Journal of Historia Mathematica Vol. 3. No. 1, 1986. 9
The Society of Korean Mathematical History

무한론의 계보 (볼차노에서 칸토르까지)

이화여자대학교 신 동 선
한 양 대 학 교 김 용 운

볼 차 노

체코슬로바키아의 성직자였던 볼차노(Bernard Bolzano, 1981~1848년)였으니만큼 그에게는 신학이며 철학 등에 관한 저서가 많았다는 것은 당연한 이야기이지만, 한편 수학에 관해서도 해석학의 기초에 관한 귀중한 연구가 있으며, 당시에 이미 오늘날의 집합론에 관한 연구를 하였다는 것은 극히 주목을 끈다. 그가 죽은 뒤에 출판된 〈무한의 역설(逆說)〉(Paradoxien des Unendlichen, 1850년)은 완전한 체계를 갖춘 것은 아니지만, 거기에는 무한집합(無限集合)에 관한 몇 가지 중요한 성질이 밝혀지고 있다. 그는 정수와 정수의 제곱수 사이의 1 대 1 대응에 관한 갈릴레이의 저 파라독스(逆理)로부터 더 나가서, 무한집합과 그 진부분집합(眞部分集合)의 원소 사이에도 일반으로 그와 같은 대응이 존재한다는 것을 지적하였다.

예를 들어, $y=2x$와 같은 단순한 1차방정식에서는 0부터 2까지의 구간내의 실수 y와 그 반의 구간내의 실수 x 사이에 1 대 1 대응이 성립한다. 즉, 0과 1 사이에는 0과 2 사이에서와 '꼭 같은 수'의 실수가 존재하고, 또 1인치 길이의 선분 내에는 2인치 길이의 선분내에서와 꼭 같은 수의 점이 존재한다는 등 말이다. 〈무한의 파라독스〉에서 다루어진 이 '수학적 무한'에 관해 좀더 자세히 살펴 보기로 하자.

서로 다른 대상이 〈결합〉이라는 논리적 조작에 의해 하나의 〈전체〉(Inbegriff, Ganze)로 생각되는데, 이러한 전체 중에서 원소(〈부분〉; Teile)의 결합 방식을 문제로 삼지 않는 것을 특히 〈집합〉(Menge)이라고 부르고, 그 원소가 모두 어떤 개념 A에 속한다고 간주되는 집합을 'A의 집합'(='다수')(Vielheit von A)이라고 규정한다. 이 집합 중에서도 특히 무한집합을 수학적으로 파악하기 위해서는 그것이 무한수열(無限數列)로서 나타내어질 필요가 있으며, 따라서 먼저 자연수열을 논리적으로 형성하는 것이 문제가 된다.

볼차노가 자연수열의 무한성을 파악하려 하였던 것은 '한없는(endlos) 생성의 과정'에서가 아니라 항(項)의 집합의 상등(相等)·대소의 관계라는 관점에서였다. 그리고 이것을 가능하게 만든 원리는 두 집합의

원소 사이에 1 대 1 대응의 관계가 성립하는지의 여부였다. 이 관계가 성립할 때, 이 두 집합은 상등이고, 성립하지 않으면 그 사이에는 대소관계가 성립하는 것이며, 모든 유한집합보다 큰 집합, 그러니까 어떤 유한집합도 그 단순한 일부에 지나지 않는다고 생각되는 집합을 '무한집합'이라고 불렀다. 여기서 분명한 것은 볼차노가 참된 무한을 생성적 무한(∞)으로서가 아니라 『어떤 유한도 넘어서서 존재하는 무한』으로서, 그것도 형이상적·질적(質的) 무한으로서가 아니라, 집합적으로 나타내어지는 수량적(數量的) 무한으로 규정하고 있다는 사실이다. 즉,

『무한성(無限性)이란, 본래적으로는 다만 다수(多數)라는 성질만을 뜻하는 것이며, 우리가 무한으로 간주하는 것은 모두 무한한 다수로 간주할 수 있는 성질을 인정할 때에만 그렇게 부를 수 있다.』

이러한 입장에서, 그는 무한을 변량(變量)으로 파악하는 수학자들이나 그것을 절대자(絶對者)로 생각하는 철학자들의 견해를 비판하고 있다.

일반으로, 어떤 법칙에 따라 이루어지는 계열의 무한성을 집합에 속하는 성질로 규정한 볼차노의 입장에서는, 이러한 구성 법칙에 의해 계열로서 형성되는 것들의 집합은 모두 무한으로 간주된다. 실제, 그 예로, 그는 '명제의 집합', '진리의 집합' 등은 모두 무한집합임을 증명하였다. 즉, 하나의 진리(또는 명제)가 존재한다는 것은 우선 틀림없는 일이고, 따라서 『A는 참이다』고 하는, A와는 다른 제 2 의 진리(명제)가 존재하고, 마찬가지로 『A는 참이라는 명제는 참이다』고 하는 다른 새 진리(명제)가 존재한다.……이 과정은 한없이 되풀이되고, 따라서 이들 진리(명제)의 전체로 이루어진 집합은 무한집합이다. 이 때문에 볼차노는 〈참무한(眞無限)의 정당한 주창자(主唱者)〉로 일컬어지고 있다.

이 보헤미아의 철학자가 이렇듯 현대수학에 가까운 발상을 가진 데 비해 가우스나 코시 등의 대수학자들이 일종의 '무한에 대한 공포'를 품었던 것은 아이로니컬하다. 이 두 사람은 수학에 있어서는 완성된 무한이란 존재할 수 없다고 주장하였지만, 실제로 '무한의 차수(次數)'에 관한 그들의 연구는 볼차노의 생각과는 멀리 떨어진 것이었다.

바이에르슈트라스

무한소셈의 기본개념의 확립을 일단 마무리지었던 사람은 바이에르슈트라스(Karl Weierstrass, 1815~1897)였다. 그의 무한소셈에 대한 공헌 중에서는 무엇보다도 먼저 무리수의 이론을 꼽아야 한다. 볼차노나 코시 등의 무한급수의 수렴(收斂)에 관한 연구가 완전하지 못하였던 것이 무리수론(無理數論)의 미완성 때문이었다는 사실은 그 이유를 충분히 말해 주고 있다.

바이에르슈트라스는 제곱이 2인 수를 보기로 들어, 무리수의 개념을 구상하고 있다. 즉,

어떤 정수나 분수도 그 제곱은 2가 아니다. 그러나 그 제곱이 2에 얼마든지 가까운 분수는 존재한다. 먼저

$$1^2<2<2^2$$

이 성립한다. 또, n이 임의의 정수라고 할 때,

$$\left(1+\frac{c}{n}\right)^2<2 \qquad (0\leq c\leq n-1)$$

을 만족시키는 c가 반드시 존재한다. 이 c 중에서 최대의 것을 c_1이라고 하면, 다음이 성립한다.

$$\left(1+\frac{c_1}{n}\right)^2<2<\left(1+\frac{c_1+1}{n}\right)^2$$

또,

$$\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c}{n^2}\right)^2<2$$

를 만족시키는 c(단, $0\leq c\leq n-1$)도 반드시 존재하기 때문에 이 c 중에서 최대의 것을 c_2라고 하면, 마찬가지로 다음이 성립한다.

$$\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}\right)^2<2<\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2+1}{n^2}\right)^2$$

이 방법을 계속하면, 일반으로 다음이 성립한다.

$$\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_r}{n^r}\right)^2<2<$$
$$\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_r+1}{n^r}\right)^2 \cdots\cdots(1)$$

또,

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_{r+1}}{n^r}\right)^2\\&\quad-\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_r}{n^r}\right)^2\\&\quad=2\cdot\frac{1}{n^r}\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_r}{n^r}\right)+\left(\frac{1}{n^r}\right)^2\\&\quad<\frac{2}{n^r}(1+1)+\left(\frac{1}{n^r}\right)^2=\frac{1}{n^r}\left(4+\frac{1}{n^r}\right)\\&\quad<\frac{5}{n^r} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

따라서, 식 (1)의 첫째 변, 세째 변과 2의 차는 각각 $\frac{5}{n^r}$보다 작다. 그런데 이 $\frac{5}{n^r}$는 r을 크게 하면 어떤 수보다 작아진다. 따라서, ε을 임의의 작은 양수라고 할 때,

$$2-\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_r}{n^r}\right)^2<\varepsilon$$

을 만족시키는 분수,

$$1+\frac{c_1}{n}+\cdots+\frac{c_r}{n^r} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

을 구할 수 있다. 위의 (3)은 그 제곱이 2에 가까운 수이며,

$$1,\ \frac{c_1}{n},\ \frac{c_2}{n^2},\ \cdots,\ \frac{c_r}{n^r}$$

이라는 유리수들로 이루어지고 있다. 이 유리수의 갯수가 많을 수록 구하는 수에 가까와진다. 지금

$$a_1=1,\ a_2=\frac{c_1}{n},\ \cdots,\ a_{r+1}=\frac{c_r}{n^r}$$

로 놓고, $a_1+a_2+\cdots+a_{r+1}$을 $(a_1, a_2, \cdots, a_{r+1})$와 같이 나타내면, (3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(1,\ \frac{c_1}{n},\ \frac{c_2}{n^2},\ \cdots,\ \frac{c_r}{n^r}\right)\cdots\cdots(3)'$$

바이에르슈트라스는 이처럼 자연수 1, 2, 3, …에 대응하는 무한 개의 유리수의 집합 $a_1, a_2, a_3, \cdots$로 확장한 무합집합체

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

을 생각하여 이것에 적당한 규약을 새로이 정하고, 이 집합체의 상등·대소의 비교·계산4칙 등을 가능케 함으로써 '무리수'를 구성한 것이다.

이 새로운 수의 개념 형성을 위해서는 먼저 유리수의 상등에 관한 정의를 적당히 표현을 바꾸어서 무한집합체에도 적용할 수 있도록 할 필요가 있었다. 그것은 유리수가 새로이 정하려는 수(=무리수)의 일부로서 그것에 포함되어야 하기 때문에 상등에 관

한 새 정의는 종래의 유리수의 상등 정의에도 적용될 필요가 있었던 것이다. 유리수의 상등 및 집합체의 상등에 관한 바이에르슈트라스의 정의는 각각 다음과 같다.

『한 수 a의 각 성분이 동시에 다른 수 b의 성분이고, 또 역으로 b의 각 성분이 동시에 a의 성분이기도 할 때, a와 b는 서로 같다고 한다.』

『유한 개 또는 무한 개의 양의 유리수로 된 두 집합의 각 성분이 항상 다른 집합체의 성분일 때, 이 두 집합체는 서로 같다고 한다.』

그러나 위의 '상등의 정의'가 적용되지 않는 집합체가 생긴다. 즉, 이 정의는 각 성분이 유한인 일정의 유리수(양)보다 작은 집합체에서만 성립한다. 이 집합체를 〈무한수렴집합체(無限收斂集合體)〉, 그렇지 않는 것을 〈발산집합체(發散集合體)〉라고 부른다. 여기서

'모든 무한수렴집합체의 집합'

을 생각할 때, 그 원소인 집합체 사이에서 상등·대소의 비교가 가능하고, 게다가 4칙연산을 비롯하여 대수학상의 온갖 원리가 성립한다. 따라서 이러한 집합체를 '1개의 수'로 보고, 이것들의 집합을 하나의 수체계(數體系)로 간주하여도 된다. 이 새로운 수계(數系)에는 자연수 및 양의 분수—즉, 양의 유리수—가 포함된다는 것을 알 수 있다. 이 새로운 수계(數系) 중에는 유리수 이외의 수를 포함한다. 즉, 여기에는 임의의 양의 유리수의 거듭제곱근이 모두 존재하고, 그 중에는 유리수가 아닌 수들이 아주 많이 포함되어 있다. 이러한 수를 통틀어 무리수라 하고, 유리수·무리수를 합쳐서 실수(實數)—정확히 말해서 양의 실수 전체—라고 부른다는 것은 우리가 잘 알고 있는 바와 같다. 이 수체계를 0 및 음수의 세계에까지 확장하여 바이에르슈트라스는 실수계(實數系)를 건설하였던 것이다.

데데킨트

데데킨트(Richard Dedekind, 1831~1916년)라고 하면 평생을 보랑슈바이크(Braunschweig)라는 시골에서 지낸 이 공업 전문학교 교수를 유명하게 만든 〈연속과 무리수〉(Stötigkeit und irrationale Zahlen, 1872년)를 으레 먼저 생각에 떠올리기 마련이다. 이 저술 속에서는 무한은 이제 '생성(生成)하는 무한'(=〈가무한(假無限)〉)이 아니라 '존재하는 무한', 즉 〈실무한(實無限)〉으로서 다루어지고 있는 것을 뚜렷이 볼 수 있다.

데데킨트는 유리수를 바탕으로 무리수를 다음과 같이 정의하였다. 유리수 전체를 다음 4조건을 만족하는 A_1, A_2의 두 부류로 분할하였다고 하자.

① A_1, A_2에 공통으로 포함되는 유리수는 존재하지 않는다.

② 어떤 유리수도 반드시 A_1 아니면 A_2에 속한다.

③ A_1에 속하는 수는 모두 A_2에 속하는 수보다 작다.

④ A_1, A_2에는 각각 무한히 많은 유리수가 포함되어 있다.

이러한 유리수 전체의 분할을 〈절단(切斷)〉(Schnitt, cut)이라고 부르고,

$$(A_1,\ A_2)$$

로 나타낸다. 그리하여 그는 무리수와 유리수를 이렇게 정의하였다.

『일반으로, 어떤 절단$(A_1,\ A_2)$에서 A_1에 최대수가 없고, 또 A_2에 최소수가 없을 때 이것을 무리수라고 하며, A_1에 최대수가 있거나 A_2에 최소수가 있을 때 이것을 유리수라고 부른다.』

예를 들어,

양의 유리수 전체 중에서 그 제곱이 2보다 큰 수의 전체를 A_2, 그 밖의 양·음의 유리수 전체를 A_1이라 하면, 이 A_1, A_2는 위의 네 조건을 모두 만족시키므로 A_1, A_2에 의해 하나의 절단을 정의할 수 있다. 즉 이 (A_1, A_2)에서는 A_1에 최대(유리)수가 없고, 또 A_2에도 최소(유리)수는 없다. 여기서 데데킨트는 이 절단을 $\sqrt{2}$ 즉,

$$(A_1, A_2) = \sqrt{2}$$

와 같이 나타냈다. 이 데데킨트의 정의는 보통 우리가 생각하는 $\sqrt{2}$와는 아무런 상관이 없다.

여기서 새로이 정의된 유리수는 종래의 유리수와는 표현이 다르기는 하지만, 실질적으로는 같은 내용의 것임을 알 수 있었다. 이 〈절단〉에 의한 정의를 바탕으로 그는 임의의 두 〈절단〉의 상등·대소, 그리고 4칙연산 등을 정의하여, 더 나가서 유리수·무리수 사이의 상등·대소·4칙 등을 정하였다. 이렇게 해서 새로이 정의된 유리수·무리수의 전체를 실수라고 부르고, 이것을 R^*으로 나타낸 그는 또 R^*에 있어서의 절단을 생각하였다. 실수 전체의 절단을 (A_1^*, A_2^*)로 나타내면, 이번에는

『A_1^*에 최대(실)수가 있거나, A_2^*에 최소(실)수가 존재한다.』

는 경우만이 성립한다. 이 사실을 데데킨트는 실수가 지닌 '연속성'의 본질로 삼았다. 여기서 특히 주목해야 할 사실은 무리수의 절단에는 무한집합 A_1, A_2를 전제로 하고 있다는 것, 즉 무한히 많은 수의 모임을 어떤 '완결(完結)된 것'으로 취급하고 있다는 점이다. 앞에서도 이야기한 바와 같이 코시의 입장에서는, 무한은 '변수의 상태'를 나타내었으나, 여기서는 '존재하는 것'으로 생각되어 있는 것이다. 그의 '무한히 많은 수의 고임'의 개념은 그 후 발전하여 〈수(數)란 무엇이며, 무엇이어야 하는가〉(Was sind und was sollen die Zahlen?, 1887)에서는 〈무한히 많은 것의 모임〉으로 다루어지게 된다.

칸토르

제논(Zenon)의 시대 이래, 사람들은 수학 뿐만 아니라 신학에 있어서도 줄곧 무한을 논의의 대상으로 삼아 왔다. 그러나 데데킨트의 〈연속성과 무리수〉가 나온 해인 1872년 이전에는 제논이 무엇에 관해서 이야기하였는지를 정확히 설명할 수 있는 사람은 아무도 없었다. 그때까지는 무한에 관해 언급할 때, 으레 무제한의 힘이라든지 한없이 큰 양(量) 따위를 그 보기로 내세우는 것이 고작이었다. 때로는 갈릴레이나 볼차노처럼, 어떤 모임 속의 무한히 많은 원소에 주목하는 경우도 있었으나 전문 수학자들, 예를 들어 코시나 바이에르슈트라스 등은 무한대라든지 무한소란 아리스토텔레

스의 이른바 잠재적 무한(潛在的 無限(=假無限, potentiales unendliche)), 즉 무한과정(無限過程)의 불완전성에 지나지 않는다고 믿고 있었다. 그들은 수학에 있어서의 실무한(實無限, eigendliches unendliche), 즉 '완성된' 무한을 구명하려고 하였지만, 결국은 파라독스의 벽에 부딪쳤을 뿐이었다. 데데킨트는 '완성된 무한'집합에 관한 긍정적인 정의를 위의 논문에 이어 또 하나의 중요한 논문 〈수란 무엇인가, 무엇이어야 하는가〉(1887년)에서도 거듭 다루었다.

칸토르(Georg Cantor, 1845~1918)년)도 데데킨트와 마찬가지로 무한집합의 기본적 성질을 인식하고 있었지만, 데데킨트와는 달리 그는 무한집합이라고 해서 모두가 같은 것이 아니라는 것을 깨닫고 있다. 칸토르는 유한집합 사이에서 쓰이는 방법, 즉 두 집합의 각 원소가 서로 1대 1로 대응하고 있으면, 이 집합들은 같은 수(基數)를 갖는다고 하는 방법과 비슷한 발상으로, 무한집합을 집합의 '농도(濃度, Mächtigkeit)에 따라 단계적으로 분류하는 방법을 자세히 설명하였다.

예를 들어, 자연수의 집합은 유리분수(有理分數)의 집합보다 훨씬 작은 것처럼 보이지만, 이 집합 역시 가산(可算) 또는 가부번(可附番)집합, 즉 자연수집합과 1 대 1로 대응하는, 그러니까 같은 농도를 갖는 집합임을 칸토르는 밝혔다. 두 유리분수 사이가 아무리 가까와도 거기에는 또 다른 유리분수가 존재한다. 이 조밀(稠密)한 유리수의 집합이 정수의 집합과 같은 농도를 지닌다면, 수의 집합은 모두 같은 농도를 지닌다고 생각하고 싶어진다. 그러나 칸토르는 이에 대해서 부정적인 해답을 주었으며, 실제로 그것을 증명하였다. 예를 들어, 실수 전체의 집합이 유리분수의 집합보다도 큰 농도를 지닌다는 것을 나타내기 위해서 칸토르는 다음과 같이 귀류법을 사용하였다

0과 1 사이의 실수집합은 가산(可算)이라고 가정해 보자. 여기서 모든 수를 무한소수꼴(예를 들어, 1/3=0.333…, 1/2=0.499…와 같이)로 나타내면 다음과 같이 차례로 번호를 붙일 수 있다.

$$a_1=0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\cdots$$
$$a_2=0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\cdots$$
$$a_3=0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\cdots$$

(단, a_{ij}는 0부터 9까지의 수임)

그런데, 0과 1 사이의 실수 중에서 위의 무한소수에 포함되지 않는 것이 생긴다. 이 수는, 예를 들어 $a_{kk}=1$일 때 $b_k\fallingdotseq 1$, $a_{kk}\fallingdotseq 1$일 때 $b_k=1$로 하면 만들어진다. 이 새로운 무한소수

$$b=0_1\ b_1\ b_2\ b_3\cdots$$

는 0과 1 사이에 있는 실수를 모두 포함한다고 가정한 위의 무한소수 중의 어느 것과도 같지 않는다(이러한 b는 얼마든지 생긴다!).

실수는 두 개의 다른 기준에 따라

㉠ 유리수와 무리수

㉡ 대수적수(代數的數)와 초월수

의 두 종류로 나눌 수 있다. 그런데, 칸토르는 유리수의 집합보다 훨씬 일반적인 대수적 수의 집합조차도 정수집합과 같은 농도를 지닌다는 것을 밝혀냈다. 따라서 실수체계의 농도를 높이는 역할을 하고 있다는

것은 초월수의 집합이어야 한다. 이것은 직선상의 점의 집합의 농도가 직선에서 잘라낸 임의의 짧은 선분 위의 점집합의 농도와 일치한다는 사실에서 알 수 있다. 더 놀라운 것은 집합의 농도를 결정하는 요인이 차원(次元)에 있는 것이 아니라는 사실이다. 즉, 단위선분 위의 점의 집합의 농도는 단위면적이나 단위체적—더 나가서는 3차원 공간 전체—내의 점의 농도와 같은 것이다. 이처럼 점집합론(點集合論)에서 얻어진 결과가 너무도 엉뚱한 것이었기 때문에 칸토르 자신도 데데킨트에게 보낸 편지 속에서(1877년) 도저히 믿기 어려운 결론을 이끈 자신의 증명을 재검토해 줄 것을 의뢰할 정도였다.[1]

칸토르는 이러한 여러 성과를 바탕으로 수학상의 확고한 하나의 분야로서 집합의 이론을 수립하였다. 그 이론 체계는 〈집합론(集合論)〉(Mengenlehre)—또는 〈다양체론(多樣體論)〉(Mannigfaltigkeitslehre) —이라고 불리어져서, 현대수학의 형성에 중대한 영향을 끼쳤다. 이에 관해서는 다음 장에서 따로 이야기하기로 하고, 여기서는 그의 주논문(主論文)인 〈일반집합론의 기초〉(Grundlagen einer allgemenien Mannigfaltigkeitslehre[2], 1883년)와 그것을 수학적으로 체계화한 제9논문, 〈초한집합론(超限集合論)의 기초〉(Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre), 1895~1897년)의 내용을 간추려서 소개하는 것으로 그치겠다.

칸토르의 제4논문 중의 제V편은 그가 수학과 철학의 경계상에서 무한이나 연속의 문제를 어떻게 생각하고 있었는지를 말해주는 중요한 논문이다. 모두 14항목으로 된 이 논문은 〈일반집합론의 기초〉라는 제목 밑에서 독립적으로 발표되었다. 여기서 다루어진 주제는 칸토르의 집합론의 기본을 이루는 실무한(實無限)에 관해서인데, 이 개념이 철학과 수학의 두 측면에서 고찰되어 있다. 먼저 그는 철학의 입장에서, 하나의 개체로서의 무한존재(無限存在)—즉, 실무한—를 '1과 다(多)'에 관한 엘레아학파와 플라톤 이래의 문제와 관련해서 따지고 있다.

한편, 수학적인 면에서, 그는 현재의 초한순서수(超限順序數)에 해당하는 이 무한(=實無限)을 도집합(導集合)의 차수(次

(1) Herbert Meschkowski, "Evolution of Mathematical Thought"(1965년) Chap. 5. 이것은 칸토르 자신 뿐이 아니었다. 수학적 개념에 대한 종래의 전통과는 다른 칸토르의 연구 방법에 당혹을 느낀 출판사는 그의 논문 게재를 자주 지연시키기도 하였다.

(2) 칸토르의 삼각급수(三角級數)에 관한 논문에는 'Punktmenge'(점집합)이라는 술어가 나오지만, 그의 제1논문(〈대수적 실수 전체가 지닌 한 성질〉(1874년))에서는 실수 전체라든지 대수적 수 전체를 나타내는데, 'Inbegriff'(총체)가 쓰이고 있다. 그가 새로운 집합개념으로서 'Mannigfaltigkeit'(多者)를 도입하여 위의 두 개념을 통합한 것은 제2논문에서였다. 그러나 1880년 이후에는 다시 'Menge'가 쓰여졌다. 그런데, 'Menge', 'Inbegriff'는 볼차노가 쓰기 시작하였으며, 'Mannigfaltigkeit'는 리만이 '다양체'(多樣體)의 뜻으로 사용한 용어가 칸토르에 의해 확장해서 사용된 것이다. 그러나 칸토르가 이 낱말을 사용하게 된 중요한 동기는 '1과 다(多)'라고 하는 그리이스 이래의 철학상의 문제와도 다분히 관련이 있는 듯하다. 실제, 이 문제에는 단위와 수, 원소와 집합이라는 수학적인 일면 외에 철학적인 측면이 있다. 칸토르 자신도 제4논문 속에서, 집합개념은 본래에는 수학만의 것이 아니고, 『유일자(唯一者)로 간주된 다자(多者)를 가리키며, 플라톤이 말하는 이데아에 가까운 것』이라고 말하고 있다.

數)[3]의 초유한적 연장(超有限的 延長)으로써 구체화시켰다. 동시에 농도의 이론을 이 초한순서수를 바탕으로 재구성하고 있다. 요컨대, 농도의 이론과 순서수(順序數)의 이론을 두 발판으로 삼는 현재의 집합론의 골격이 이 논문 속에서 갖추어지게 된 것이다.[4] 제 9 논문인 〈초한집합론의 기초〉에서는 이 농도—기수(基數)—와 순서수의 관계가 순전히 수학적인 입장에서 다루어진다. 즉, 집합의 정의에 이어, 1 대 1 대응에 의한 농도의 상등·대소관계·합·곱·거듭제곱 등의 계산, 그리고 무한농도(無限濃度)—-초한수(超限數)—-정렬집합(整列集合)과 그 '순서형(順序型)'인 초한순서수 등의 이론이 주된 내용으로 되어 있다. 이 두 논문 속에서 설명되어 있는 농도와 초한순서수의 개념을 요약해 보면 다음과 같다.

집합의 농도는 기수(基數, cardinal number)라고 불리어진다. 예를 들어 정수 전체의 집합의 기수는 최소의 초한수(超限數): (알레프(aleph)·제로)—또는 a(독일어 알파벳 인쇄체 소문자)—이며, 실수 또는 직선상의 점의 집합의 기수는 '보다 큰' 초한수 c, 즉 연속체(連續體)의 기수가 된다. 칸토르는 a와 c 사이에 또 다른 초한수는 존재하지 않는다는 것, 수 c는 'a 다음으로 큰 초한수'라고 믿었으나, 그 증명에는 성공하지 못하였다. 그러나 그는 집합의 부분집합으로 된 집합, 즉 멱집합(冪集合)은 항상 원래의 집합보다 큰 농도를 갖는다는 것을 밝힘으로써 c보다 큰 초한수가 무수히 존재한다는 것을 증명하였다. 요컨대 무한히 많은 자연수가 존재하는 것과 마찬가지로 초한수도 무한히 많은 것이다. 순서관계는, 수학에서는 까다로운 문제이며, 초한순서수의 연산은 유한순서수의 그것과는 크게 다르다. 유한순서수는

$$1=\{0\},\ 2=\{0,1\},\ 3=\{0,1,2\},\cdots$$

와 같이 유한집합에서 정의되는 순서수이고, 이에 대해 초한순서수 ω는 자연수를 '자연의 순서'대로 배열한 것, 즉

$$\omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

이다. 그래서 이 ω를 자연수열의 '맨 끝'에 두면,

$$1,2,3,\cdots,\omega$$

그런데, 위의 배열은 또 하나의 실무한(實無限), 즉 초한순서수

$$\omega+1=\{1,2,3,\cdots,\omega\}$$

가 되기 때문에

$$1,2,3,\cdots,\omega,\omega+1$$

과 같은 배열이 생기고, 이것은 또 하나의 초한순서수 $\omega+2$가 된다.…여기서는 $\omega+1$과 $1+\omega$는 같은 것이 아니다. 즉,

$$\omega+1\neq 1+\omega$$

인 것이다. 그것은

$$1+\omega=\omega$$

이기 때문이다. 뿐만 아니라

$$\omega+\omega=\omega,\ \omega\cdot\omega=\omega$$

와 같은 성질도 성립한다.

이상에서 간단히 소개한 칸토르의 '무한

(3) 집합 A의 집적점(集積點)의 전체 A'를 A의 도집합이라 하고, A'의 도집합 A''를 A의 제 2 차 도집합이라 한다. 제 3 차 도집합 A''' 이하도 이와 마찬가지로 정의된다.

(4) 이 논문의 전체적인 구성은 그다지 계통적이라고 할 수 없으며, 특히 수학적 부분의 계통화는 최후의 논문(제 9 논문, 〈초한집합론(超限集合論)의 기초〉)에서 이루어진다.

론'을 돌이켜 보면, 그가 생각하고 있는'무한'은 미적분학의 바탕이 된 무한소나 무한대와 관련된 '무한'과는 판이한 성격의 것이었음을 알 수 있다. 미분적분학상의 이른바 '무한'은 항상 변수의 개념과 결부되어 있으며, 따라서 이것은 생성(生成)하는 무한—즉, 가무한(假無限)—이므로 여기에는 '무한대의 수'는 존재하지 않는다. 이에 대해 무한집합의 농도(濃度)·순서형(順序型) 또는 순서수를 고찰의 대상으로 삼은 칸토르는 마치 무한집합이 실제로 눈 앞에 있는 것처럼 생각하여, 농도의 비교나 덧셈·곱셈 등을 치루어 나갔다. 이 무한은 분명히 생성해 나가는 무한이 아니라 실제로 눈 앞에 놓인 무한, 즉 '실무한'(實無限)인 것이다. 칸토르는 무한(infinitum)이라는 낱말을 피하고, '초한(超限)'(transfinitum)이라는 표현을 사용하고 있는데, 이 개념상의 비약은 다분히 의식적인 것이었다. 즉, 이것은 아리스토텔레스의

『실무한(實無限)은 존재하지 않는다』(infinitum actu non datur)

에 대한 반론(反論)으로서,

『유한이건 무한이건 모두 정의될 수 있으며, 신(神) 이외의 것은 지성에 의해서 결정할 수 있다.』(5)

는 철학상의 신념을 상징하는 표현이기도 하였던 것이다.

아리스토텔레스에 비하면, 라이프니츠나 볼차노에 대한 그의 비판에는 일종의 공감이 담겨져 있다. 특히 라이프니츠의 철학은 칸토르의 마음 속에 늘 간직되어 있었던 것으로 보이며, 실제로 점집합론(點集合論)을 바탕삼아 물리학을 재구성해 보려는 의도가 엿보인다.(6) 즉, 칸토르는 아리스토텔레스를 비롯한 고대·중세의 사상가들의 심각한 논의 대상이었던 〈1과 다(多)〉에 관한 고찰을 물리학의 근원에까지도 적용하여, 보통의 물리학의 기초적 원리와는 별개의 기본적 가설—이를테면, 집합론적 원자론(集合論的 原存論)에 입각한 일종의 가설적인 물질관—을 펴내려고 하였던 모양이다. 어쨌든 수학을 형이상학의 원형으로 삼는 피타고라스 이래의 서구의 기본적 사조(思潮)의 하나가 여기에도 맥맥히 이어지고 있음을 알 수 있다.

(5) G. Cantor, "Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten"(「초한론에 관한 서간」)('Gesammelte Abhandlungen' S. 378).

(6) G. Cantor, "Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen……zweite Mitteilung"(Acta Mathematica, B. 7(1885))('Gesammelte Abhandlungen', S. 261～277).