大地座標決定을 위한 解析的 交會法의 比較研究

Comparative Study of Analytical Intersection Methods for Determination of Geodetic Coordinates

柳 福 模*
Yeu, Bock Mo
康 仁 準**
Kang, In Joon
曺 基 成***
Cho, Gi Sung
金 旭 南****
Kim, Uk Nam

Abstract

With the improvement of the accuracy of EDM and theodolite, three-dimensional geodetic coordinates can be determinated by means of analytical Intersection & Resection using vector approach.

In this paper the accuracy of Resection, Intersection and Multilateration, by which the geodetic coordinates of a unknown point are determinated using the geodetic coordinates, horizontal angles, vertical angles, and slope distances to a known point are analyzed.

As a result, it is found that the solution of multilateration method converges into an allowable limit and the method is better than other two methods in accuracy. And it is found that if the known points are over five points, the solution of Resection and Intersection method can also converge into an allowable limit.

要 旨

電磁波 距離測量機와 角測量機의 正確度가 向上됨에 따라 벡터기법을 이용한 解析的 交會法으로서 3次元 大地座標를 결정할 수 있다.

本 論文에서는 各 旣知點의 大地座標와 水平 및 垂直角, 斜距離를 이용하여 未知點의 大地座標를 決定하는 후방교회법, 전방교회법 및 Multilateration의 正確度를 比較 分析하였다.

그 結果 Multilateration 方法이 최소 3點에서도 허용한계값 내에 수렴하였고 다른 解析的 交會法보다 正確度 면에서도 우수하며, 다른 解析的 交會法도 旣知點이 5점 이상일 경우에는 허용한계값에 부합됨을 알 수 있었다.

*正會員·延世大學校 工科大學 敎授
**正會員·釜山大學校 專任講師
***正會員·延世大學校 碩士課程
****正會員·延世大學校 産業大學院

1. 序 論

地表面上의 諸點間의 水平位置 및 垂直位置決

定에 있어서의 여러 方法이 硏究 開發되어 왔다.

3次元的인 大地座標 決定에 관한 方法에는 최근 發達된 電磁波 距離測量機와 正確度가 높은 角測量機에 의해 얻은 資料로서 벡터技法을 이용한 解析的 交會法을 들 수 있다.

이 解析的인 3次元 決定方法은 人爲的인 파손에 의해 망실된 3角點의 복원이나 地盤沈下 및 施設物의 3次元的인 變形을 正確하게 해석하는데 사용할 수 있다.

本 論文에서는 各 旣知點의 大地座標와 水平 및 垂直角, 斜距離를 이용하여 未知點의 大地座標를 決定하는 方法들간의 特徵 및 正確度를 比較 分析함으로써 解析的 交會法 中 效果的인 方法을 제시하고 효용성을 강조하는데 目的이 있으며 大地座標 및 높이를 決定하는 벡터技法을 이용한 解析的 交會法을 比較하였다.

이 解析的 交會法은 接面座標上의 후방교회법(Resection Ⅰ)과 地心座標上의 후방교회법(Resection Ⅱ), 전방교회법, Multilateration 方法이 있다.

結果分析을 위해 이 方法들을 프로그램화하였으며 國立地理院의 3角 및 水準成果表에서 얻은 大地座標 및 높이를 이용하여 各 方法에 點의 수를 최소 3點에서 6點까지 한점씩 추가함으로써 經緯度 및 높이의 正確度를 分析하고 各 方法들의 結果값을 比較 分析하였다.

2. 3次元 大地座標解析

2.1 大地座標系의 座標變換

解析的 交會法과 Multilateration 方法은 모든 旣知點의 大地座標를 楕圓體 座標로 變換시키고 다시 地心座標로 變換하여 地心座標上에서 位置座標를 決定하거나, 地心座標를 接面座標上에서 位置座標를 決定하여 다시 大地座標로 변환한다[5,7,8].

2.1.1 大地座標에서 地心座標로의 變換

大地座標(緯度 ϕ, 經度 λ, 標高 h)에서 地心座標로의 變換은 그림 2-1에서와 같이 楕圓體中心 Q로부터 높이$(N+h)$를 식(1)(2)에 의하여 구한다.

$$N=\frac{a}{(1-e^2\sin\phi)^{1/2}} \tag{1}$$

$$t=Ne^2\sin\phi \tag{2}$$

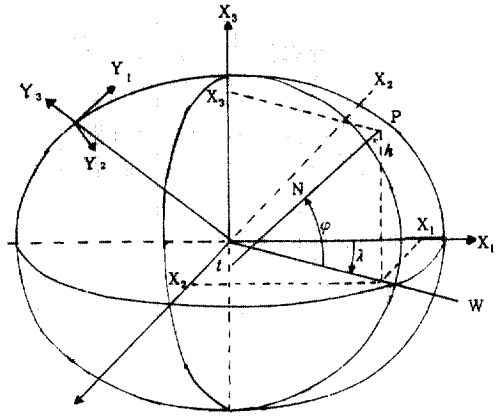

그림 2-1. 大地座標와 地心座標 및 接面座標의 關係

여기서, a=楕圓體 長半徑(Bessel 값 6377397.155 m)[10,11]

e^2=離心率

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2}(0.00667437223)$$

N=子午線 楕圓의 法線길이

$t=x_3$ 축과 N과의 교점과 地球中心과의 길이

$$\omega=(N+h)\cos\phi \tag{3}$$

$$x_3=(N(1-e^2)+h)\sin\phi \tag{4}$$

이며,

$$x_1=\omega\cos\lambda \tag{5}$$

$$x_2=\omega\sin\lambda \tag{6}$$

이므로 地心座標 x_1, x_2, x_3는 다음과 같다.

$$x_1=(N+h)\cos\phi\cos\lambda \tag{7}$$

$$x_2=(N+h)\cos\phi\sin\lambda \tag{8}$$

$$x_3=[N(1-e^2)+h]\sin\phi \tag{9}$$

2.1.2 地心座標에서 接面座標로의 變換과 그 逆變換

地心座標(x_1, x_2, x_3)에서 接面座標(y_1, y_2, y_3)의 變換과 그 逆變換은 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0\\ -\cos\lambda_0\sin\phi_0 & \sin\phi_0\sin\lambda_0 & \cos\phi_0\\ \cos\phi_0\cos\lambda_0 & -\cos\phi_0\sin\lambda_0 & \sin\phi_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-x_1^0\\x_2-x_2^0\\x_3-x_3^0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1^0\\y_2^0\\y_3^0\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\lambda_0 & -\cos\lambda_0\sin\phi_0 & \cos\phi_0\cos\lambda_0\\ \cos\lambda_0 & \sin\phi_0\sin\lambda_0 & -\cos\phi_0\sin\lambda_0\\ 0 & \cos\phi_0 & \sin\phi_0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1-y_1^0 \\ y_2-y_2^0 \\ y_3-y_3^0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ϕ_0, λ_0=接面座標原點의 測地緯度經度

x_i^0=原點의 地心座標

y_i^0=原點의 接面座標

2.1.3 地心座標에서 大地座標로의 變換

經度 λ는 地心座標 x_1과 x_2의 크기에 따라서 式(12), (13)에 의하여 구한다.

$$\lambda=\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (x_2<x_1 \text{의 경우}) \quad (12)$$

$$\lambda=90^\circ-\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad (x_2>x_1 \text{의 경우}) \quad (13)$$

緯度 ϕ는 먼저 $t_1=X_3e^2$이라 하고 이 t값에 의해

$$\phi=\arctan\left(\frac{x_3+t}{\omega}\right) \quad (14)$$

이 되고 이 ϕ값을 이용하여 t를 式(15)에 의하여 구하면

$$t=\frac{ae^2\sin\phi}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}} \quad (15)$$

이며 이 값을 式(14)에 代入하여 ϕ의 요구되는 正確度까지 반복 계산한다.

이 ϕ값과 t값을 이용하여 $(N+h)$값을 式(16)에 의하여 구하고 楕圓體 座標(ϕ, λ, $(N+h)$)를 얻는다.

$$(N+h)=\sqrt{\omega^2+(x_3+t)^2} \quad (16)$$

여기서, $h=(N+h)-N$

$$=(N+h)-\frac{t}{e^2\sin\phi} \quad (17)$$

이므로 大地座標(ϕ, λ, h)를 구할 수 있다.

2.2 交會法의 基本理論

2.2.1 後方交會法(Resection)

(1) 接面座標에서의 後方交會法(Resection I)

n개($n\geq3$)의 P_j점의 大地座標를 알고 있고 未知點 P_0에서 P_1으로부터 각각의 P_j점까지의 $(n-1)$개의 수평각 β_{1j}와 P_0에서 P_j점의 垂直角 α_j를 觀測하면 未知點 P_0의 大地座標를 구할 수 있다[12,13](그림 2-2).

各各의 旣知點의 大地座標를 座標變換式에 의해 接面座標로 變換하고 原點은 임의의 개략적인 P_0를 이용한다.

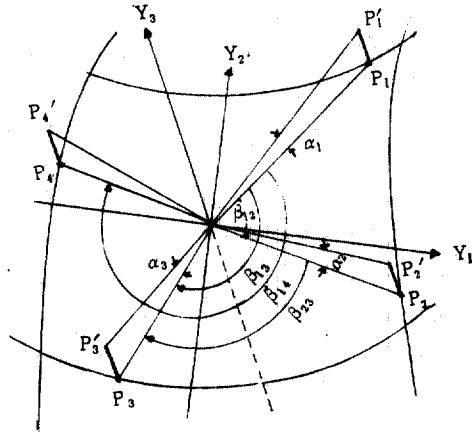

그림 2-2. 후방교회법 I의 기하학적 관계

接面座標에서 P_0로부터 P_j까지의 벡터 V_j를 成分으로 나타내면,

$$V_j=(y_i^j-y_i^0)e_i;\ i=1,2,3;\ i=1,2,\ \cdots,\ n \quad (18)$$

여기서, e_i는 單位벡터이다.

y_1, y_2 평면상의 V_j의 투영길이(length of the projection)는

$$V_j'=|V_j|\cos\alpha_j \quad (19)$$

이며, 接面座標成分의 형태로 나타내면

$$V_j'=(y_k^j-y_k^0)e_k;\ k=1,2 \quad (20)$$

各各 벡터 $V_j'(j=2,3\ \cdots,\ n)$에 대한 벡터 V_1'의 벡터곱과 벡터 V_3'와 벡터 V_2'의 벡터곱을 미지좌표 y_1^0, y_2^0와 벡터 V_j의 미지길이 $|V_j|$의 형태로 쓰면

$$y_1^0[k_{(j)}(y_2^0-y_2^{(j)})+y_1^1+y_1^j]+y_2^0[k_{(j)}(y_1^{(j)}-y_1^1)+y_2^1+y_2^j]+y_3^0[y_3^1+y_3^j]$$
$$=-k_{(j)}(y_1^1y_2^{(j)}-y_1^{(j)}y_2^1)+y_i^0y_i^0+y_i'y_i^j;\quad j=2,3,\ \cdots,\ n \quad (21)$$

그리고

$$y_1^0[k_1(y_2^0-y_2^3)+y_1^2+y_1^3]+y_2^0[k_1(y_1^3-y_1^2)+y_2^2+y_2^3]+y_3^0[y_3^2+y_3^3]$$
$$=-k_1(y_1^2y_2^3-y_1^3y_2^2)+y_i^0y_i^0+y_i^2y_i^3 \quad (22)$$

식(21), (22)에서 式(21)의 $j=2$일 때의 式을 빼면 2차항 y_i^0 y_i^0가 소거되어 $(n-1)$개의 선형식이 된다.

$$a_{ji}\ y_i^0=a_{j4};\ i=1,2,3;\ j=1,3,4,\ \cdots,\ n \quad (23)$$

여기서 계수 a_{ji}와 상수 k는

$$a_{11}=k_1(y_2^2-y_2^3)k_2(y_2^1-y_2^2)+y_1^3-y_1^1$$
$$a_{12}=k_1(y_1^3-y_1^2)-k_2(y_1^2-y_1^1)+y_2^3-y_2^1$$
$$a_{13}=y_3^3-y_3^1$$
$$a_{14}=k_1(y_1^3y_2^2-y_1^2y_2^3)+k_2(y_1^1y_2^2-y_1^2y_2^1)+y_i^2y_i^3-y_i^1y_i^2$$
$$a_{j1}=k_{(j)}(y_2^1-y_2^{(j)})-k_2(y_2^1-y_2^2)+y_1^j-y_1^2$$
no summation over (j)
$$a_{j2}=k_{(j)}(y_2^{(j)}-y_1^1)-k_2(y_1^2-y_1^1)+y_2^j-y_2^2$$
$$a_{j3}=y_3^j-y_3^2$$
$$a_{j4}=k_{(j)}(y_2^1y_1^{(j)}-y_1^1y_2^{(j)})+k_2(y_1^1y_2^2-y_1^2y_2^1)+y_i^1y_i^j-y_i^1y_i^2;$$
$$i=1,2,3;\ j=3,4,\cdots,n$$

여기서 $k_1=\dfrac{\cos\beta_{23}+\tan\alpha_2\cdot\tan\alpha_3}{\sin\beta_{23}}$

$$k_j=\frac{\cos\beta_{1j}+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_j}{\sin\beta_{ij}};\ j=2,3,\cdots,n$$

행렬로 나타내면

$$\begin{bmatrix}a_{j1}a_{j1} & a_{j1}a_{j2} & a_{j1}a_{j3}\\ a_{j2}a_{j1} & a_{j2}a_{j2} & a_{j2}a_{j3}\\ a_{j3}a_{j1} & a_{j3}a_{j2} & a_{j3}a_{j3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1^0\\ y_2^0\\ y_3^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{j1}a_{j4}\\ a_{j2}a_{j4}\\ a_{j3}a_{j4}\end{bmatrix}$$
$$;\ j=1,3\cdots,n$$

여기서 y_i^0가 구해지는데 接面座標 原點의 위치가 가정되었으므로 요구되는 정확도까지 계속 반복계산하여 최종 $y^0{}_i$를 구하여 다시 變換式을 통하여 P_0점의 대지좌표를 얻는다.

(2) 地心座標에서의 後方交會法(Resection Ⅱ)

P_0점의 개략적인 大地座標를 알고, $(n-1)$개의 水平角(P_0點에서 P_1으로부터 P_j까지) β_{1j}와 n개의 各點에 대한 P_0점에서의 垂直角 α_j를 觀測하면 未知點 P_0의 大地座標는 아래와 같이 계산할 수 있다[12,13].

우선 P_0點과 P_j點들의 大地座標로 變換시키고 P_0點과 P_j點과의 벡터 V_j는

$$V_j=(x_i^j-x_i^0)e_i;\ i=1,2,3;\ j=1,2,\cdots,n \tag{24}$$

여기서 e_i는 지심좌표 x_i의 양의 方向의 單位벡터이며 벡터 V_1과 벡터 $V_j(j=2,3,\cdots,n)$의 스칼라곱과 벡터 V_2와 벡터 V_3의 스칼라곱에서

$$x_i^0(x_i^1+x_i^j)-x_i^0x_i^0-x_i^1x_i^j+|V_1||V_j|\cos\epsilon_{1j}=0 \tag{25}$$
$$j=2,3,\cdots,n$$

그리고

$$x_i^0(x_i^2+x_i^3)-x_i^0x_i^0-x_i^2x_i^3+|V_2||V_3|\cos\epsilon_{23}=0 \tag{26}$$

式(25), (26)에서 $(x_i^0+\Delta x_i^0)$의 범위에서 연속도함수를 가진다면 테일러 급수전개에 의해 선형근사값을 가진다.

$F_j(x_i^0)$를 도함수 $dF_j(x_i^0)$와 $d^2F_j(x_i^0)$로 나타낼 수 있으며 근사값 x_i^0가 주어지면 $F_j(x_i^0)$ 함수는

$$F_j(x_i^0+\Delta x_i^0)=F_j(x_i^0)+dF_j(x_i^0)+d^2F_j(x_i^0)+\cdots \tag{27}$$

이 된다. Δx_i^0가 미소값이므로 두번째항 이상은 무시한다.

그러므로 $F_j(x_i^0)+dF_j(x_i^0)\approx0$ (28)

여기서 $dF_j(x_i^0)=\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i^0}\Delta x_i^0$

이며, $a_{1i}=\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i^0};\ i=1,2,3$

$$a_{14}=-F_1$$
$$a_{ji}=\frac{\partial F_i}{\partial x_i^0};\ i=1,2,3;\ j=2,3,4\cdots,n$$
$$a_{j4}=-F_j$$

이다. (28)式은,

$$a_{ji}\Delta x_i^0=a_{j4};\ i=1,2,3;\ j=1,2,\cdots,n \tag{29}$$

이며 만일 $n>3$이면 미지수보다 方程式수가 많으므로 最小제곱법에 의하여 n개의 (29)式을 3개의 正規方程式으로 감소시킬 수 있다.

여기서 Δx_i^0를 구한 값이 허용값내에 있을 때까지 $x_i^{0\prime}=x_i^0+\Delta x_i^0$로서 반복계산하여 얻은 x_i값을 變換式을 통하여 未知點 P_0의 大地座標를 얻는다.

2.2.2 前方交會法(Intersection)

만일 未知點 P_0가 大地座標를 알고 있는 n개의 點 P_j에서 관측가능하고, P_j로부터 P_0의 n개의 方位角 δ_i와 n개의 垂直角을 觀測하면 P_0의 大地座標는 다음과 같은 方程式에 의해 계산된다[12,14](그림 2-3).

接面座標上에서 點 P_j에서 P_0까지의 직선 P_jP_0의 單位벡터 V_j의 成分 V_i^j는 식(30), (31), (32)가 된다.

$$V_1^j=\cos\alpha_j\sin\delta_i \tag{30}$$
$$V_2^j=\cos\alpha_j\cos\delta_i \tag{31}$$
$$V_3^j=\sin\alpha_j \tag{32}$$

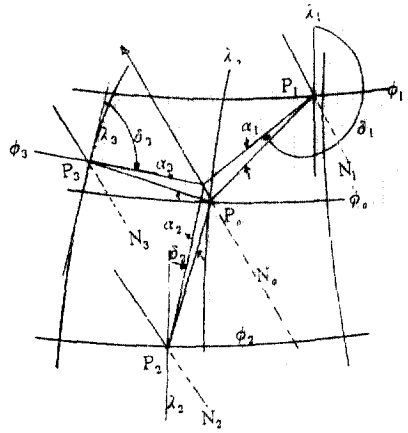

그림 2-3. 전방교회법의 기하학적 관계

또한 V^j의 성분은 接面座標에서 大地座標로의 變換式에 의해 大地座標 項으로 나타낼 수 있다.

$$V_1{}^j=\cos\alpha_j(\sin\delta_j\sin\lambda_j-\cos\delta_j\cos\lambda_j\sin\phi_j)+\sin\alpha_j\cos\lambda_j\cos\phi_j \quad (33)$$

$$V_2{}^j=\cos\alpha_j(\sin\delta_j\cos\lambda_j+\cos\delta_j\sin\lambda_j\sin\phi_j)-\sin\alpha_j\sin\lambda_j\cos\phi_j \quad (34)$$

$$V_3{}^j=\cos\alpha_j\cos\delta_j\cos\phi_j+\sin\alpha_j\sin\phi_j \quad (35)$$

P_0點의 未知地心座標 $x_1{}^0$와 P_j點의 旣知地心座標 $x_i{}^j$와의 벡터성분의 관계에서

$$a_{(j)i}\,D_{(j)}+x_i{}^j=x_i{}^j;\ i=1,2,3;\ j=1,2,\cdots,n \quad (36)$$

이것을 行列로 나타내면 식(37)이 된다.

$$RX=S \quad (37)$$

$$R=\begin{bmatrix} P_j\delta_j{}^j-a_{j1}a_{j1}P_j & -a_{j1}a_{j2}P_j & -a_{j1}a_{j3}P_j \\ -a_{j1}a_{j2}P_j & P_j\delta_j{}^j-a_{j2}a_{j2}P_j & -a_{j2}a_{j3}P_j \\ -a_{j1}a_{j3}P_j & -a_{j2}a_{j3}P_j & P_j\delta_j{}^j-a_{j3}a_{j3}P_j \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1{}^0 \\ x_2{}^0 \\ x_3{}^0 \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} x_1{}^j\delta_j{}^j-a_{j1}t_j \\ x_2{}^j\delta_j{}^j-a_{j2}t_j \\ x_3{}^j\delta_j{}^j-a_{j3}t_j \end{bmatrix}$$

$t_j=a_{(j)}kx^{(j)}kP_j$; no summation over(j);
$k=1,2,3$

$P_j\delta_j{}^j=\sum_{j=1}^{n}P_j$; $\delta_j{}^j$=kronecker delta

$$x_k{}^j\delta_j{}^j=\sum_{j=1}^{n}x_k{}^j$$

식(37)에서 P_0點의 地心座標를 얻어 다시 座標變換式을 통하여 大地座標를 얻는다.

2.2.3 Multilateration

未知點 P_0의 개략적인 大地座標와 n개의 未知點 P_j의 大地座標를 알고 있고 未知點(P_0)와 旣知點(P_j)間의 斜距離(slope distance) D_j를 觀測하면 P_0의 大地座標는 다음 方法에 의해 계산된다[7,10](그림 2-4).

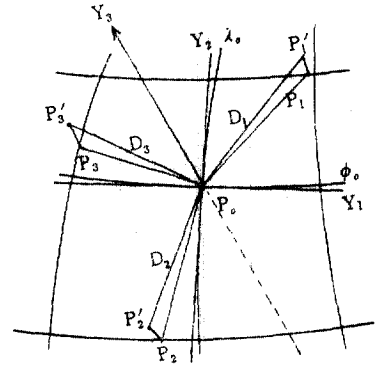

그림 2-4. Multilateration의 기하학적 관계

各 大地座標는 座標變換式에 의해 地心座標를 얻고 斜距離 D_j와 P_0와 P_j의 座標 $x_i{}^0$와 $x_i{}^j$의 관계에서 다음과 같은 비선형 方程式이 成立한다.

$$F_j=[x_i{}^{(j)}-x_i{}^0)(x_i{}^{(j)}-x_i{}^0)^{1/2}-D_j=0;\quad i=1,2,3;\ j=1,2,3,\cdots,n; \quad (38)$$

no summation over(j)

이 式은 $x_i{}^0+\Delta x_i{}^0$의 범위에서 연속도함수를 가진다면 $F_j(x_i{}^0)$를 도함수 $dF_j(x_i{}^0)$와 $d^2F_j(x_i{}^0)$로 나타낼 수 있으며 근사값 $x_i{}^0$가 주어지면 $F_j(x_i{}^0)$함수는

$$F_j(x_i{}^0+\Delta x_i{}^0)=F_j(x_i{}^0)+dF_j(x_i{}^0)+d^2F_j(x_i{}^0)+\cdots \quad (39)$$

이 되며 $\Delta x_i{}^0$가 미소값이므로 두번째항 이상은 무시한다.

그러므로 식(39)는

$$F_j(x_i{}^0)+dF_j(x_i{}^0)\approx 0 \quad (40)$$

$$a_{ji}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i^0}$$

$$a_{j4}=-F_j=D_j-[(x_i^{(j)}-x_k^0)(x_k^{(j)}-x_k^0)]^{1/2}$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

즉 $a_{ji}\Delta x_i^0=a_{j4}$ 이다.

여기서 Δx_i^0 를 처음 가정한 근사大地座標 $x_i^{0'}$ 를 구하여 다시 逆座標變換式에 의하여 大地座標를 구한다.

$$x_i^{0'}=x_i^0+\Delta x_i^0;\ k=1,2,3 \qquad (41)$$

3. 觀測값 및 結果값 比較分析

3.1 觀測값

觀測값은 國立地理院의 3角 및 水準測量 成果表上에서 경기도 廣州를 中心으로 한 경인지방의 1等 및 2等 3角點을 기준으로 선택한 大地座標를 이용하였다.

本 論文에서 이용한 旣知點은 未知點에서 觀測할 수 있는 旣知點의 수가 한계성을 가지므로 최소 3點에서 6點까지를 변화시켜 분석하였다.

3.1.1 후방교회법 I의 경우

各 旣知點의 大地座標와 未知點 P_0 에서 旣知點으로의 接平面에서의 水平 및 垂直角은 표 3-1과 같다.

3.1.2 후방교회법 II의 경우

各 旣知點의 大地座標는 표 3-1과 같고, 수평각과 수직각은 地球曲率을 고려하여 계산한 값을 표 3-2에 나타내었다.

3.1.3 전방교회법의 경우

전방교회법은 各 旣知點에서 未知點으로의 방위각 및 수직각과 各 旣知點의 大地座標를 알아야 한다.

각 기지점의 대지좌표는 표 3-1과 같고 방위각 및 수직각은 표 3-3과 같다.

3.1.4 Multilateration의 경우

표 3-4와 같다.

3.1.5 旣知點의 배치도

各 旣知點의 平面上의 배치도는 그림 3-1과 같다.

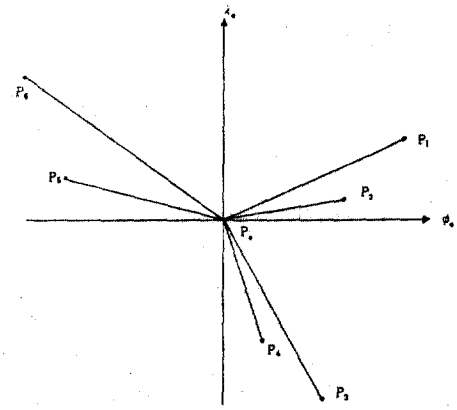

그림 3-1. 旣知點 配置圖

표 3-1. 후방교회법 I의 觀測값

삼각점명	기지점	위도	경도	높이	수평각	수직각
太火山	P_1	37°17′18.525″	127°17′35.676″	641.64m	0	1°15′37.39″
負兒山	P_2	37°13′27.946″	127°09′33.141″	403.59	13°58′38.32″	1°52′14.84″
高城山	P_3	37°02′44.234″	127°10′26.416″	298.12	85°01′16.06″	0°23′07.93″
舞峰	P_4	37°06′47.292″	127°05′54.886″	208.77	97°34′23. 2″	0°22′40.35″
增惡山	P_5	37°15′14.476″	126°56′ 7.801″	231.99	224°02′24.26″	0°27′03.75″
修理山	P_6	37°21′21.485″	126°54′16.679″	474.81	250°36′52. 0″	0°51′04.72″

표 3-2. 후방교회법 II의 觀測값

기지점	위도	경도	높이	수평각	수직각
P_1	37°17′18.525″	127°17′35.676″	641.64m	0	1°17′17.55″
P_2	37°13′27.946″	127°09′33.141″	403.59	13°58′39.2″	1°52′53.05″
P_3	37°02′44.234″	127°10′26.416″	298.12	85°01′15.5″	0°38′36.86″
P_4	37°06′47.292″	127°05′54.886″	208.77	97°34′22.8″	0°36′28.56″
P_5	37°15′14.476″	126°56′07.801″	231.99	224°02′23.5″	0°26′20.33″
P_6	37°21′21.485″	126°54′16.679″	474.81	250°36′51.8″	0°48′35.18″

표 3-3. 전방교회법의 觀測값

기지점	방 위 각	수 직 각
P_1	247°29′07.04″	1°24′04.61″
P_2	261°27′45.36″	1°56′08.85″
P_3	332°30′23.10″	0°33′42.20″
P_4	345°03′30.24″	0°31′07.60″
P_5	111.31′31.30″	0°34′27.31″
P_6	138°05′59.08″	1°05′04.02″

표 3-4. Multililateration의 觀測값

기지점	위 도	경 도	높이	사 거 리
			m	m
P_1	37°17′18.525″	127°17′35.676″	641.64	21,890.75
P_2	37°13′27.946″	127°09′33.141″	403.59	8,436.66
P_3	37°02′44.234″	127°10′26.416″	298.12	20,957.08
P_4	37°06′47.292″	127°05′54.886″	208.77	11,491.05
P_5	37°15′14.476″	126°56′07.801″	231.99	12,372.31
P_6	37°21′21.485″	126°54′16.679″	474.81	21,307.78

3.2 結果값 處理 및 分析

既知點을 最小 3點에서 1點씩 임의로 추가하여 各 方法에 의해 얻은 結果값을 成果表上에 나타난 값과 比較하여 얻은 誤差를 各 方法에 따라 나타내고 方法들을 서로 比較한 결과는 다음과 같다.

또한 本 論文에서 이용한 既知點數는 最小 3點에서 6點까지를 分析하였으며 各 方法에 의하여 구하려는 未知點의 成果는 표 3-5와 같다.

표 3-5. 未知點의 成果表上의 成果

삼각점명	위 도	경 도	높 이
東 鶴 山	37°12′47.473″	127°3′54.872″	122.60m

3.2.1 후방교회법 I의 結果값

후방교회법 I에 의한 既知點數에 따른 오차는 표 3-6과 같다.

표 3-6. 후방교회법 I 결과값(오차단위 : ϕ, λ(radian))

기지점수	기 지 점		결 과 값	오 차
3	P_1, P_2, P_3	ϕ	37°12′47.434″	18.90×10^{-8}
		λ	127°03′54.899″	13.09×10^{-8}
		h	122.741 m	0.141 m
4	$P_1, P_2, P_3,$ P_4	ϕ	37°12′47.461″	5.82×10^{-8}
		λ	127°03′54.885″	6.30×10^{-8}
		h	122.664 m	0.064 m
5	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5	ϕ	37°12′47.470″	1.45×10^{-8}
		λ	127°03′54.876″	1.94×10^{-8}
		h	122.637 m	0.037 m
6	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5, P_6	ϕ	37°12′47.471″	0.97×10^{-8}
		λ	127°03′54.875″	1.45×10^{-8}
		h	122.632 m	0.032 m

3.2.2 후방교회법 II의 結果값

地心座標에서의 후방교회법 II의 結果값은 다음 표 3-7과 같다.

표 3-7. 후방교회법 II의 결과값(오차단위:ϕ, λ(radian))

기지점수	기 지 점		결 과 값	오 차
3	P_1, P_2, P_3	ϕ	37°12′47.450″	11.15×10^{-8}
		λ	127°03′54.915″	20.85×10^{-8}
		h	122.757 m	0.157 m
4	$P_1, P_2, P_3,$ P_4	ϕ	37°12′47.459″	6.79×10^{-8}
		λ	127°03′54.893″	10.18×10^{-8}
		h	122.698 m	0.098 m
5	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5	ϕ	37°12′47.468″	2.42×10^{-8}
		λ	127°03,54.876″	1.94×10^{-8}
		h	122.651 m	0.051 m
6	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5, P_6	ϕ	37°12′47.471″	0.97×10^{-8}
		λ	127°03′54.875″	1.45×10^{-8}
		h	122.633 m	0.033 m

3.2.3 전방교회법의 結果값

前方交會法의 結果값은 표 3-8과 같다.

표 3-8. 전방교회법의 結果값(오차단위 : ϕ, λ(ration))

기지점수	기 지 점		결 과 값	오 차
3	P_1, P_2, P_3	ϕ	37°12′47.439″	16.48×10^{-8}
		λ	127°03′54.896″	11.64×10^{-8}
		h	122.748 m	0.148 m
4	$P_1, P_2, P_3,$ P_4	ϕ	37°12′47.452″	10.18×10^{-8}
		λ	127°03′54.889″	8.24×10^{-8}
		h	122.708 m	0.108 m
5	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5	ϕ	37°12′47.470″	1.45×10^{-8}
		λ	127°03′54.876″	1.94×10^{-8}
		h	122.637 m	0.037 m

6	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5, P_6	ϕ	37°12′47.471″	0.97×10^{-8}
		λ	127°03′54.874″	0.97×10^{-8}
		h	122.632 m	0.032 m

3.2.4 Multilateration에 의한 結果값

Multilateration에 의한 결과값은 표 3-9와 같다.

표 3-9. Multililateration의 결과값
(오차단위 : ϕ, λ(radian))

기지점수	기 지 점		결 과 값	오 차
3	P_1, P_2, P_3	ϕ	37°12′47.468″	2.42×10^{-8}
		λ	127°03′54.877″	2.42×10^{-8}
		h	122.648 m	0.048 m
4	$P_1, P_2, P_3,$ P_4	ϕ	37°12′47.469″	1.94×10^{-8}
		λ	127°03′54.877″	2.42×10^{-8}
		h	122.642 m	0.042 m
5	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5	ϕ	37°12′47.471″	0.97×10^{-8}
		λ	127°03′54.875″	1.45×10^{-8}
		h	122.633 m	0.033 m
6	$P_1, P_2, P_3,$ P_4, P_5, P_6	ϕ	37°12′47.472″	0.48×10^{-8}
		λ	127°03′54.874″	0.97×10^{-8}
		h	122.630 m	0.030 m

위의 표 3-6, 표 3-7, 표 3-8, 표 3-9에서 나타낸 결과값 오차와 같이 斜距離만의 影響을 받는 Multilateration 方法이 緯度, 經度, 높이에서 各各 水平 및 垂直角에 影響을 받는 다른 方法에 比하여 最小既知點 3點에 의해서도 수렴할 뿐만 아니라 正確度 면에서도 6點의 경우 위도오차 0.48×10^{-8} radian, 경도오차 0.97×10^{-8} radian 및 높이오차 0.030 m로 다른 方法에 比하여 비교적 正確하므로 未知點의 3次元 大地座標 決定에 있어서 Multilateration에 의한 方法이 效用性이 높다고 할 수 있다.

3.2.5 比較分析

후방교회법 Ⅰ, Ⅱ, 전방교회법 및 Multilateration에 結果값 표 3-6, 표 3-7, 표 3-8, 표 3-9를 緯度, 經度, 높이別로 比較하면 다음 그림 3-2, 그림 3-3, 그림 3-4와 같다.

그림 3-2, 그림 3-3, 그림 3-4에서 알 수 있듯이 經緯度 오차는 모두 既知點이 5點이상일 때 우리 나라 1等3角點 平面座標의 相對誤差範圍인 ±5 cm 정도(8.24×10^{-8} radian)內에 있고, 또한 한점을 추가시킨 6點일 때도 큰 변화가 발생치 않고 수렴되어 감을 알 수 있다.

그리고 경위도의 오차분포를 나타낸 그림 3-2, 그림 3-3에서 경위도는 最小 既知 3點에서 Multilateration은 허용값내에 들게 되며 1點을 추가시킬 경우 다른 方法보다 후방교회법 Ⅰ이 가장 正確度가 향상되며 既知點을 2點 추가시킬

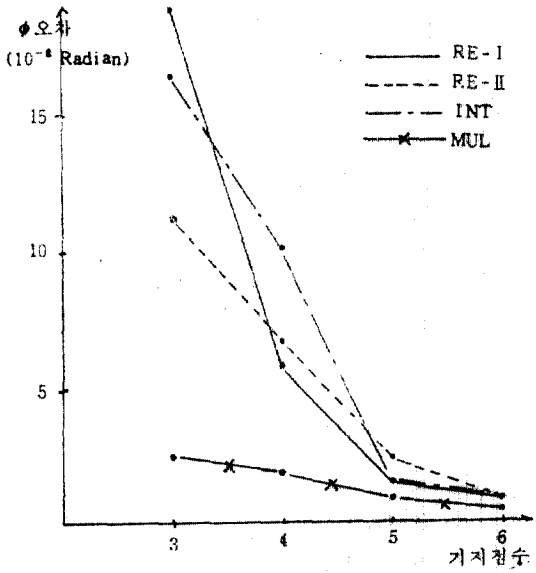

그림 3-2. 各 方法의 緯度誤差比較

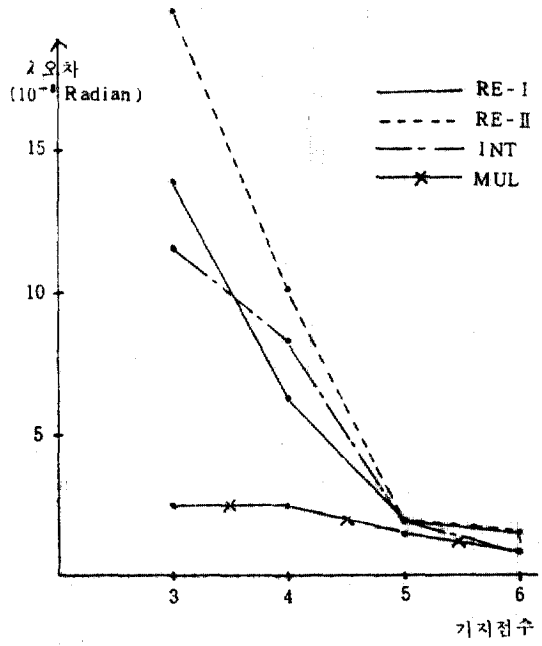

그림 3-3. 各方法의 經度誤差比較

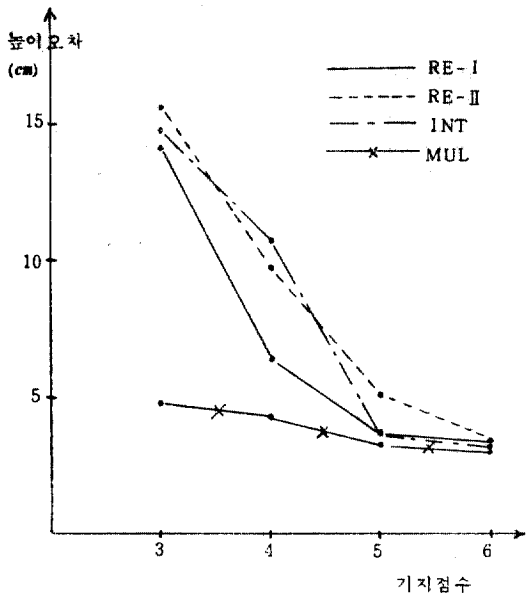

그림 3-4. 各 方法의 높이誤差比較

경우(5點)에는 다른 方法도 모두 허용값 내에 들게 된다.

이 때의 Multilateration 결과값은 各 方法의 가장 양호한 값보다 수평위치오차는 28%, 수직위치오차는 11%가 양호함을 알 수 있다.

또한 그림 3-4에 나타낸 높이오차는 최소 3點일 경우 후방교회법 I, II와 전방교회법은 15cm 정도이며 Multilateration은 4.8cm이나 旣知點을 4點으로 하는 경우에는 Multilateration 方法은 크게 변화하지 않으나 후방교회법 I은 6.4cm로 현저하게 감소하였으며 旣知點 5點의 경우는 전방교회법을 除外한 다른 方法은 4cm 이하로 거의 동일하게 나타났다.

위의 分析結果 최소 3點인 경우에는 Multilateration 方法이 가장 우수하나 旣知點을 추가할 경우 후방교회법 I도 未知點의 座標決定에 效果的인 方法임을 알 수 있으며, 또한 모든 方法이 旣知點 5點 이상일 때 허용한계값 내에 들게 되어 새로운 3角點 設置나 망실된 點의 복원에 이용할 수 있으며 大地座標 대신 地上座標로 바꾸어 解析的 交會法을 이용하면 地盤의 長期的인 沈下나 施設物의 變形測量에 유용할 것이라 사료된다.

4. 結 論

3次元 大地座標 決定에 있어서 旣知點數를 變化시킴에 따른 各解析的 交會法의 결과값을 比較分析한 結果, 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 기지점수를 최소 3點에서 한 點씩 추가시켜 얻은 결과, 5點일 때 허용한계값에 부합하였다.

2. 3次元 位置決定方法中 Multilateration 方法이 전방교회법과 후방교회법에 比하여 수평위치오차 28%, 수직위치오차 11% 正確度가 높았다.

3. 解析的 交會法은 3角點 設置 및 복원에 유용하게 이용할 수 있음을 알 수 있으며 또한 Multilateration 方法은 地盤의 장기적 沈下나 施設物 變形測量에도 活用할 수 있다고 思料된다.

參 考 文 獻

1. Schermerhorn, W., "History and Development of Aerial Triangulation", *Bollettino Geodesia Scienze Affin*, 1960, p. 713.
2. Von Gruber, O.,"Beitrag zu Theorie und prayis von Aeropoly-Jonierung und Aeronivellement", *Bildmessung und Luftbilwesen*, 1935, Nr. 3 und 4.
3. Allman, J.S., Notes on Resection Computation, Australian Surv., 278, March, 1963, pp. 78~83.
4. Richardus, P., The precision of on intersection, *Tidschrift voor kadaster en Landmeetkunde*, 4, Aug, 1963, pp. 211~219.
5. William, E. Ball, "Geographic position determined by intersection", *S.M. Division of Jr. ASCE*, September 1968, pp. 189~202.
6. Molodenskiy, M.M., "Geodetic Equation in a Three Dimensional Topocentric Coordinate system", *Geodesy, Mapping and photogrammetry*, Vol. 17, No. 3, 1975, pp. 171~175.
7 William, E. Ball, "Three Dimensional Positioning by Multilateration", *S.M. Division of ASCE*,

May 1974, pp. 63～78.
8. Sanjib, K. Ghosh, *Analytical photogrammetry*, Pergamon Press Offices, 1979, pp. 39～60.
9. 坪川家恒, 測地學序說, 山海堂, 1968, pp. 13～28.
10. 森澤武司郎, 3次元測量, 基礎と應用, 東海大學出版社, 1980, pp. 3～21.
11. 柳福模, 測量學原論, 開文社, 1985, pp. 158～163.
12. H. Schmid, *National Geodetic survey*. National geodetic Satellite program, National Areonautics and space Adminition, 1977, pp. 562～570.
13) William, E. Ball, "Three-dimensional Resection", A vector approach, *S.M. Division of Jr. ASCE*, September 1973, pp. 87～105.
14) William, E. Ball, "Three-dimensional Intersection", A vector approach, *S.M. Division of Jr. ASCE*, September 1973, pp. 63～78.

(接受 : 1986. 1. 9)