

## 合理性的 追求와 數學教育

韓國教育開發院 姜 玩

### I. 開放的 社會와 數學教育

된 思想이나 知識의 形成, 發達도 그것이 形成 發達해 가는 社會와 밀접한 關係를 갖는 근원적으로는, Feuerbach의 말에서 알 수 바와 같이, 人間의 肉體的 誕生과 마찬가지로 人間의 精神的 誕生도 두 사람의 存在, 즉 社會의 背景을 필수요건으로 하는 것이다.

學도 물론 人間의 精神的 活動의 產物이며, 思想이나 知識과 마찬가지로 그 社會의 背景 影響을 주고받는다 고 보아야 한다. 예컨대, 積分の 개념은 그 접근 방식과 발전 과정 등에서, 독일의 Leibnitz와 영국의 Newton가 각각 始點으로 하여 차이를 보이고 있는데, 그 된 원인에는 당시의 思想的, 文化的 背景에 의한 것도 있다고 할 수 있다. 나아가 독일의 觀念論의 思想이나, 영국의 功利主義 思想과의 차이에서도 볼 수 있는 바와 같이 이러한 思想的, 文化的 差이는 당시의 社會 背景과 떼어서 생각하기 어려운 밀접한 關係로 있다. 그리고, 이러한 식의 견해는 오 소위 知識社會學의 기본 입장이 되기도 하 이다.

실히, 한 社會의 특징은 그 社會의 思想과 의 形成, 發達과 밀접한 關係가 있다. 그러 教育의 觀點에서 보면, 思想이나 知識의 形成 影響을 미치는 社會의 背景에 대한 分析에 없게, 그 社會의 發達에 影響을 미치는 思想 나 知識의 成長 및 普及이라는 觀點도 함께 하지 않으면 안 된다.

히, 數學的 知識 또는 數學教育은 오늘날 的과 機能이 技術文明 社會의 發展과 關係

되어 論議되곤 한다. 사실, 오늘날의 社會는 급 속한 科學技術의 發達로 인해 數學的 知識의 活用이나 普及의 擴大에 대한 필요성이 과거 그 어느 때보다도 더 절실히 요구되고 있다. 그러나, 이러한 측면만을 다루는 논의는 자칫 數學的 知識 또는 數學的 思考가 오로지 物質文明의 發達에만 寄與하는 것이고, 그 物質文明의 根底를 이루는 精神文化와는 무관한 것으로 받아들 여질 여지를 갖고 있는 것이다.

그렇다면, 數學的 知識 및 그의 教育은 人間의 精神的·社會의 生活과 어떻게 관련지어 생각해 볼 수 있을 것인가? 오늘날의 社會는 物質文明의 繁榮으로만 특징지어지는 것은 아니다. 우리들이 각자 살고 있는 여러 社會들은 地域마다 서로 다른 制度的 특징에도 불구하고, 대부분의 社會가 開放的 自由民主主義 社會에 속한다고 볼 수 있으며, 적어도 그러한 理念을 표방하고 있는 社會라는 점은 부인할 수가 없다.

이러한 社會에서 살아가는 社會的 動物로서의 人間의 活動은, 그것이 指向하는 價値가 이 社會에서 이루어지는 教育 目的의 內容과 관련지어 볼 때, 合理性的 追求라는 측면과 직결된다고 규정할 수 있다. 사실, 오늘날의 開放的 民主主義 社會에 있어서 合理性的 概念은 開放民主主義 社會를 成立시키는 方法的 原理가 되는 동시에, 教育받은 人間의 觀點과 態度를 포괄적으로 설명해 주는 教育 價値로서 주장되기도 하는 것이다.

특히, 오늘날의 數學教育에 있어서는 1983년 NIER의 한 報告書<sup>1)</sup>가 밝히고 있듯이, 대부분의 國家에 공통된 數學教育의 目標가 그 社會의 本質 및 그 社會의 구성원으로서 갖추어야 할 준비적인 個人的 資質과 關係하여 數學的 思考力

또는 論理的 思考力의 涵養으로 集約되는 바, 이는 결국 合理性의 追求라는 社會的 價値理念에 포함되는 것으로 생각할 수 있다.

그리하여, 예컨대 合理的 信念이나 合理的 態度, 合理的 行爲能力, 合理的 思考能力, 그리고 合理的 道德性 등에서와 같이 ‘合理性’은 人間의 다양한 다른 특성과 함께 포괄적으로 관련지어져서 論議되며, 敎育을 통하여 合理的인 人間을 育成함으로써, 合理的인 社會를 이룩하여야 한다는 주장은 극히 일반적인 것으로 그 타당성을 인정받고 있는 것이다.

그러나, ‘合理性’ 또는 ‘合理的’이라는 概念은 ‘理性’ 또는 ‘理性的’이라는 概念과 마찬가지로, 모호한 상태로 사용되는 경우가 많이 있다. 따라서, ‘合理性’은 敎育實際에 있어서 어떤 구체적인 示唆와 指針을 제공할 수 있을 정도로 보다 체계적으로 分析되는 것이 바람직하다. 또한, 이러한 分析과 관련하여 數學敎育이 追求하는 目標의 타당성에 대한 論議도 비로소 이루어 질 수 있는 것이다.

이 글에서는 敎育的 價値概念으로서의 合理性에 대한 喜和泰의 分析<sup>2)</sup>을 정리해 보고, 이를 바탕으로 數學敎育에서 追求되어야 할 合理性의 의미를 검토함으로써, 物質文明과 아울러 그 根底를 이루는 精神文化의 次元에 寄與하는 數學敎育의 價値와 부분적 方法論을 제한된 접근 방식을 통해서나마 論議하여 보고자 한다.

## II. 合理性의 概念的 條件

### (1) 合理的 行爲의 概念的 條件

‘合理性’ 또는 ‘合理的’이라는 말은 다양한 觀點과 意味基準에 따라 사용된다. 그러나, 우리는 日常的인 論議에서 이들의 의미를 일일이 규정하지 않고서도 단어 사용의 맥락에 따라 용이하게 사용하고 있으며, 이는 곧 우리가 이들의 概念을 적절히 적용하는 어떤 일반적 기준을 共有하고 있음을 보여 준다고 하겠다. 이러한 기준들에 대한 概念分析의 方法을 바탕으로 하여, ‘合理性’ 또는 ‘合理的’의 概念이 人間의 行爲에 적용될 때에 갖추어야 할 概念的 條件은 다

음과 같이 分析된다.

먼저, 行爲의 主體는 무엇인가를 성취하려 소원을 갖고 있어야 한다. 그는 자신의 행위 最善의 方法임을 믿고 그에 대한 이유를 갖는<sup>1)</sup> 또한 그 目標의 達成可能性, 手段의 效率性에 대한 行爲主體의 信念은 客觀的으로 그 妥當이 인정되어야 한다. 그리고 그는 이러한 이들로 해서 그러한 行爲를 하게 된다.

行爲의 合理性에 대한 概念的 條件이 이렇 규정되면, 合理性은 곧 問題解決力, 道具的 性能力, 즉 經濟的 人間의 특성을 의미하게 되며, 이 때의 合理的 思考란 곧 效率的이며 節的인 思考方式이나 節次를 의미하게 된다.

물론 이러한 규정은 規範的 의미가 탈색되. 價値概念이 배제되었다는 결함을 갖고 있다. 따라서, 行爲主體의 目標에 대한 價値觀, 手段 正當性 등에 대한 信念 등에 관하여 그 客觀 妥當성이 인정되어야 할 것이라는 점이 첨가되어야 할 것이다.

### (2) 合理的 信念 또는 知識의 概念的 條件

信念의 合理性에 대한 論議는 知識의 合稱에 대한 論議와 관련을 갖는다. 일반적으로 어떤 知識을 표현하는 陳述은 實證的 綜合的 陳述: 論理的 分析의 陳述, 規範的 價値判斷의 陳述 세 가지 형태로 나누어 생각할 수 있다. 대치 實證的 陳述은 自然科學의 知識體系로 발전되. 각 진술에 대한 正當化의 수단은 觀察과 經驗의 歸納으로 특징지어진다고 볼 수 있다. 한편, 論理的 陳述은 數學이나 論理學의 知識體系로 발전하며, 그 正當化의 手段은 論理的 必然性이다. 이에 비하여 規範的 陳述은 哲學, 倫理學 등에 관한 知識體系로 발전하며, 事實의 性과 論理的 必然性을 그 正當化의 手段으로 본다.

그러나, 科學的 知識體系로 典型되는 實證 陳述도 그 普遍妥當性의 判定基準이 自明한 이라고는 말할 수 없다. 이는 Hume이 지적 바, ‘歸納의 方法에 따른 誤謬’로서, 관찰의 과 언어진 命題와 普遍的 法則 命題 사이에 必然的 關係가 없다. 그럼에도 불구하고, 곧

의한 命題가 받아들여지는 것은 聯想의 反復의한 習慣과 期待 때문이라고 볼 수 있는 것이다. 따라서, 科學的 知識體系가 그 妥當性을 받는 것은 暫定的이라고 불리어 마땅할 것이다. 결국, 이렇게 되면 科學的 知識도 推測의 類의 성격울 갖는 信念에 불과한 것이 되는 것이다.

合理的 陳述에 있어서는 그 普遍妥當性의 기 自明한 것으로 받아들여지는 듯하다. 그런 어떠한 演繹的 體系도 결국은 그 基礎가 되 몇 개의 公理로부터 출발하지 않을 수 없다. 그러나, Hume의 비판에 의하면, 論理的 演繹 體系는 이미 그의 公理에 暗示된 陳述에 대 同語反復(tautology)에 불과한 것이 되고 만 그런가 하면, 그 公理系의 設定 可變性은 論理的 命題의 眞僞에 대한 正當化의 基準 관한 論議조차 可變的인 것으로 남겨 놓는다. 그러나, Gödel에 의하면 한 公理系의 無矛盾性 또한 論理學的 原理에 따라 그것을 證明하는 것은 불가능하다. 결국, 어떠한 公理系를 設定 고 選擇하느냐 하는 것은 결국 行爲 主體인 自身의 合理的 信念에 따르게 된다.

見範的 陳述에 있어서도 사정은 마찬가지이다. 範的 陳述은 그 궁극적 眞僞에 대한 判定의 도가 쉽게 드러나지 않는다는 점에서, 그 普 遍妥當性의 基準에 대한 論議는 더더욱 合理的 論에 대한 論議와 관련을 갖게 된다.

결국, 知識은 合理的 信念의 發展된 形態라고 수 있으며, 知識의 教育은 곧 信念의 획득과 此의 過程이라고 보는 견해가 그 妥當性을 인 1하게 되는 것이다.

그러나, 어떠한 陳述도 그 보편타당성을 논외 수 있는 객관적 기준이 확실하지 않다는 것 문제점으로 남는다. 그러나, 이는 바로 이와 은 結論에 도달하게끔 한 어떤 論議 基準이 포함을 의미한다. 즉, 우리는 信念의 合理性 對한 概念的 條件으로서 信念의 妥當性에 대 公的인 論議나 批判的 檢證過程이 허용되고, 論이 開放的으로 堅持되어야 한다는 점을 1차 2하여야 할 것이다.

결론, 이것은 合理的 信念이나 知識이 갖추어

야 할 條件으로서의 根據의 適切性和 妥當性에 포함되는 것으로 볼 수도 있다. 그러나, 合理的 根據를 가진 知識이라도 閉鎖的으로 주장될 수 가 있다는 점에서는 이를 구분하여야 할 것이다. 따라서, 우리는 이것을 信念의 內容의 合理性과 信念의 方法的 合理性으로 나누어 생각할 수 있 을 것이다.

이러한 觀點에서 본다면, 科學的 信念이나 知 識은 그 自體의 普遍妥當性에 의해서라기보다 는 그것이 堅持되는 過程과 方法에 의해 合理性 的 與否가 특징지어지게 되며, 信念의 合理性에 對한 기준은 '信念 그 자체가 옳은가?'의 문제 라기보다는 '그 信念이 어떤 方式과 態度로서 1 믿어지고 주장되는가?'의 문제로서 다루어져야 할 것이다.

### Ⅲ. 人間의 合理性和 數學

信念의 合理性에 대한 概念的 條件의 두 가지 측면은 곧바로 人間의 合理性을 말해 준다. 즉, 그 內容의 合理性의 기준은 人間의 知的 特性和 知的 探究能力의 反映이라는 점에서, 人間의 合理性과 관련된다. 또, 그 方法的 合理性의 기준 은 信念의 主張, 堅持方式과 관련하여 人間의 態度, 즉 知的 特性 자체의 形成過程에 나타난 人間의 合理性和 관련된다.

즉, 人間의 合理性은 妥當하고 適切한 理由나 證據에 입각하여 合理的인 信念을 형성하고, 그러한 信念에 입각하여 自身의 行爲를 계획하고 수행해 나가는 과정에서 발휘되는 人間 特性이 라고 推論할 수 있다.

歴史的으로 보아도, Aristotle 이후로 Darwin 的 進化論의 人間觀이 대두되기 전까지, 合理性 的 개념은 演繹的, 論理的 推論 能力을 뜻하는 것으로 사용되어 왔으며, 合理性이란 人間을 다 른 動物과 구분짓는 人間 固有의 特性이라는 견 1해가 극히 妥當한 것으로 인정되어 왔다.

오늘날에도 이러한 견해가 人間의 言語 使用 能力에 의해서 뒷받침된다.

K. Popper는 言語의 機能的 特性을 ① 表現 的 機能, ② 反應誘發의 機能, ③ 記述의 機能,

④ 論議的 機能의 4 가지로 구분하고, 動物은 ①, ②의 機能까지만 보유하고 있다고 보았다. 따라서, 人間의 知識 追求와 그 形成의 過程은, 人間 言語의 固有한 特性인 記述의 機能과 論議的 機能을 통하여 事實 自體, 또는 어떤 문제에 대한 解決策을 假設的으로 記述하고, 그 記述된 陳述이나 推測의 眞僞를 批判的으로 論議하고 확인해 나가는 過程이다. 그리고, 이러한 過程 속에는 人間의 知的 能力뿐만 아니라, 어떤 形態의 態度가 발휘되고 있음을 알 수 있다.

이러한 態度란, 反證 可能性, 否定 可能性을 찾아내려는 批判的 態度 및 反證, 否定되었을 때에 이를 인정하고 修正하려는 開放的 態度가 수반되어야 함을 의미한다.

數學이 發達해 온 過程을 살펴보면, 거기에는 이러한 人間의 合理的 特性이 잘 드러나고 있음을 알 수 있다.

數學的 論證은 그것을 이해하는 사람이라면 누구에게나 論爭의 여지가 없이 완벽하게 確信될 수 있을 정도로 周到綿密하게 이루어져야 한다. 사실, 數學的 眞理란 論爭의 여지가 완전히 없음을 상징하는 것의 典型으로 알려져 있다. 사람들은 흔히 ‘그것은 둘 더하기 둘은 넷인 것처럼 분명하다’는 식으로 말하곤 하는 것이다.

그러나, 數學에서의 嚴密性이나 確實性은 절대적인 것이 아니다. 그것은 지속적인 發達の 過程 속에 있는 것이다. 數學的 原理란 일시에 모두가 凝結되어진 후에 전해져 온 것이 아니다. 오히려, 數學은 스스로의 삶을 가지고 있으며, 심지어 科學의 論爭을 불러일으키는 主題가 되기도 하는 것이다. I. Lakatos에 의하면, 數學은 의심할 나위없이 확실하게 증명된 定理들이 단조롭게 量的으로 증가하면서 成長하는 것이 아니라, 심사숙고와 批判에 의해서, 證明이나 拒否의 論理에 의해서, 人間이 가진 推測을 설 사이없이 改善해 가는 가운데 成長하는 것이다.<sup>3)</sup> 예컨대, 비유클리드 기하학의 형성은 유클리드의 제 5 공준을 증명하려는 試圖에서 비롯되었던 것이다.

오늘날에도, 어떤 數學者들은 理想을 追求하고, 광범한 영역에 걸친 문제들에 확실하게 적

용될 수 있는 理論과 方法을 開發하려 하고 있다. 그런가 하면, 어떤 數學者들은 數學的 基的인 假設과 論理的 構造를 再點檢한 후에, 보 恒久的이고 일반적인 體系가 될 때까지 그들 명료하게 다듬는 일을 한다. 다른 數學者들 나름대로의 목적에 따라 思考의 흐름에 도전하고 그렇게 함으로써 數學의 思考의 패턴(pattern)과 관계를 發見하고, 基本 原理들을 認識하고 그것을 適用하고, 論理的 經濟性과 優雅함에 한 흥분을 만끽하기도 하는 것이다.

어떻게 보면, 數學은 人間에 의해서 構成되 發展되어 왔으며, 지금도 계속 革新 중에 있는 것이다. 그리고, 이를 뒷받침하는 것은 바로 間的 合理性이다. 동시에, 數學은 그러한 人的 知的 能力和 合理的 態度를 反映하는 가 훌륭한 하나의 예가 되는 것이다. 나아가, 數學은 數學 自體의 이러한 特性에 의해서, 人間 合理的 能力和 態度를 陶冶하는 훌륭한 敎科서 뿌리를 깊게 내리고 있는 것이다.

#### IV. 合理性의 追求와 數學敎育

그러나, 數學敎育은 그 目標에 있어서 合理的 追求와 크게 一致를 보이고 있으면서도, 체적으로 合理性의 追求와 어떠한 관련이 있 지에 대하여는 분명하게 論議되어 있지 않다.

앞의 論議에 의하면, 合理的 行爲로서의 數的 活動의 의미는 거의 분명한 듯하다. 數學 活動은 數學的 問題에 대한 解決을 試圖하는 動이고, 대부분의 성공적인 數學的 問題解決 動은 그 活動에 의한 目標到達可能性, 活動手의 效率性 등에 있어서, 그 客觀的 妥當性이 리 인정되는 것으로 쉽게 받아들여지고 있다. 數學的 思考는 곧바로 合理的 思考이며, 效率 이고 經濟的인 思考方式이라고 서슴지 않고 하는 사람들을 만나는 것은 어렵지 않다.

그러나, 대부분의 학생들은 그러한 數學的 考의 妥當性과 效率性에 대하여 스스로의 信을 갖고 있다고 보기 어렵다. 사실, 그러한 念은 오랜 기간에 걸쳐 다양한 數學的 經驗에 해 형성되는 것이며, 또 그렇게 形成되어야

따라서, 학생들에게 있어서 이러한信念이 되도록 하는 것은 合理性을 追求하는 教育에 當한 教師의 任무이다.

순히, 公式의 變數에 적절한 數値를 代入하는 行爲는 機械的 動作의 水準으로 할 우려가 있다. 스스로의 문제 해결 활동에 참여하여 各 단계마다 數學的 意味를 찾는 행爲, 비록 意識的으로 이루어지는 것이 아니라도, 자신의 數學的 活動의 妥當性과 效率性에 대한 信念의 反映이며, 規範的 評價가 反 映될 수 있는 여지조차 마련해 주게 된다.

이러한 信念의 형성을 위하여 教師는 두 가지 方面에서 접근하게 된다. 하나는 合理的 信念의 一 方面이고, 다른 하나는 合理的 信念의 二 方面이다.

數學的 活動의 妥當性과 效率性에 대한 內容 合理性은, 이미 그 數學的 內容의 嚴密한 展 示에 대한 點檢으로써 보장되어진다. 따라 數學 教師가 數學的 結論을 근거없이 제시 할 수 없는 한, 數學的 活動의 妥當性에 대한 學生의 信念에 그릇된 影響을 끼치지 는 않는다. 그러나, 數學的 活動의 妥當性과 效率性에 대 한 信念의 方法的 合理性에 관하여는 教師의 開 放 態度와 忍耐力가 필요하다. 教師는 數學的 活動에 대한 자신의 信念에 대하여 批判的 檢證 을 허용하여야 하며, 그러한 信念을 開放的 으로 堅持하여야 한다. 따라서, 教師는 자신이 추구하는 數學的 活動에 있어서, 그 效率性, 妥 當性에 대한 자신의 信念이 새로운 經驗이나 思 考에 의해 언제든지 變化發展할 수도 있는 것이 라는 점을 함께 제시할 수 있어야 한다.

실제로 教師의 權威는 자신의 信念에 대한 公 的 論議를 規制하는 데서 나오는 것이 아니라, 學生의 信念에 대해 開放的인 態度를 보임으로 어떠한 挑戰에 의해서도 자신의 信念이 옳 한 것임을 合理的으로 立證하는 데에서 비롯 된다. 教師의 權威는 바로 이러한 忍耐力의 댓가 것이다.

그리고, 이것은 학생으로 하여금 數學的 活動 對 懷疑論의 態度에 빠지게 하는 것들을 의 하지 않는다. 오히려, 學生들은 教師의 信念

이 公開的으로 論議되고 檢討되는 過程을 통하 여 數學的 活動의 合理性에 대한 信念을 스스로 소유하게 됨은 물론 스스로가 자신의 信念을 開 放的으로 堅持하게 될 것이다.

註)

1) NIER, *Mathematics Education in Asia and the Pacific* (Tokyo: NIER, 1983), pp. 5-6.

2) 曹和泰, 教育的 價值 概念으로서의 合理性(서울 大學校 碩士學位 論文, 1942)

3) Imre Lakatos, *Proofs and Refutations* (Cambridge: Cambridge University Press, 1976), p. 5. Lakatos와 Popper는 知識論에 있어서 서로 대립되 는 立場에서 있는 것은 분명하다. 그러나, 그 어느 쪽 이던 그들의 主張은 人間의 合理性을 묘사하고 있는 것이라고 볼 수 있다.

#### 參考文獻

金應泰, 朴漢植, 禹正皓. 《數學教育學概論》. 서울: 서울大學校 出版部, 1984.

曹和泰. 《教育的 價值概念으로서의 合理性》. 서울大學校 碩士學位論文, 1982.

모리스 클라인 (Morris Kline) (著), 朴世熙 (譯). 《수학의 확실성》(*Mathematics; the Loss of Certainty*). 서울: 민음사, 1984.

베르너 슈타르크 (著), 林榮一 (譯). 《知識社會學》(*The Sociology of Knowledge*). 서울: 한길사, 1983.

Freudenthal, Hans. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Holland; D. Reidel, 1973.

Kuhn, Thomas S. *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press, 1962, 1970.

Lakatos, Imre, and Musgrave, Alan (eds). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970, 1979.

Popper, Karl R. *The Logic of Scientific Discovery*. New York: Science Editions, Inc., 1961.

Rombery, Thomas A. "A Common Curriculum for Mathematics" in *Individual Differences and the Common Curriculum: 82nd Year book of the NSSE*, eds. D. Feustermacher and John H. Goodlad. Chi-

cago: University of Chicago Press, 1983.  
Zahar, Elie. "Logic of Discovery of Psychology of Invention?" *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 34, no. 3 (September, 1983): pp. 243—61.

## ABSTRACT

### The Pursuit of Rationality and the Mathematics Education

Wan Kang

*Korean Educational Development Institute (KEDI), Korea*

For any thought and knowledge, its growth and development has close relation with the society where it is developed and grow. As Feuerbach says, the birth of spirit needs the existence of two human beings, i. e. the social background, as well as the birth of body does. But, at the educational viewpoint, the spread and the growth of such a thought or knowledge that influence favorably the development of a society must be also considered.

We would discuss the goal and the function of mathematics education in relation with the prosperity of a technological civilization. But, the goal and the function are not unrelated with the spiritual culture which is basis of the technological civilization.

Most societies of today can be called open democratic societies or societies which are at least standing such. The concept of rationality in such societies is a methodological principle which completes the democratic society. At the same time, it is asserted as an educational value concept which explains comprehensively the standpoint and the attitude of one who educated in such a society. Especially, we can consider the cultivation of a mathematical thinking or a logical thinking in the goal of mathematics education as a concept which included in such an educational value concept.

The use of the concept of rationality depends on various viewpoints and criterions. We can analyze the concept of rationality at two aspects, one is the aspect of human behavior and the other is that of human belief or knowledge.

Generally speaking, the rationality in human behavior means a problem solving power or reasoning power as an instrument, i. e. the human economical cast of mind. But, the conceptual condition like this cannot include value concept.

On the other hand, the rationality in human knowledge is related with the problem of rationality in human belief. For any statement which represents a certain sort of knowledge its universal validity cannot be assured.

The statements of value judgment which represent the philosophical knowledge cannot be relate to the argument on the rationality in human belief, because their finality do not easily turn out to be true or false. The positive statements in science also relate to the argument on

rationality in human belief, because there are no necessary relations between the proposition which states the all-pervasive rule and the proposition which is induced from the results of observation.

Especially, the logical statement in logic or mathematics resolves itself into a question of the rationality in human belief after all, because all the logical propositions have their logical propriety in a certain deductive system which must start from some axioms, and the selection and construction of an axiomatic system cannot but depend on the belief of a man himself.

Thus, we can conclude that a question of the rationality in knowledge or belief is a question of the rationality both in the content of belief or knowledge and in the process where one holds his own belief. And the rationality of both the content and the process is namely an actual form of a human ability and attitude in one's rational behavior.

Considering the advancement of mathematical knowledge, we can say that mathematics is a good example which reflects such a human rationality, i.e. the human ability and attitude. For this property of mathematics itself, mathematics is deeply rooted as a good subject which is needed in moulding the ability and attitude of a rational person who contributes to the development of the open democratic society he belongs to.

But, it is needed to analyze the practicing and pursuing the rationality especially in mathematics education. Mathematics teacher must aim the rationality of process where the mathematical belief is maintained. In fact, there is no problem in the rationality of content, as long as the mathematics teacher does not draw mathematical conclusions without bases. But, in his mathematical activities he presents in his class, mathematics teacher must be able to show them together with what even his own belief on the efficiency and propriety of mathematical activities can be altered and advanced by a new thinking or new experiences.

## 合理性の追求と数学教育

韓国教育開発院 姜 玩

### I. 開放的社会と数学教育

ある思想や知識の形成、発達、それが形成され、発達してゆく社会と密接な関連を持っている。根本的にはオイエルパッハ(Feuerbach)の言葉の中で、知り得るように、人間の肉体的誕生とおなじく、人間の精神的誕生も二人の存在、すなわちその社会的背景を必須要件としているものである。

数学も勿論人間の精神的活動の産物であり、ほかの思想や知識と同じくその社会的背景から影響を受けたりまたそれに影響を与えたりするものと見なければならぬ。たとえば、微分、積分の概念は、その接近方式と発展過程において、ドイツのライプニッツ(Leibnitz)とイギリスのニュートン(Newton)を各始点として差異を示しているが、このようになった原因には、当時の思想的文化的背景の差異によるものもあつたと言えるのである。一歩進んで、ドイツの観念論的思想とイギリスの功利主義的思想との差異においても見られるように、このような思想的、文化的差異は、当時の社会的背景と切り離しては考えにくい密接な関連を持っているのである。そして、このような見解は今日のいわゆる知識社会学の基本立場でもある。

確かに、一社会の特徴はその社会の思想と文化の形式、発達と密接な関連を持っている。しかし、教育という観点から見ると、思想や知識の形成に影響を及ぼす社会的背景に対する分析にとらず、その社会の発達に影響を与える思想や知識の成長及び普及といふ見方も、同時に考えなければならぬのである。

特に、数学的知識または数学教育はその目的機能が技術、文明社会の発展と関連されて論じられるのである。まことに、今日の社会では急速な科学技術の発達により、数学的知識の活用及びその拡大に対する必要性が過去のどの時代よりも切実に要求されている。しかし、このよき側面だけを扱う議論は、ややもすれば数学的知識または数学的思考が専ら物質文明の発達にだけ与するものであり、その物質文明の根底を造り起す精神文化とはかかわりないものだという受け取られる余地を残しているものである。

そうだとすれば、数学的知識およびその教育が人間の精神的社会的な生活とどのように関連していると考えられるであろうか。今日の社会は物質文明の繁栄だけでもって特徴づけられるものではない。我々がおのおのの生活している色々な社会、地域ごとに相異なる制度的特徴にもかかわらぬ大部分の社会は開放的自由民主主義社会に属していると見られ、少なくともそのような理念を標榜している社会であるという点は否認し得ないものである。

このような社会に生きてゆく社会的動物として、人間が、この社会で成し遂げられる教育と関連において、その活動の指向する価値をてみると、人間の活動は合理性の追求といふ面と直接に結びついていると規定することができる。実に今日の開放的自由民主主義社会において、合理性の概念は開放自由民主主義社会を成立させる法的原理となると同時に、教育を受けた人間が態度を包括的に説明してくれる教育価値として主張されてもいるのである。

特に、今日の数学教育においては、1983年Nの報告書<sup>1)</sup>が明らかにしている如く、大部



国家に共通せる数学教育の目標とその社会的本質およびその社会の構成員として具備すべき準備的個人の資質と関連して数学的思考力または論理的思考力の涵養ということに集約することができ、これは結局合理性の追求という社会的価値理念に包含されるものと考えられることができる。

かようにして、たとえば合理的信念や合理的態度、合理的行為能力、合理的思考能力、そして、合理的道徳性等における如く、“合理性”は人間の多様な他の特性とともに、包括的に関連して論じられ、教育を通じて合理的な人間を育成することによって、合理的な社会を造るべきだという主張は、極めて一方的なものながらその妥当性が認められているものである。

しかし、“合理性”または“合理的”という概念は“理性”または“理性的”という概念と同じくあいまいなかたちで使用される場合が多いのである。したがって、“合理性”は教育実際においてはある具体的な示唆と指針を提供し得る程度に、より体系的に分析されるのが望ましい。またこのような分析と関連して、数学教育の追求する目標の妥当性に対する論議も始めて達成されるのである。

この論文では教育的価値概念としての合理性に対する曹和泰の分析<sup>2)</sup>を整理して、これを土台として数学教育において追求されるべき合理性の意義を検討することによって、物質文明とともにその根底をなしている精神文化の次元に寄与する数学教育の価値と部分的方法論を、制限された接近方式を通じてではあるが、論じてみようと思う。

## Ⅱ. 合理性の概念的條件

### (1) 合理的行為の概念的條件

多様な“合理性”または“合理的”という言葉は観点と意味基準にしたがって使用されている。しかし、われわれの日常の話し合いではこれらの意味をいちいち規定しないで、この単語を使用した文章の脈絡にしたがって気やすく使用している。これはとりもなおさず、われわれがこれらの概念を適切に適用するある一般的基準を共有している

ことをあらわしていると考えられることができる。このような基準に対する概念分析的方法を土台として“合理性”または“合理的”という概念が人間の行為は適用される時に具備すべき概念的條件は次のように分析される。

まず行為の主体は何らかの成就しようとする念願を持っているべきである。彼は自身の行為が最善の方法なることを信じ、それに対する理由を持っているのである。また、その目標の達成可能性、手段の効率性に対する行為主体の信念は客観的にその妥当性が認められなければならない。そしてこれらの理由のためにそのような行為を行うようになるのである。

行為の合理性に対する概念的條件がこのように規定されれば、合理性はただちに問題解決力、道具的理性能力、すなわち経済的人間の特性を意味するようになり、この時の合理的思考とは、とりもなおさず効率的に経済的な思考方式や手続を意味するようになるのである。

勿論このような規定は規範的の意味が色あせて、価値概念が排除されているという欠陥を持っている。したがって、行為主体の目標に対する価値観手段の正当性等に対する信念等に関して、その客観的妥当性が認められるべきであるという点が付け加えられるべきであろう。

### (2) 合理的信念または知識の概念的條件

信念の合理性に対する理論は、知識の合理性に対する理論と関連を持つている。一般的に、ある知識を表現する陳述は、実証的総合的陳述、論理的分析的陳述、規範的価値判断的陳述の三種形態にわけて考えることができる。大体において実証的陳述は自然科学の知識体系に発展され、各陳述に対する正当化の手段は観察と経験による帰納として特徴づけられるものと見ることができる。また、論理的陳述は数学や論理学の知識体系に発展し、その正当化の手段は論理的必要性である。これに比べて規範的陳述は哲学、倫理学等に関する知識体系に発展し、事実的根拠と論理的必然性をその正当化の手段とするのである。

しかし、科学的知識体系の典型としての実際の

陳述も、その普遍妥当性の判定基準は自明なるものとは言い得ないものである。これはヒューム (David Hume) が指摘した所の“帰納の方法に付きまとう誤謬”であり、観察の結果得られた命題と普遍的法則の命題との間には必然的關係が存在したいからである。それにもかかわらず、観察による命題が受け入れられるのは、聯想の反復による習慣と期待によるものであると見ることができる。したがって、科学的知識体系がその妥当性を認められるのは暫定的であると言われるのも当然のことと思う。結局こうなれば科学的知識も推測的命題の性格を帯びる信念に過ぎないことになるのである。

論理的陳述においては、その普遍妥当性の基準が自明なるものとして受け入れられるものようである。ところが、いかなる演繹的体系も結局はその基礎となるいくつかの公理から出発せざるを得ない。しかし、ヒュームの批判によれば、論理の演繹的体系は既にその公理に暗示された陳述に対する同語反復 (Tautology) に過ぎないことになってしまう。その反面、その公理系の設定可変性のために、各種の論理的命題の真偽に対する正当化の基準に関する議論さえ可変的なものになってしまうのである。その上、ゲーデル (Gödel) によれば、一つの公理系の無矛盾性さえも論理学的原理にしたがってそれを証明することは不可能なのである。結局、いかなる公理系を設定し選択するのかということ、つまり行為の主体である人間自身の合理的信念に従うことになるのである。

規範的陳述においてもその事情は同じである。規範的陳述はその窮極的真偽に対する判定が容易に与えられないという点で、その普遍妥当性の基準に対する論はより一層合理的信念に対する理論と関連を持っようになるのである。

結局、知識は合理的信念の発展した形態であると考えることができ、知識の教育はすなわち信念の獲得と変化の過程であると考えer見方がその妥当性を認められるようになったのである。

しかし、いかなる陳述もその普遍妥当性を論じ得る客観的基準が確実ではないということは問題

点として残る。しかし、これはそのままこのような結論に到達できるようにする論議の基準が存在するのと意味する。すなわち、我々は信念の合理性に対する概念的条件として、信念の妥当性に対する公的な所論、批判的検証過程が許容され、信念が開放的に堅持されなければならないという点を付け加えるべきである。

無論、これは合理的信念や知識が具備すべき条件としての根拠の適切性と妥当性に包含せられるものと見ることでもある。しかし、合理的根拠を有する知識であっても閉鎖的に主張され得るという点では、これを区分すべきであると思う。したがって、我々はこれを信念の内容的合理性と信念の方法的合理性とにわけて考えることができるであろう。

こういう観点で見ると、科学的信念や知識はそれ自体の普遍妥当性によってというよりも、それが堅持される過程と方式によって合理性を持つかどうか特徴づけられるようになり、信念の合理性に対する基準は“信念そのものが正しいのか。”という問題というよりは“その信念がいかなる方式と態度で信じられ主張されているのか。”という問題として取扱われるべきであると思う。

### Ⅲ. 人間の合理性と数学

信念の合理性に対する概念的条件の二つの側面はそのまま人間の合理性を言い表わしている。すなわち、その内容的合理性の基準は人間の知的特徴と知的探求能力を反映という点において、人間の合理性と関連している。またその方法的合理性の基準は信念の主張、堅持方式と関連し、人間の態度すなわち知的特性自体の形成過程において現われる人間の合理性と関連している。

すなわち、人間の合理性は妥当にして適切なる理由や証拠に立脚して、合理的な信念を形成し、そのような信念に立脚して、自身の行為を計画し遂行してゆく過程で発揮される人間特性であると推論することができる。

歴史的に振り返って見ても、アリストートル (Aristotle) 以後ダーウィン (Darwin) の進

人間観が擡頭する前まで、合理性の概念は演  
論的推論能力を意味するものとして使用さ  
れたもので、合理性とは人間をほかの動物と  
する所の人間固有の特性であるとの見解が極  
至当なるものとして認められて来た。

日においても、このような見方が人間の言語  
能力によって、支持されている。K. Popper  
語の機能的特性を ①表現的機能 ②反応誘  
発機能 ③記述的機能 ④論議的機能の4種に  
し、動物は①、②の機能までしか保有してい  
と見ている。したがって、人間の知識追求と  
形成の過程は、人間言語の固有特性である記  
述機能と論議的機能を通じて、事実自体若しく  
問題に対する解決策を仮設的に記述し、そ  
述された陳述や推測の真偽を批判的に論議し  
してゆく過程である。そして、このような過  
程中には人間の知的能力だけではなくある形態  
度が発揮されているのを見て取ることができ

のような態度とは、反証可能性、否定可能性  
し求めんとする批判的態度、及び反証、否定  
した時にこれを認定し修正せんとする開放的態  
取られるべきことを意味している。

学の発達してきた過程を調べて見ると、そこ  
このような人間の合理的特性がよく現れてい  
を見ることことができる。

学的論証はそれを理解する人であれば、誰に  
ても論争の余地なく、完璧に確信され得る程  
周到綿密になされるべきである。実際、数学  
論理は、論争の余地が全くないのを象徴する典  
型として知られているのである。人々はよく“二  
二は四であるように明白である”という風に  
ものである。

しかし、数学における厳密性や確実性は絶対的  
なものではないのである。それは持続的な発達  
の過程の中に存在しているものである。数学的  
原理は、一時に全てが凝結された後に伝えられて  
来たのではない。むしろ、数学はみずからの生命  
を持っており、甚だしきは科学的論争を呼び起  
こすことにはることもあるものである。I. Lakatos  
によれば、数学は疑う余地なく確実に証明された

定理等が単調に量的に増加しながら成長するもの  
ではなく、深思熟考と批判により、証明や拒否の  
論理により、人間の持つ推測を休むひまなく改善  
してゆくその間に成長するものである。<sup>3)</sup> たとえ  
ば、非ユークリッド幾何学の形成はユークリッド  
の第5公準を証明せんとする試みから始まったも  
のである。

今日においても、ある数学者たちは理想を追求  
し、広範囲な領域に亘る問題等に確実に適用され  
得る理論と方法を開発しようとしているのである。  
さらに一方ではある数学者たちは数学の基本的  
仮設と論理的構造を再点検した後で、より恒久  
的で一般的な体系になるまで、それ等を玲瓏透徹  
となるまで研磨する仕事をしている。ほかの数学  
者たちはそれなりの目的にしたがって思考の流れ  
に挑み、そうすることによって数学的思考のパ  
ターン(pattern)との関係を発見し、基本原理等を認  
識し、それらを適用し、論理の経済性と優雅さ  
に対する興奮を満喫しているのである。

どういう風に見ようと、ともかく数学は人間に  
よって構成され発展されて来たものであり、現在  
も続いて革新されつつあるものである。そして、  
これのうしろ楯をしているのはとりもなおさず人  
間の合理性なのである。同時に数学はそのような  
人間の知的能力と合理的態度を反映する最も立派  
な一つの例となっているのである。さらに一步  
すすめて言えば数学は数学自体のこのような特性  
によって、人間の合理的能力と態度を陶冶する立  
派な教科として深く根を下しているのである。

#### IV. 合理性の追求と数学教育

しかし、数学教育は、その目標において合理性  
の追求との大きい一致を示しながら、具体的に合  
理性の追求といかなる関連をもっているかとい  
うことに対してはまだ明白に論じられていないの  
である。

さきに論じた所によれば、合理的行為としての  
数学的活動の意味はほとんど明白であるように思  
われる。数学的活動は数学的問題に対する解決を  
試みる活動であり、大部分の成功的な数学的問題

解決活動は、その活動による目標到達可能性、活動手段の効率性等において、その客観的妥当性が多くの人々に広く認められ、容易に受け入れられているのである。数学的思考はそのまま合理的思考であり、効率的にして経済的な思考方式であると、ためらうことなく言い切る人々に逢うのはそんなに難しいことではない。

しかし、大部分の学生たちはそのような数学的思考の妥当性と効率性に対して、自らの信念を持っているとは考えにくいのである。実際、そのような信念は長い期間に亘って多様な数学的経験によって形成される所のものであり、またそういう様に形成されるべきである。したがって学生たちにおいて、このような信念が形成されるようにすることが、合理性を追求する教育を担当している教師の任務である。

単に、公式の変数に適当な数値を代入して答を求める行為は、機械的動作の水準に転落する恐れがある。自らの問題解決活動に対して、各段階毎に数学的意味を探る行動は、たとえ意識的になされるものでないとしても、自身の数学的活動の妥当性と効率性に対する信念の反映であり、規範的評価が反映され得る余地さえも準備してくれるものである。

このような信念の形成の為に教師は二つの側面から接近するようになる。一つは合理的信念の内容的側面であり、ほかの一つは合理的信念の方法的側面である。

数学的活動の妥当性と効率性に対する内容的合理性は、すでにその数学的内容の厳密な展開と、それに対する点検によつて、保障されるものである。したがって、数学教師が数学的結論を根拠なくして提示しない限りは、数学的活動の妥当性に対する学生たちの信念に誤った影響を与えることはないのである。

しかし、数学的活動の妥当性と効率性に対する

信念の方法的合理性に関しては、教師の開放的度と忍耐が必要なのである。教師は数学的活動に対する自身の信念に対して、批判的検証過程を容すべきであり、そのような信念を開放的に堅すべきである。したがって、教師は自身の提示する数学的活動において、その効率性妥当性に対する自身の信念が新しい経験や思考によって、変発展し得るものであるという点も同時に示すことができなければならないのである。

実際に教師の権威は、自身の信念に対する公的論議を規制することによって示されるのではなく、自身の信念に対して開放的態度を示し、如何なる挑戦に対しても自身の信念の妥当性を合理的に立証することによって始めてされるのである。教師の権威はまさにかくの如く忍耐の代価なのである。

そして、これは学生をして数学的活動に対する懐疑論的態度に陥らしむることを意味するものはない。むしろ、学生たちは教師の信念が公開に議論され検討される過程を通じて、数学的活動の合理性に対する信念を自ら獲得するのは勿論自分自身の信念を開放的に堅持するようになるのである。

註)

- 1) NIER. *Mathematics Education in Asia and the Pacific* (Tokyo: NIER, 1983) p. 5—6.
- 2) 曹和泰. “教育的価値概念としての合理性” (ソウ大学校硕士学位論文, 1982)
- 3) Imre. Lakatos. *Proofs and Refutations* (Cambridge: Cambridge University Press, 1976) p. Lakatos と Popper は知識論において、互に対立する立場にいることは明白である。しかし、そのどちらも、彼等の主張は人間の合理性を模写していると見れる。

参考文献(省略)