \quad i=1, \dots, k \\ & G_j(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) \geq 0 \quad i=1, \dots, L \\ & \dots\dots\dots(3-1) \end{aligned}$$

$$\bar{X}^L \leq \bar{X} \leq \bar{X}^U, \quad \bar{Y}^L \leq \bar{Y} \leq \bar{Y}^U, \quad \bar{Z}^L \leq \bar{Z} \leq \bar{Z}^U$$

여기서, $H_i(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) =$ 解析制約條件式

$G_j(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) =$ 制約條件式

本 研究에서는 트러스構造物의 形狀最適設計를 위해 分割最適化技法을 使用한다.

이 경우 最適化形式은 다음과 같다.

1) Level 1

形狀이 固定된 트러스의 Two-Phases의 最適化이므로 設計變數는 斷面積이 되며, 트러스構造物을 두 개의 最適化構造物로 分割한다. 이러한 最適設計 計劃問題의 最適化形式은 다음과 같

다.

(1) Phase 1

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } W &= W(\bar{X}, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0) \\ \text{Subject to : } H_i(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}_0) &= 0 \\ G_j(\bar{X}, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0) &\geq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(3-2)$$

\bar{X} : Phase 1에서의 設計變數

(2) phase 2

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } W &= W(\bar{X}_0, \bar{Y}, \bar{Z}_0) \\ \text{Subject to : } H_i(\bar{X}_0, \bar{Y}, \bar{Z}_0) &= 0 \\ G_j(\bar{X}_0, \bar{Y}, \bar{Z}_0) &\geq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(3-3)$$

\bar{Y} : phase 2에서의 設計變數

2) Level 2

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } W &= W(\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}) \\ \text{Subject to : } \bar{Z}^L \leq \bar{Z} \leq \bar{Z}^U \end{aligned} \quad \dots\dots(3-4)$$

\bar{Z} : Level 2에서의 設計變數

4. 最適化모델

4-1. 目的函數

m 개의 部材로 이루어진 트러스構造物의 重量을 最小化하기 위한 目的函數는 메트릭스로 表現하면 다음과 같다.

(1) Phase 1

$$M_1(\bar{W}) = \{W_1\}^T \{L_1\} \quad \dots\dots(4-1)$$

여기서, $\{W_1\} = (LR \times 1)$ 部材斷面積 메트릭스

$k = \text{Phase 1에서 考慮되는 部材數}$

$\{L_1\} = (k \times 1)$ 의 部材길이 메트릭스

(2) Phase 2

$$M_2 = (\bar{W}) = \{W_2\}^T \{L_2\} \quad \dots\dots(4-2)$$

여기서, $\{W_2\} = (j \times 1)$ 의 部材斷面積 메트릭스

$j = \text{Phase 2에서 考慮되는 部材數}$

$\{L_2\} = (j \times 1)$ 의 部材길이 메트릭스

4-2. 制約條件

(1) 應力制約條件式

變位法으로 構造解析할 경우 應力制約條件式은 다음과 같이 表示할 수 있다.

① Phase 1

$$\begin{aligned} \{ \sigma_{ca} \} \\ \leq [D_1][T_1][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\} \\ \leq \{ \sigma_{ta} \} \end{aligned} \quad \dots\dots(4-3)$$

여기서, $\{ \sigma_{ca} \} = \text{許容壓縮應力 메트릭스}$

$\{ \sigma_{ta} \} = (k \times 1)$ 의 許容引張應力 메트릭스

$$[D_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_k} \end{bmatrix} (k \times k)$$

$A_i = i$ 部材의 斷面積

$$[T_1] = [[T_{11}], [T_{12}]]$$

$$[T_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} (k \times k)$$

$$[T_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} (k \times (m-k))$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_m \end{bmatrix} (m \times m)$$

$$K_i = \frac{A_i E_i}{L_i}$$

$L_i = i$ 番 部材의 길이

$E_i = i$ 番 部材의 彈性係數

$[\beta]^T = (n \times m)$ 相連結關係 메트릭스

$n = \text{自由度數}$

$T = \text{메트릭스의 轉置}$

$\{A\} = (n \times 1)$ 의 節點荷重 메트릭스

② Phase 2

$$\begin{aligned} \{ \sigma_{ca} \} \\ \leq [D_2][T_2][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\} \\ \leq \{ \sigma_{ta} \} \end{aligned} \quad \dots\dots(4-4)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \frac{1}{A_j} \end{bmatrix} (j \times j)$$

$$[T_2] = [[T_{21}], [T_{22}]]$$

$$[T_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} [j \times (m-j)]$$

$$[T_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} (j \times j)$$

4-3. 掘掘應力制約條件式

(1) Euler의 掘掘應力制約條件式

① Phase 1

$$[C_1] \{\theta\} - [D_1][T_1][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\} \geq \{0\} \dots\dots\dots(4-5)$$

여기서, $\{\sigma_B\} = (f_{1 \times 1})$ 의 掘掘應力메트릭스

$f_1 = \text{Phase 1의 壓縮部材數}$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{f_1}} \end{bmatrix} (f_1 \times f_1)$$

$$\{\theta_i\} = (\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_{f_1})^T$$

$$\theta_i = \frac{\pi^2 E \alpha_i A_i}{L_i^2}$$

$\alpha_i = 1.34$ 文獻⁽⁷⁾參照

② Phase 2

$$[C_2] \{A_2\} - [D_2][T_2][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\} \geq \{0\} \dots\dots\dots(4-6)$$

여기서, $\{\sigma_B\} = (f_{2 \times 1})$ 의 掘掘應力메트릭스

$f_2 = \text{Phase 2의 壓縮部材數}$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{f_2}} \end{bmatrix} (f_2 \times f_2)$$

$$\{\theta_2\} = (\theta_1, \dots, \theta_{f_2})^T$$

(2) 道路橋標準示方書의 掘掘應力制約條件式

① Phase 1

$$\{\sigma_{CB}\} - [C_1][T_1][\tilde{K}][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\} \geq \{0\} \dots\dots\dots(4-7)$$

여기서, $\{\sigma_{CB}\} = (f_{1 \times 1})$ 의 示方書에서 規定하는 許用掘掘應力메트릭스

$$\sigma_{CBi} = a_i + b_i(L_i/e_i A_i \alpha)$$

$a_i, b_i, e_i =$ 示方書에서 規定하는 係數

$\alpha =$ 文獻⁽⁷⁾에서 주어지는 常數

② Phase 2

$$[\sigma_{CB}] - [C_2][T_2][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\} \geq \{0\} \dots\dots\dots(4-8)$$

$\{\sigma_{CB}\} = (f_{2 \times 1})$ 의 示方書에서 規定하는 許用掘掘應力메트릭스

4-4. 變位制約條件式

變位制約條件式을 메트릭스 形態로 表現하면 다음과 같다.

(1) Phase 1

$$\{q_0\} - \{q\} \geq \{0\} \dots\dots\dots(4-9)$$

여기서, $\{q_0\} = (n \times 1)$ 의 節點許用範圍메트릭스

$\{q_1\} = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n})^T = \text{Phase 1에서 的 變位}$

$$q_{1i} = \{(A_1)[E_1][L_1][T_1]^T \{F^i_{e1}\} [T_1][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1} + (A_2)[E_2][L_2][T_2]^T \{F^i_{e2}\} [T_2][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\} \{A\} \dots\dots\dots$$

여기서, $(A_1) = \left(\frac{1}{A_1}, \dots, \frac{1}{A_k}\right) (1 \times k)$

$[E_1] =$ 各部材의 彈性係數메트릭스

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{E_k} \end{bmatrix} (k \times k)$$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix} (k \times k)$$

$\{F^i_{e1}\} = \text{Phase 1에서 } i \text{番節點 變位方向의 單位荷重으로 인한 } (1 \times k) \text{部材力메트릭스}$

(2) Phase 2

$$\{q_0\} - \{q_2\} \geq 0 \dots\dots\dots(4-10)$$

여기서, $\{q_2\} = (q_{21}, \dots, q_{2n}, \dots, q_{2n})^T$

$$q_{2i} = \{(A_1)[E_1][L_1][T_1]^T \{F^i_{e1}\} [T_1][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1} + (A_2)[E_2][L_2][T_2]^T \{F^i_{e2}\} [T_2][\tilde{K}][\beta][(\beta)^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\} \{A\} \dots\dots\dots(4-11)$$

$$(A_2) = \left(\frac{1}{A_1} \dots \frac{1}{A_j} \right) (1 \times j)$$

$$[E_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{E_j} \end{bmatrix} (j \times j)$$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{L_j} \end{bmatrix} (j \times j)$$

$\{F^{i_2}\}_{(1 \times j)}$ = Phase 2에서 i 번째 변위 방향의 단위荷重으로 인한 $(1 \times j)$ 部材力메트릭스

4-5. 設計變數限界制約條件式

$$\{X^L\} \leq \{X\} \leq \{X^U\} \dots \dots \dots (4-11)$$

여기서, $\{X^L\}$ = 設計變數下限値메트릭스

$\{X^U\}$ = 設計變數上限値메트릭스

지금까지 誘導된 應力制約條件式(4-3) 및 (4-4), 挫掘應力制約條件式(4-5) 및 (4-6), 變位制約條件式(4-9) 및 (4-10), 設計變數限界制約條件式(4-11), 및 目的函數를 多載荷條件式과 함께 綜合하면 다음과 같다.

① Phase 1

$$\text{Minimize : } M_1(W) = \{W_1\}^T \{L_1\}$$

$$\text{Subject to : } \left. \begin{aligned} & \{\sigma_s\} - [D_1][T_1][\tilde{K}][\beta]([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \geq \{0\} \\ & [D_1]\{\theta_1\} - [C_1][T_1][\beta]([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ & \text{or } \{\sigma_{cB}\} - [C_2][T_2][\tilde{K}][\beta]([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \geq \{0\} \\ & \{q_s\} - \{q\}^{NL} \geq \{0\} \\ & \{X\} - \{X^L\} \geq \{0\} \\ & \{X^U\} - \{X\} \geq \{0\} \end{aligned} \right\} (4-12)$$

② Phase 2

$$\text{Minimize : } M_2(W) = \{W_2\}^T \{L_2\}$$

$$\text{Subject to : } \left. \begin{aligned} & \{\sigma_s\} - [D_2][T_2][\tilde{K}][\beta]([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \geq \{0\} \\ & [D_2]\{\theta_2\} - [C_2][T_2][\beta]([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ & \text{or } \{\sigma_{cB}\} - [C_2][T_2][\tilde{K}][\beta]([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \geq \{0\} \\ & \{q_s\} - \{q\}^{NL} \geq \{0\} \\ & \{X\} - \{X^L\} \geq \{0\} \\ & \{X^U\} - \{X\} \geq \{0\} \end{aligned} \right\} (4-13)$$

여기서, NL : 載荷條件數

5. SUMT 法에 의한 斷面最適化

式(4-12) 및 (4-13)의 最適化問題를 SUMT 計劃問題로 變形하면 다음과 같은 interior penalty function 을 얻는다.

5-1. Phase 1

$$\text{Minimize : } W_1(\bar{w}_1, \vec{k}) = \{w_1\}^T \{L_1\} + R_j \left(\sum_{NL=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{1}{G_{1i}^{NL}} + \sum_{k=1}^{j_1} \frac{1}{G_{2k}^{NL}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_{3i}^{NL}} \right) \dots (5-1)$$

여기서, R_j : j 번째 反復에서의 Penalty Parameter $\sum_{i=1}^k G_{1i}^{NL}$, $\sum_{k=1}^{j_1} G_{2k}^{NL}$, $\sum_{i=1}^n G_{3i}^{NL}$ 을 벡터적으로 $\{G_{v1}\}_1$, $\{G_{v2}\}_1$, $\{G_{v3}\}_1$ 로 表現하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \{G_{v1}\}_1 \\ \{G_{v2}\}_1 \\ \{G_{v3}\}_1 \end{cases} = \begin{cases} \{\sigma_s\} - [D_1][T_1][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ [D_1]\{\theta_s\} - [D_1][T_1][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ \{\sigma_{sB}\} - [D_1][T_1][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ \{q_s\} - \{q\}^{NL} \end{cases} \quad \dots\dots(5-2)$$

5-2. Phase 2

Minimize : $W_2(\bar{w}_2, \bar{R}) = \{W_2\}^T \{L_2\} + R_j \left(\sum_{NL=1}^{NL} \sum_{i=1}^k \frac{1}{G_{1i}^{NL}} + \sum_{k=1}^{f_2} \frac{1}{G_{2k}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_{3i}} \right) \dots(5-3)$

$\sum_{i=1}^k G_{1i}^{NL}$, $\sum_{k=1}^{f_2} G_{2k}^{NL}$, $\sum_{i=1}^n G_{3i}^{NL}$ 을 벡터적으로 $\{G_{v1}\}_2$, $\{G_{v2}\}_2$, $\{G_{v3}\}_2$ 로 表現하면 다음과 같다,

$$\begin{cases} \{G_{v1}\}_2 \\ \{G_{v2}\}_2 \\ \{G_{v3}\}_2 \end{cases} = \begin{cases} \{\sigma_s\} - [D_2][T_2][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ [D_2]\{\theta_s\} - [D_2][T_2][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ \{\sigma_{sB}\} - [D_2][T_2][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ \{q_s\} - \{q\}^{NL} \end{cases} \quad \dots\dots(5-4)$$

6. 最適化 알고리즘

Level 1의 two-phases에서 사용하는 SUMT法 및 Level 2의 Powell Method의 一方向探查法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 構造物의 形狀을 最適化하는 綜合的인 알고리즘은 다음과 같이 요약할 수 있다.

- Step 1 : 分割된 構造選擇
- Step 2 : 斷面의 初期值 $\{X_0\}$ 附與
- Step 3 : 斷面의 初期值 또는 反復試行中 일은 斷面이 實行可能領域에 있는지를 檢査한다. 反復試行中 일은 斷面이 實行可能領域에 있으면 다음 단계로 진행하나 그렇지 않으면 實行可能領域의 設計點으로 變換한다.
- Step 4 : 다음의 設計點 $\{X^{r+1}\}$ 을 찾기 위한 Modified Newton-Raphson Method의 反復試行 $\{X^{r+1}\} = \{X^r\} - \{\beta^r\}$ 로부터 收斂値를 求한다.
- Step 5 : 앞 過程에서 Phase 1이 收斂하면 Phase 2로 進行이 되나 그렇지 않으면 Step 4로 되돌아 간다.
- Step 6 : 앞 過程의 收斂限界値를 代入한 目的函數만 가지고 Powell Method의 一方向探查法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 座標를 수정해 나간다. 目的函數값이 收斂하거나 許用反復回

數에 도달하면 정지하나 그렇지 않으면 Step 2로 되돌아 간다. 이 때에는 $K=1$ 로 하여 反復試行을 시작함. 이상의 過程에 관한 flow-chart는 그림 6-1과 같다.

7. 數値例 및 結果分析

7-1. 文獻⁽²¹⁾ 및 本 研究의 結果

本 研究은 文獻 21을 擴張한 것으로 文獻 21에서 適用한 7部材트러스의 設計條件은 表 7.1에 文獻 21의 研究와 本 研究의 比較은 表 7.2에, 本 研究方法에 의한 最適解는 表 7.3에 수록되어 있고, 이 結果를 表示하면 그림 7-1과 같다. 한편 文獻 21 및 本 研究의 結果를 표시하면 그림 7-2과 같다.

表 7-1. 載荷條件 및 制約條件

條件의 種類	節 點	X 方向 荷重	Y 方向 荷重
載荷條件 (kg)	5		-5×10^5
應力制約 (kg/cm ²)		$-2000 \leq \sigma_s \leq 2000$	
彈性係數 (kg/cm ²)		2.1×10^6	

表 7-2. 本 研究 및 文獻의 研究 結果

構造形態	反復回數	本 研究	文獻 ⁽²¹⁾ 의 研究
7部材트러스	形狀이 固定된 경우	119,999.69	119,000
	1 回	969,948.44	909,953
	2 回	96,948.17	909,953

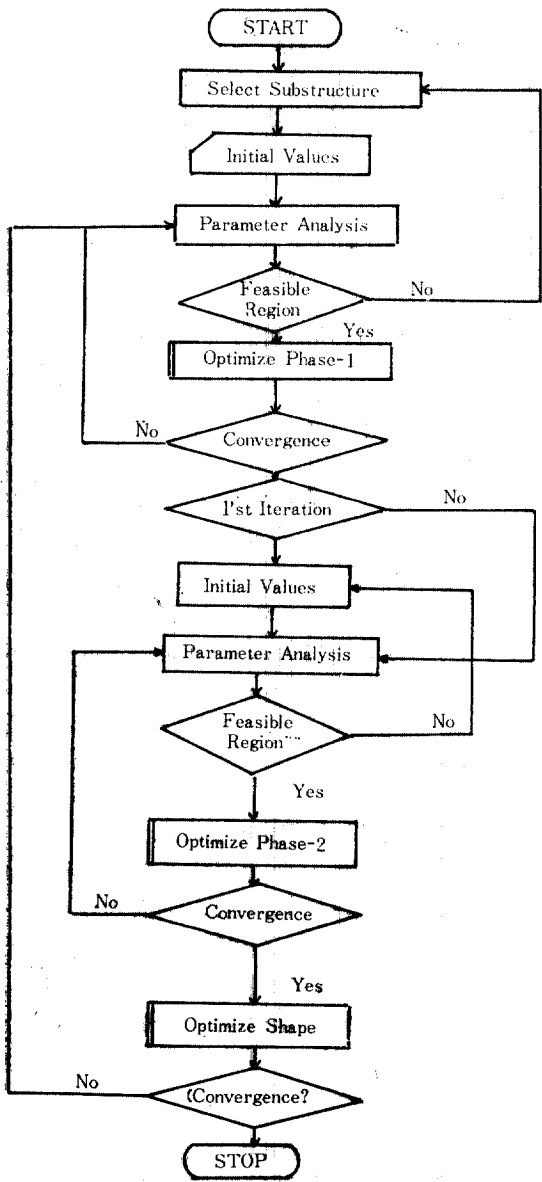


그림 6-1. 形狀最適化 flow chart

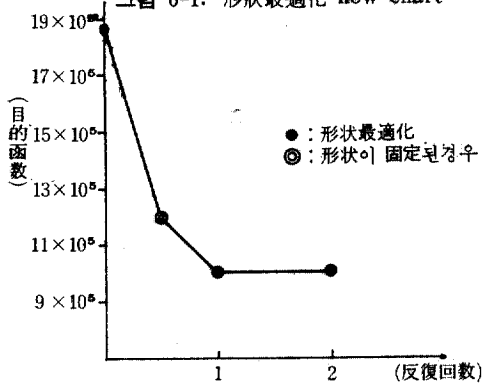
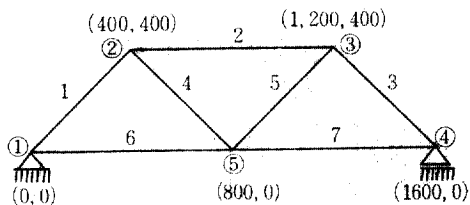


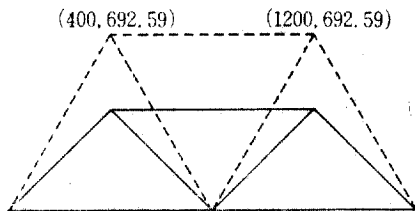
그림 7-1. 反復試行에 따른 目的函數

表 7-3. 本 研 究 方 法 에 依 한 結 果

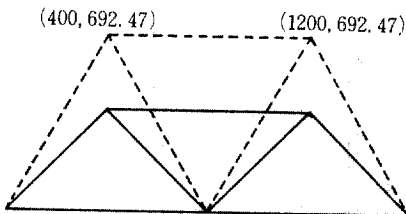
反 復 回 數	部 材	Phase 1				Phase 2			Phase 3				
		目的函數				目的函數			節 點				
		1	2	3	4	5	6	7	X	Y	X	Y	
初 期 值		400	400	400	400	400	400	400	400	1,200	400	400	1,865,096.50
形 狀 이 固 定 된 경 우	固 定	247.40	350.00	247.49	174.99	699,999.96	247.49	174.99	419,999.77	1,200	400	400	1,199,999.69
1	回	202.10	202.17	202.10	101.10	565,844.29	202.10	101.10	404,104.24	1,200	400	692.47	969,948.44
2	回	202.10	202.14	202.10	101.07	565,829.89	202.09	101.07	404,118.36	1,200	400	692.59	969,948.17
3	回	202.10	202.14	202.10	101.07	565,829.89	202.90	101.07	404,118.36	1,200	400	692.59	969,948.17



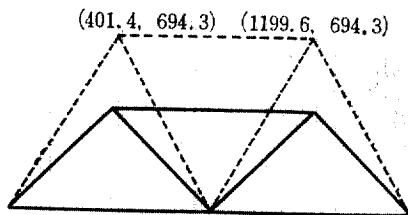
(a) 文獻 21 의 構造模型



(c) 2 回反試行後의 構造模型



(b) 1 回反復試行의 構造模型



(d) 文獻 21 의 最適形狀

그림 7-2. 本 研究 및 文獻⁽²¹⁾의 結果

7-2. 文獻⁽²¹⁾, 文獻⁽²⁾ 및 本 研究의 結果

文獻 21, 文獻 2 에서 適用한 11 部材트러스의 設計條件은 表 7.4, 文獻 21, 文獻 2 의 研究와 本 研究의 比較는 表 7.5 에, 本 研究方法에 의 한 最適解는 表 7.6 에 수록되어 있고 이 結果를 表示하면 그림 7-3 과 같다.

한편 文獻 21 文獻 2 및 本 研究의 結果를 포 시하면 그림 7-4 와 같다.

表 7-4. 載荷條件 및 制約條件

條件의 種類	節 點	x 方向 荷重	y 方向 荷重
載 荷 條 件 (lb)	4		-2×10^4
應 力 制 約 (psi)		$-2 \times 10^4 \leq \sigma_c \leq 2 \times 10^4$	
彈 性 係 數 (psi)		0.1×10^8	
單 位 重 量 (lb/in ³)		0.1	

表 7-5. 本 研究 文獻⁽²⁾ 및 文獻⁽²¹⁾의 研究結果

構造形態	反復回數	本 研究	文獻 ⁽²⁾ 의 研 究	文獻 ⁽²¹⁾ 의 研 究
	形狀이 固 定된 경우	80.06	80.0	80.0481
7 部 材 트 러 스	1 回	68.74	62.5	65.3767
	2 回	61.45		65.3767
	3 回	60.91		65.3767

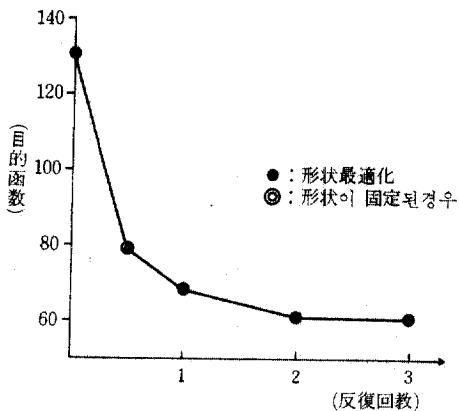
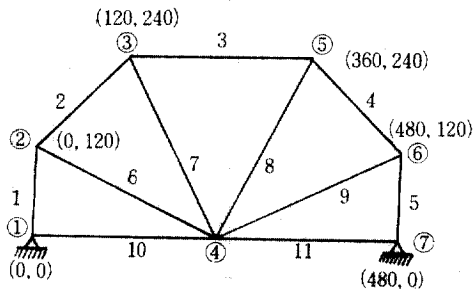


그림 7-3. 反復試에 따른 目的函数



(a) 文獻 2, 文獻 21 의 構造模型

表 7-6. 本研究 방법에 의한 結果

反復回数	部材	Phase 1							Phase 2				Phase 3												
		目的函数							目的函数				點												
		1	2	3	4	5	6	7	5	6	7	8	9	10	11	2	3	5	6	X	Y	X	Y	X	Y
初期值	1	0.1	0.5	0.5	1	0.5	1	0.5	1	0.1	0.5	1	0.1	90.65	120	120	240	240	360	240	480	120	130.47		
形状이 固定된 경우	0.50.47	0	0.37	0.37	0.50	0.37	56	0.37	0.50	0.37	0.47	0.37	0.5	56	120	120	240	240	360	240	480	120	80.06		
1	0.530.55	0	0.33	0.32	0.54	0.32	45.26	0.32	0.54	0.32	0.55	0.33	0	45.26	50.35	138.23	177.5	233.34	302.5	233.34	429.65	138.23	68.74		
2	0.680.65	0	0.29	0.25	0.63	0.25	37.56	0.25	0.63	0.25	0.65	0.29	0	37.56	149.02	161.90	216.62	189.57	263.38	189.57	330.98	161.90	61.45		
3	0.690.70	0	0.34	0.22	0.69	0.22	36.98	0.22	0.69	0.22	0.70	0.34	0	36.98	142.68	148.35	212.98	172.74	267.02	172.74	337.32	148.35	60.41		

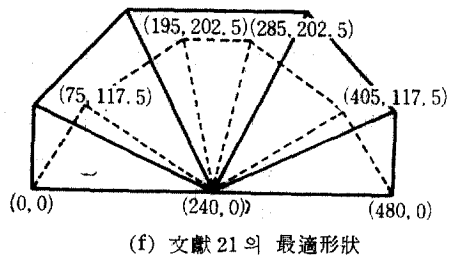
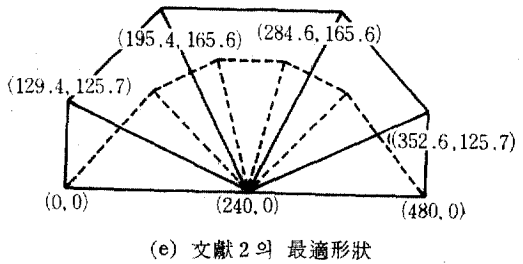
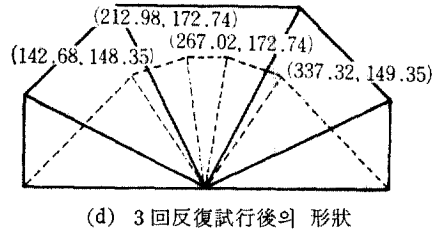
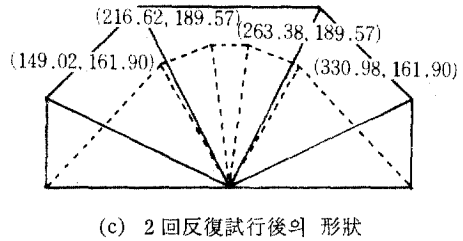
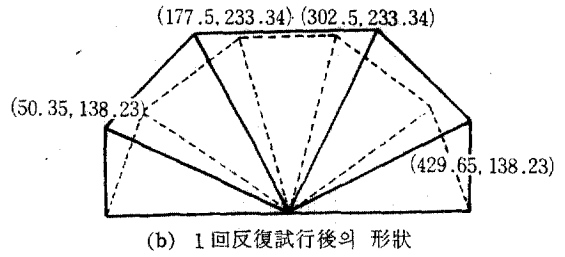


그림 7-4. 文獻 21, 文獻 2 및 本 研究 의 最適形状

7-3. 文獻⁽¹⁴⁾ 및 本 研究의 結果

文獻 14 에서 適用한 18 部材트러스의 設計條件은 表 7.7, 文獻 14 의 研究와 本 研究의 比較는 表 7.8 에, 本 研究方法에 의한 最適解는 表 7.9 에 수록되어 있고 이 結果를 表示하면 그림 7-5 과 같다.

한편 文獻 14 및 本 研究의 結果를 표시하면 그림 7-6 과 같다.

表 7-7. 載荷條件 및 制約條件

條件의 種類	節 點	X 方向 荷重	Y 方向 荷重
載荷荷重 (lb)	1		-20,000
	2		-20,000
	4		-20,000
	5		-20,000
	8		-20,000
應力制約 (psi)	$-20,000 \leq \sigma_a \leq 20,000$		
挫掘應力 (psi)	$\sigma_i b = -k_i \frac{A_i}{L_i^2} \quad k_i = 0.4 \times 10^{-6} \text{psi}$		
彈性係數 (psi)	0.1×10^8		
單位重量 (lb/in ³)	0.1		

表 7-8. 本 研究 및 文獻의 研究 結果

構造形態	反復回數	本 研究	文 獻의 研究
18部材트러스	形狀이 固定된 경우	5,180.37	6,430
	1 回	5,064.53	
	2 回	5,064.52	
	3 回	5,064.52	

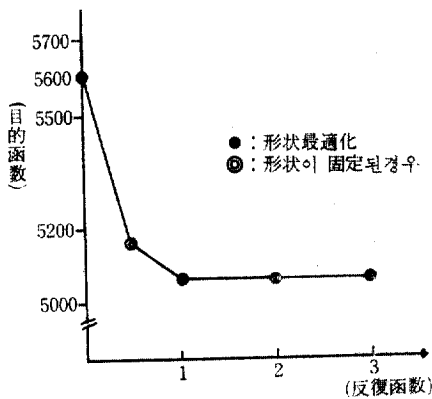
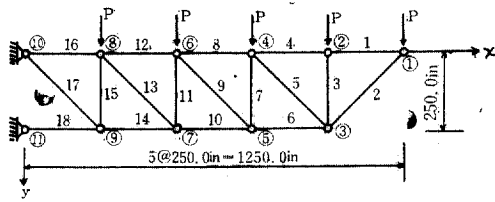


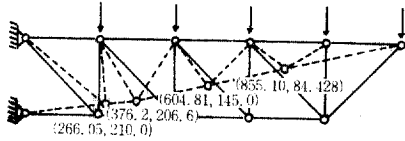
그림 7-5. 反復試行에 따른 目的函數

表 7-9. 本 研究方法에 의한 結果

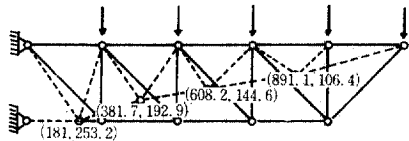
反 復 回 數	部 材	Level 1				Level 2				目的函數				
		Phase 1		Phase 2		節 點		座 標						
		$A_1 = A_4 = A_9 = A_{12} = A_{16}$	$A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$	目的函數	$A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$	$A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$	目的函數	X	Y		X	Y		
初期值		10	10	2,810.659	10	10	1,000	250	500	250	250	250	250	5,621.318
形狀이 固定된 경우		9.999	15.0	2,405.348	10	7.07	1,000	250	500	250	250	250	250	5,180.37
1	回	11.521	17.938	2,563.32	12.15	4.43	855.10	604.81	376.2	145.0	266.05	210.0	210.0	5,064.53
2	回	11.521	17.938	2,563.32	12.15	4.43	855.10	604.81	376.2	145.0	266.05	210.0	210.0	5,064.53
3	回	11.521	17.938	2,563.32	12.15	4.43	855.10	604.81	376.2	145.0	266.05	210.0	210.0	5,064.53



(a) 文獻 14 의 構造模型



(b) 本 研究의 最適形狀



(c) 文獻 14 의 最適形狀

그림 7-6. 本 研究 및 文獻⁽¹⁴⁾의 最適形狀

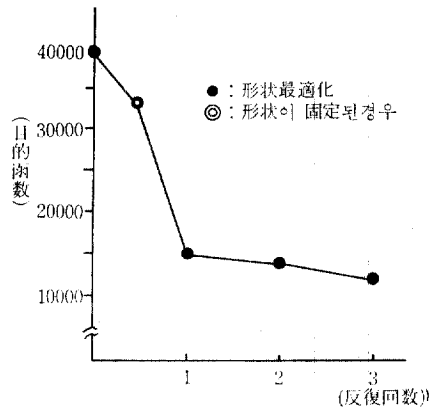


그림 7-7. 反復試行에 따른 目的函数

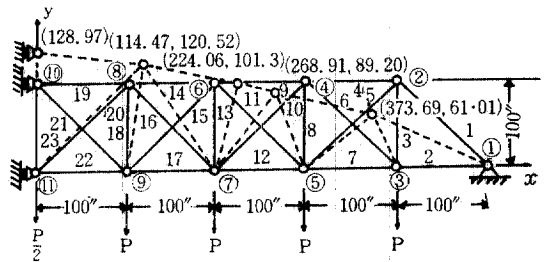


그림 7-8. 23 部材트러스의 最適形狀

7-4. 23 部材트러스

23 部材트러스의 設計條件은 表 7.10 에, 最適解는 表 7.11 에 表示하였고 이 結果를 圖示하면 그림 7-7 및 그림 7-8과 같다.

表 7-10. 載荷條件 및 制約條件

條件의 種類	節 點	X 方向荷重	Y 方向荷重
載荷條件 (lb)	3		-20,000
	5		-20,000
	7		-20,000
	9		-20,000
	11		-10,000
應力制約 (psi)		$-20,000 \leq \sigma_c \leq 20,000$	
彈性係數 (psi)		0.1×10^8	
單位重量 (lb/in ³)		0.1	

7-5. 數值計算結果의 比較分析

分割最適化技法에 依한 本 研究의 알고리즘을 實際의 構造物에 適用하여 얻어진 結果를 바탕으로 本 알고리즘의 適用性과 收斂性을 分析하

면 다음과 같다.

(1) 本 研究에서 提案하는 Level 1에서 two-phases의 Modified Newton-Raphson Method에 依한 SUMT法, Level 2에서의 Powell Method의 一方向探查法에 의해 目的函数만이 最小가 되도록 하는 技法으로 構成된 本 研究의 알고리즘을 利用하여 各種 트러스의 形狀最適化에 適用하여 본 結果 트러스의 形態, 載荷條件, 制約條件의 變化에 拘束됨이 없이 그림 7-1, 그림 7-3, 그림 7-5, 그림 7-7에서 알 수 있듯이 Oscillation 現象이 생기지 않으며 最適解를 구할 수 있다는 事實이 證明되었다.

(2) 4 種類의 트러스에 各各의 設計條件을 附與하여 本 알고리즘으로 트러스의 形狀最適化에 適用하여 본 結果, 그림 7-1, 그림 7-3, 그림 7-5, 그림 7-7에서 볼 수 있는 바와 같이 대략 2회 이내의 反復試行으로 最適解에 빨리 收斂한다는 事實을 알았다.

(3) 數值例를 통하여 同一設計條件下에서 트러스의 幾何學的 形態를 固定시키고 斷面만을 最適化한 경우보다 트러스의 形狀까지도 最適化

表 7-11. 最適解

部 材 反復回数		Phase 1											Phase 2							
		Level 1											Level 2							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15	16	17	18
初期直	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	1365.685	10	10	10	10	10	10	10
形状 ^o 固定된 경우	6.36	4.91	3.39	5.61	1.57	3.38	2.52	1.35	9.0	1.47	2.06	0.01	478.152	0.01	1.08	1.07	0.27	1.85	2.53	0.96
1 回	6.84	4.74	3.93	6.07	0.28	4.91	0.01	0.92	10.65	1.21	0.01	0.01	429.869	0.01	0.01	11.43	1.22	0.01	0.69	0.01
2 回	7.77	2.43	2.97	7.42	0.38	3.37	0.01	0.90	10.57	1.05	0.01	0.01	399.140	0.01	0.01	10.34	0.53	0.01	0.57	1.01
3 回	10.34	0.28	1.16	10.16	1.25	0.11	0.65	0.01	10.25	0.01	0.20	0.17	338.531	0.22	0.26	10.06	0.01	0.85	0.11	0.98
部 材 反復回数		Level 2											Level 3							
		phase 3											點							
		19	20	21	22	23	2		4		6		8		10		Y		Y	
初期直	10	10	10	10	10	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	
形状 ^o 固定된 경우	12.3	0.48	0.22	2.98	0.16	400	100	300	100	200	100	200	100	200	100	200	100	100	100	
1 回	11.40	0.01	0.01	1.43	0.48	400	100	300	100	195	100	195	100	100	100	100	109.6	700.719		
2 回	10.01	0.01	0.46	0.01	0.53	413.2	75.83	270.10	89.20	200.95	83.20	200.95	100	109.45	119.00	125.98	654.159			
3 回	9.78	0.01	0.12	0.12	0.41	373.69	61.01	268.91	89.20	224.06	101.3	224.06	114.47	120.52	128.97	605.138				

한 경우에는 트러스의 初期의 幾何形態와 設計條件에 따라 다소 차이가 있겠지만, 本 數値例를 基準으로 할 때 表 7.12와 같이 약 18.3% 정도 重量이 減少한다는 사실을 알 수 있으므로 트러스의 形狀最適化는 트러스構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 사료된다.

表 7-12.

構造模型	形狀이 固定된 경우	形狀最適化 의 경우	重量減少率
7部材트러스	119,999.69	969,948.44	19.2%
11部材트러스	80.06	60.41	23.9%
18部材트러스	5,180.37	5,064.53	9.0%
23部材트러스	825.574	654.169	20.8%

(4) 文獻 21, 文獻 2 및 文獻 14와 本 研究의 two-Levels 技法을 使用하여 同一構造의 最適解를 比較해본 結果 目的函數값 및 最適形狀의 節點座標에 다소 차이가 있음을 그림 7-2, 그림 7-4, 그림 7-6 으로부터 알 수 있다.

이는 알고리즘의 차이로 생긴 것이라고 판단된다.

(5) 實際 트러스構造物 斷面值數는 離散型이므로 實用化를 위한 構造物의 最適設計를 試圖할 경우에는 離散型計劃問題로부터 最適解를 얻어야 한다. 그러나 本 研究에서는 構造物斷面值數를 連續的으로 假定하였기 때문에 豫備設計段階에서의 最適形狀을 決定하는데 利用할 수 있을 것으로 생각된다.

8. 結 論

本 研究에서 適用된 알고리즘의 妥當성과 收斂性을 分析하기 위하여 여러 트러스 構造模型에 適用하여 얻어진 研究結果를 要約하면 다음과 같다.

1. 形狀을 最適化하므로써 重量을 상당히 減少시킬 수 있다는 사실을 알 수 있으므로 本 研究에 의한 트러스의 形狀最適化는 트러스構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

2. 他의 알고리즘과 本 研究의 알고리즘을 比較分析한 結果 目的函數 및 最適形狀의 모양이

거의 비슷하였으며, 最適解를 求하는 收斂性에서는 反復試行數단으로 볼 때 거의 같은 水準의 收斂性을 가지고 있다고 思料된다.

3. 本 研究에서는 Level-one에서 two-Phases의 斷面最適化, Level-two에서 形狀最適化를 하므로써 大型構造物 形狀最適化에 基礎的인 도움이 될 것으로 思料된다.

參 考 文 獻

- G.B. Dantzig., "A Decomposition Principle for Linear Program," Princeton University Press, 1963.
- Vander Plants, G.N., "Automated Design of Elastic Trusses for Optimum Geometry," Report No. 45, School of Engineering, Case Western Reserve Univ., June, 1971.
- Uri Kirsch., "Optimum Structural Design," McGraw-Hill Company, 1968.
- Lucien A. Schmit, Thom P. Kicher., "Synthesis of Material and Configuration Selection," *Journal of Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 88, No. ST3, June 1962, pp.79~102.
- William S. Dorn, Relp E. Gomory., Greenbery, H.J., "Automatic Design of optimal Structures," *Journal de Mecanique*. Vol. 3, No. 1 Mars, 1964, pp.25~52.
- Dobbs, M.W., Felton, L.P., "Optimization of Truss Geometry," *Journal of Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 95, No. ST10 Oct. 1969, pp.2105~2117.
- Pedersen, P., "On the Optimal Layout of Multi-Purpose Trusses," *Computers and Structures*, Vol. 2, 1972.
- Pedersen, P., "Optimal Joint Positions for Space Trusses," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 99, ST12, 1973, pp.2459~2476.
- Vänderplaats, G.N., and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 98, ST3, Proc. Paper 8795, Mar., 1972, pp.671~690.
- Spillers, W.R., "Iterative Design for Optimal Geometry," *Journal of the Structural Division*,

- ASCE, Vol. 101, No. ST7, Proc. Paper 11439, July, 1975, pp. 1435~1442.
11. Friedland, L.R., "Geometric Structural Behavior," Thesis Presented to Columbia University, at New York, N.Y., in 1971 in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
 12. Spillers, W.R., and George E. Kountouris., "Geometric Optimization Using Simple Code Representation," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 106, No. ST5, Proc. Paper 15396, May, 1980, pp. 959~971.
 13. Saka, M.P., "Shape Optimization of Trusses," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 106, No. ST5 Proc. Paper 15437 May 1980, pp. 1155~1173.
 14. Kanji Imai., and Schmit, F., "Configuration Optimization of Trusses," *Journal of Structural Division, ASCE*, Proc. Vol. 107, No. ST5, May, 1981, pp. 745~756.
 15. Topping, B.H.V., "Shape Optimization on Skeletal Structures: A review," *Journal of the structural Division, ASCE* Vol. 109, No. 8, Proc. Paper 18187 August., 1983, pp. 1933~1951.
 16. U. Kirsch and G. Toledano., "Approximate Reanalysis for Modifications of Structural Geometry," *Journal of Computers and structures*, Vol. 16, No. 1~4, 1983, pp. 269~277.
 17. C. Fleury and L.A. Schmit," Primal and Dual Methods in Structural Optimization," *Journal of the structural Division, ASCE*, Vol. 106, No. ST5, May., 1980, pp. 1117~1133.
 18. U. Kirsch., "Optimal Design of Trusses by Approximate Compatibility," *Journal of Computers and Structures*, Vol. 12, 1980, pp. 93~98.
 19. U. Kirsch., "An Improved Multilevel Structural synthesis Method," *Journal of Structural Mechanics*, 13(2), 1985, pp. 123~144.
 20. A.J. Morris, "Foundation of structural optimization: a Unified Approach," John wiley & Sons Ltd. 1982.
 21. 이규원 : "평면트러스구조물의 형상 최적화에 관한 연구" 연세대학교 대학원, 1980.
(接受 : 1986. 1. 4.)