Journal of Historia Mathematica Vol. 3. No. 1, 1986. 9
The Society of Korean Mathematical History

공간관(空間觀)의 확장과 기하학의 추상화

목포대학 김 용 국

머 리 말

오늘날, 기하학은 한마디로 〈공간의 과학〉으로 불리어지고 있다. 그러나 이와 같이 기하학을 파악하는 것은 극히 최근의 일이며, 적어도 그리스시대만 하여도 기하학이라 할 때, 그것은 원·삼각형 등의 도형, 즉, 공간적 형태(空間的 形態)를 문제로 삼는 학문이었다. 이에 비하여, 근세 이후의 기하학은 공간 그 자체의 구조를 연구대상으로 삼는다는 특징을 지니고 있다. 형태의 크기·각(角)·직각성(直角性)·평행성 등을 아무리 바꾸어도 여전히 불변인 공간적 구조를 연구하는 사영기하학(射影幾何學)이라든지 공간을 단지 차원연속체(次元連續體)로서 다루는 위상기하학(位相幾何學) 등은 그 예이다. 이러한 근세 이전과 이후의 기하학의 차이는, 그 바탕에 깔린 공간관의 성격차로부터 비롯된 것이다. 그 내용을 더 자세히 살펴보면,

첫째, 고대의 '공간'은 형태적으로 파악되는 공간이었으나, 근세 이후의 '공간'은 형태를 갖지 않는 공간, 즉 전자가 유한공간(有限空間)인데 대해 후자가 무한공간(無限空間)이라는 점.

둘째, 고대의 '공간'은 '선', '면' 등과 구별되는 '입체를 담는 장소', 즉 이른바 현상공간(現象空間)을 뜻하는 특정한 대상을 가리켰으나, 근세 이후의 그것은 이것들—즉 '선'·'면'·'공간' 등—에 공통의 성격을 일반화하였다는 것, 즉 전자는 고유명사로서의 의미를 지닌 공간이었으나, 후자는 보통 명사화되어 있다는 점.[1)]

셋째, 고대에는 '공간'의 의미내용이 소박할 정도로 단순하였으나, 근세 이후에는 그 개념이 극히 다양해졌다는 것, 즉 근세 이후에는 시각적(視覺的)인 장소의 의미를

1) 오늘날, 공간(또는 입체) 기하학을 3차원기하학, 평면기하학을 2차원기하학이라 하고, 현상공간, 평면, 직선 등을 각각 3차원 공간, 2차원 공간, 1차원 공간이라 부르고 있다. 여기서는, 이미 '공간'은 보통명사화 되어 있으며, 어떤 특정의 공간, 즉, 현상공간을 뜻하지 않는다. 이 '차원'의 생각을 일반화시키며, 3개의 실수의 조$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$으로 나타내어지는 것들의 전체는 n차원 공간이 되고, 더 나가서 $n \to \infty$일 때의 수열$(x_1, x_2, \cdots)$로 나타내어지는 것들의 전체는 무한차원(無限次元)의 공간이 된다.

떠나 집합이나 다양체(多樣體)까지도 공간이라고 부르게 되었다는 점 등[2]으로 나타낼 수 있다.

새로운 공간개념을 배경으로 삼은 근대의 기하학의 중요한 특징으로, 비유클레이데스 기하학의 성립, 그리고 해석역학(解析力學)을 비롯한 역학형식의 구성을 바탕으로 한 공간개념의 확대·심화 등을 들 수 있다. 그 한 예로, 힐버트공간이 무한차원(無限次元)의 공간으로서, 유클레이데스 공간의 가장 자연스러운 확장임과 동시에 프우리에급수론(給數論) 및 어떤 종류의 선형적분방정식(線型積分方程式)·선형미분방정식(線型微分方程式)의 이론 등, 해석학의 몇몇 분야들을 서로 연관짓게 하였으며, 또 양자역학(量子力學)의 중요한 기초가 된 것은 잘 알려져 있는 바와 같다. 또 다른 측면에서 볼 때, 새 공간관은 공리적(公理的) 이론에 관한 새로운 해석을 낳았다는 점에서 현대수학의 공리주의적 방법(公理主義的 方法)을 이끄는데, 적지 않은 역할을 하였다. 그러나 여기서 유의해야 할 것은 공간개념의 확장·심화 내지는 새로운 공간개념의 탄생은 단순한 발전논리(發展論理)에 의한 '필연적인' 결과가 아니었다는 사실이다. 근세에 있어서의 일련의 과학 및 자연철학(自然哲學)상의 방법과 체계의 탄력적인 발전을 대할 때, 얼핏 단조상향(單調上向)식의 발전논리를 수긍하고 싶어질지 모르나, 갈리레이-홉브스-데칼트-뉴턴-칸트로 이어지는 사상이 발전기에서조차 유클레이데스 공간이 공리적(公理的)으로 받아들여지고 있었으며, 모든 기하학상의 논의는 이 '공간'을 전제로 다루어지고 있었다는 것, 따라서 비유클레이데스 기하학의 성립은 단지 수학뿐만 아니라, 철학상의 중요한 변혁을 뜻하였음을 잊어서는 않된다. 비유클레이데스 기하학의 초기의 개척자들이 번번히 좌절을 겪게 된 중요한 이유는, 그들이 이 고정관념으로부터 벗어날 수 없었다는 데에 있었다.[3] 여태 유일한 존재로 간주되어온 유클레이데스 공간 이외에도 다른 공간이 있을 수 있다는 것, 그리고 또 당연히 자명(自明)의 진리로 여겨져온 공리가, 가설(假設)로 바뀌어졌다는 것은 철학적, 즉 인식론(認識論)적으로 보아, 극히 중요한 문제를

---

2) 유클레이데스공간, 비유클레이데스공간, 사영공간, 아핀공간, 리이만공간, 위상공간, 거리공간, 선형공간, 힐버트공간, 바나흐공간, 함수공간, C^∞공간, 해석공간… 등 '공간'이라는 용어가 나타내는 개념내용이 극히 다양해지고 있다.

3) 타우리누스(Taurinus)는, 〈평행선의 이론〉(Theorie der Parallellinied, 1925년) 속에서, 실제로는 비유클레이데스 기하학을 구성하였음에도, 유클레이데스 기하학이 유일한 기하학임을 의심하지 않았다. 그 예로, 이른바 '둔각을 가정한' 기하학(타원형의 비유클레이데스 기하학)에 대해서, 그는 다음과 같이 반박하고 있다. 『그것은, 온갖 각관에 모순된다. 이러한 체계가 국소적(局所的, im Kleinen)으로 유클레이데스의 그것과 같은 현상을 나타낼 것은 사실이다. 그러나 공간의 표상(表象)이, 외부세계에 대한 감각의 단순한 형식이라면, 유클레이데스의 체계는, 의심의 여지없이 참(眞)이다』(F. Engel/Stäckel, "Die Theorie der Parallellinien,"(1895), ss. 257). 또, '예각의 가정'에 대해서는 다음과 같이 단정한다. 『삼각법에 있어서, (삼각형의 안각의 합이) 2직각보다 작은 것이 포함되어 있는 기하학의 체계가 그 자체로서는 규정되어 있지 않고, 하나의 특별한 양(量), 또는 정수(定數)를 필요로 하는 것은 쉽게 밝힐 수 있다. 이 사실로부터, 곧 우리에게는 유클레이데스 이외에는 어떤 기하학도 선험적(先驗的)으로 주어지고 있지 않는다는 결론이 나온다』(*ibid.*, ss. 261—262).

야기시켰던 것이다.

이상의 사실과 관련하여, 본 논문에서는 유클레이데스 이후 현대에 이르기까지의 공간개념의 확장과정을 살핌과 아울러 기하학의 배경사상으로서의 공간론(空間論)의 변천에 주로 촛점을 맞추어 살펴보기로 한다.

1. 유클레이데스 기하학과 비유클레이데스 기하학

〈원론〉(Stoicheia)의 저 논리적 성격이 무엇에서 유래된 것인지, 그리고 이 저작을 뒷받침하는 과학론적(科學論的)·존재론적(存在論的)인 확신이 무엇을 근거삼은 것이었는지에 관해서 유클레이데스는 한마디의 언급도 없다. 이처럼 〈원론〉의 저자 스스로는 밝히고 있지는 않지만, 공리적 논증성(公理的 論證性)의 발견이야말로 그리스 수학과 그리스 철학의 공통적인 성과였다는 것은 흔히 듣는 말이다. 어쨌든 그리스 철학에 있어서의 논리의 발견은 철학자들이 수학의 논리적 성격을 뚜렷이 파악하지 않했던들 불가능하였다고 단언하여도 좋을 것이다. 이것은 플라톤 뿐만 아니라 아리스토텔레스에게도 해당된다.[4] 역으로, 유클레이데스의 〈원론〉에서 볼 수 있는 철저한 논증적 체계는, 철학자들이 꾸준히 논리적인 연관성의 구명을 요구한 결과가 반영된 고전적 형식(古典的 形式)인 것만은 틀림없다.[5] 〈원론〉의 구성은 첫머리에 정의·공준·공리[6]가 연이어 이 차례대로 등장하고, 그 다음에 이것들을 전제로, 여러 정리와 그 증명이 따르도록 되어 있다. 이 공리론적(公理論的) 전개의 출발이 되는 공준(公準)을 유클레이데스는 과연 진정한 공리로 간주하고 있었던 것일까. 사실 그렇다면, 그는 이 공리계(公理系)를 어떻게 생각하고 있었을까. 이를테면, 아리스토텔레스의 입장을 따라, 그 이상 소급할 수 없는 기초적·본질적 법칙으로 여겼던지, 그렇지 않으면 플라톤적인 의미로 한층 기초적인 전제에게로 소급될 수 있는 중간적인 전제로 삼았을까.[7] 그러나, 앞에서 말한 바와 같이 유클레이데스가 플라톤과 아리스토텔레스 사이의 수리철학(數理哲學)상의 견해 차이[8]에 대해서 어떤 태도를 취하였는지는 전혀 알 수 없다. 〈원론〉은 이 공리적 논증성

4) Görland, "Aristoteles und die Mathematik"(1899년) J.L. Heibery, "Mathematisches zur Aristoteles"(Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften 18, 1904년).

5) H.G. Zeuchen, "Sur la réforme qu'a subie la mathématique de Platon á Euclide, et grâce à laquelle elle est devenue science raisonée"(Det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, naturvidensk og mathem Afd. (1917년) p.370.

6) 정의의 그리스 원어는 〈호로이〉(ὅροι), 공준은 〈아이테마타〉(αἰτήματα, 요청), 공리는 〈코이나이 엔노이아이〉(κοιναὶ ἔννοιαί, 공통개념)이다. 그러나, 유클레이데스는 〈아키시오마타〉(ἀξιώματα)라는 표현을 사용한 것 같다.

7) 아리스토텔레스는, 〈형이상학〉 속에서, 플라톤이 감각적 사물과 이데아 외에 수학적인 것을, 고유의 존재, 게다가 중간적인 존재로서 생각하였다고 보고하고 있다. 즉, 플라톤은, 이데아의 존재, 수학적인 것의 존재, 감각적 사물의 존재 등의 3가지 존재를 구별하였다는 것이다.

8) 플라톤의 대화편 〈파이돈〉(Phaidon)은 수가 '이미 항상 그 자체로서, 거기에 존재하고 있다는 것'(das Schon-immer-an sich-das-sein)을 분명히 하고 있다. 이것은 수가 이데아로서 실재(實在)한다는 뜻으로 풀이되어 있다. 이에 대해, 아리스토텔레스는, 수학을 이데아를 다루는 학문으로 보지 않고, 오히려 자연학(自然學)으로서 규정지었다. 벨나이스(P. Bernays)와 겐쩬(G. Gen-

말고도 '구성적'(構成的)이라는 점에서 두드러진 특성을 지니고 있다.[9] 여기서 말하는 구성적 성격이란 개념의 존재가 '요청' 되거나, 그 구성가능성(構成可能性)이 명백히 증명되는 경우에 한해서, 그 개념이 쓰인다는 것을 뜻한다. 실제 이 두 가지 경우에 해당하지 않는 개념은 〈원론〉 속에서는 사용되어 있지 않다. 유클레이데스의 구성적 방법은 아리스토텔레스가 〈분석론〉(分析論) 속에서 주장하고 있는 내용과 일치한다.[10] 예를 들어, 제 1 권 제 20 명제의 정의 속에서 2등변 3각형의 개념이 설명되어 있는데, 이보다 앞서 제 1 권 제 1 명제에서는 2등변 3각형의 구성가능성이 증명되어 있는 것이다. 따라서 유클레이데스가 적어도 아리스토텔레스 철학의 영향을 받았던 것만은 틀림없다.[11]

다시 공준(公準)의 문제로 되돌아가보자. 프로크로스의 〈주석〉(注釋)에서는, 공준을 다음과 같이 정의하고 있다.

『탐구의 기초가 되는 것은 아직 알려져 있지 않지만, 그럼에도 불구하고 연구자가 아직 승인되지 않는 가정을 세워나갈 때 이것을 '아이테마타'(*αἰτήματα*, 요청=공준)이라고 한다.』[12]

유클레이데스의 〈아이테마타〉, 즉 요청(=공준)은 잘 알려져 있는 바와 같이 다음의 다섯 명제로 이루어지고 있다.

첫째, 임의점으로부터 임의점에게로 직선을 긋는 것.

둘째, 유한의 직선을 계속해서 연장하는 것.

셋째, 임의의 중심과 거리(반지름)을 가지고 원을 그리는 것.

넷째, 모든 직각이 서로 같다는 것.

다섯째, 한 직선이 두 직선과 만나, 같은 측에서 2직각보다 작은 안각을 만들 때, 이 두 직선은 한없이 연장될 때, 2직각보다 작은 각이 있는 측에서 만난다는 것.

본래, '요청' 또는 '요구'를 뜻하는 〈아이테마타〉(*αἰτήματα*)는 토론의 과정에서 대화의 상대에게 자명(自明)의 명제로서 동의를 요청할 때 쓰인 말이다.[13] 이와는 달라서 적어도 위의 넷째 공준까지는 얼핏 보

---

tzen)도, 이러한 플라톤적 입장과 아리스토텔레스적 입장의 조정에 관해 검토하고 있다(P. Bernays, "Sur le Platonisme dans les mathematiques"(L'Enseigment mathématique 34(1935), p. 63~. G. Gentzen, "Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung" (Forschungen zur Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaft(1938년).

9) 참조; H. G. Zeuthen, "Die geometrische Construction als, 'Existenzbeweis' in der antiken Geometrie"(Mathematischen Annalen 47(1896년)), O. Becker, "Mathematischen Existenz" (Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung 8(1927년), p. 209~).

10) 기하학자는, 3각형이 무엇을 의미하는 것인가를 기정사실로 간주하고 있지만, 그럼에도 불구하고, 자기는 「3각형의 존재증명을 할 작정이다」라고 아리스토텔레스는 말하고 있다(分析論 1—10, 76a31~).

11) 프로크로스가 〈원론〉 제 1 권의 주석 속에서 구성가능성의 문제를 명백히 인정하고 있다는 점 (Proclos, "In primum Euclidis Elementorum librnm commentarii"(ed. Friedlein) p. 202)으로 미루어, 이 구성적 방법이 플라톤의 이데아론에게까지 소급시킬 수 있을 것이라는 추측도 성립할 법하다.

12) Ploclos, *ibid.*, p. 185.

13) 플라톤의 대화편('Menon', 86e3) 속에서 덕(德)을 가르칠 수 있는가 하는 문제에 대해, 소크라테스가 『그것을, 전제(前提)로부터 고찰할 것을 인정해달라』고 하고 있는 것은 그 예이다.

아 지극히 당연한 것처럼 생각된다. 도대체 이러한 직선이나 원의 구성가능성에 관해 의심을 품는 사람이 있을까. 그러나 자세히 따지면 문제는 있다. 프로크로스가 〈주석〉 속에서 이들 공준과 관련해를,

『직선은 점의 흐름이며, 직선은 똑바로 향해서 빗나가지 않는 흐름이다』[14]라고, 새삼스럽게 설명을 덧붙여 있는 것만으로도, 이것들의 자명성(自明性)이 일찍부터 논의의 대상이 되었음을 알 수 있다. 이 '점의 흐름'이라는 설명에 대해, 도대체 크기를 갖지 않는 점의 운동의 결과가 크기를 갖는 선으로 나타나는가, 아니 애당초 '운동'이라는 것이 있을 수 있는가 하는 등 말이다. 무엇보다도 운동과 존재는 모순된 것이 아닌가 하는 등 엘레아학파 이래의 심각한 반박을 예상하였음인지 프로크로스는,

『우리는 운동을 물체적인 것이 아니라 상상적인 것으로 생각하고 있는 것』[15]이라고 변명하고 있다. 프로크로스의 〈주석〉이 유클레이데스의 입장을 대변한 것으로 본다면, 〈원론〉의 다섯 공준은 운동을 부정하는 엘레아적 논리(論理)에 대해 수학의 기초를 확보하기 위해서 '요청'된 것이라고 할 수 있다. 즉, 이들 명제는 자명(自明)의 이치로서가 아니라, 우선 가정적으로 내세운 것이었다. 그러니까, 이것들은 이미 유클레이데스 이전에 엘레아학파의 영향 아래서 논증수학(論證數學)의 형성에 기여한 수학자들에 의해서 제출되었던 것으로 보아 틀림없다.[16]

(공리) —'아키시오마타'(ἀξιώματα), 또는 '코이나이·엔노이아이'(κοιναὶ ἔννοιαι, 공통개념)—에 비하여, 명백성이 덜한 공준 가운데에서도 제 5 공준은 이에 선행하는 4 개의 공준보다 내용이 훨씬 복잡할 뿐 아니라, '한없이'라는 표현이 쓰이고 있다는 점에서도 그 '자명성'(自明性)을 직관적으로 파악하기가 힘든다. '한없이' 또는 '무한'은 무한정(無限定, 아페이론(ἄπειρον)) 이며, 무한정인 것은 명확한 본성을 지니지 못한다는 이유로, 학문의 대상에서 제외시킨 무한관을 품었던 그리스인에게는 특히 제 5 공준—평행선공준—은 기하학의 기본명

14) 『임의의 점으로부터 임의의 점에게까지 직선을 그을 수 있는 가능성은 다음과 같이 해서 얻어진다. 즉, 직선은 점의 흐름이며, 직선은 똑바로 향해서 빗나가지 않는 흐름이다. 우리가 점이 같은 방향으로 최단(最短)의 운동을 한다는 것을 머리에 떠올린다면, 우리는 다른 점으로 도착할 것이다. 따라서, 첫째의 아이테마타(요청)은, 우리의 복잡한 사고과정을 겪지 않고도 만족된다. 우리는 같은 방법으로 끝이 점에 의하여 한계가 지어지고 있는 직선을 생각하여, 그 끝이 같은 방향으로 최단의 운동을 수행하는 경우를 생각하면, 두번째 요청도 쉽게 이루어진다. 그 반대로, 유계(有界)인 직선의 한 끝이 정지하고 있고, 다른 끝이 운동하는 경우를 생각하면, 세번째 요청도 마찬가지로 충족된다(Proclos, *ibid.*, p. 185).

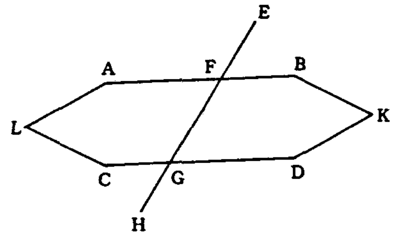
15) 『우리는 운동을 물체적인 것이 아니라, 상상적인 것으로 생각하고 있는 것이다. 우리는 부분을 갖지 않는 것이 물체적인 운동을 한다는 따위를 인정할 수 없지만, 그것은 실은 상상적인 운동을 하는 것이다. 즉 분할될 수 없는 정신(νοῦς)이—설령 장소를 옮긴다는 뜻이 아닐지언정—운동하고, 그 상상이, 그 비분할적 존재(非分割的 存在=점)에 대응해서 그 자신의 운동을 갖는 것이다』(*ibid.*).

16) 실제, 최근의 연구에 의하면, 적어도 공준 1, 2, 3이 제출된 시기를, 종래보다 훨씬 소급시켜, B.C. 5세기 쯤으로 생각하고 있다(O. Becker, "Das mathematische Denken der Antike" (1957), s. 19).

제로서 부적당하게 보였던 것이다. 평행선의 정의도 '한없이'라는 낱말을 품고 있기 때문에 같은 '결합'을 지니고 있으며, 게다가 부정적인 명제형식은 정의로서는 바람직하지 못하다. 이러한 평행선의 정의를 유한적인 내용과 긍정적인 형태를 지닌 명제로 바꿔야 할 것이 아닌가. 그리고 평행선공준은 사실은 정리가 아닐까. 만일 정리가 아니라고 한다면, 다른 더 명확하고 자명의 공준으로 바꾸어야 할 것이 아닌가. 이러한 의문은 이미 고대의 〈원론〉의 해설자들에 의하여 표명되어 있었다. 프로크로스 자신도 제 5 공준을 공준으로 인정하는데는 반대의 입장을 취했다. 이 공준의 역, 즉,

『3각형의 두 각의 합은 2직각보다 작다』(제 1 권, 정리 17)라는 명제가 증명되어 있으므로, 평행선공준 자체도 증명가능일 것이라고 생각하였기 때문이다.

실제, 프로크로스는 제 5 공준에 관한 프톨레마이오스의 '증명'[17]과 자신의 그것을 제시하였다.[18] 그에 의하면, 프톨레마이오스는 〈원론〉의 정리 29, 즉



『직선 AB와 CD가 평행이고, 이것과 만나는 직선을 FG라고 하면, $\angle AFG+\angle CGF=2\angle R$이다』를, 유클레이데스와는 달리, 평행선공준을 사용하지 않고 '증명'하여[19] 이 정리를 바탕으로 평행선공준을 증명하고 있다. 그러나 위의 정리의 증명에서 등장하는

$AF \| CG$이면, $FB \| GD$

에는,

『주어진 직선에는 임의의 한 점을 지나, 오직 1개의 평행선을 그을 수 있다』고 하는 가정이 암암리에 쓰이고 있는데, 이 가정은 여기서 증명해야 할 평행선공준과 동치(同値)인 것이다. 프로크로스 자신의 '증명'에도 이와 비슷한 모순이 내포되어 있다.[20]

그 후에도, 수학자들 사이에서 계속해서 평행선 공준의 증명 문제가 다루어졌으나,

17) T.L. Heath, "A History of Greek Mathematics," Vol. Ⅱ (1921) p. 25～297.

18) R. Bonola, "Non-Euclidean9Geometry." Dover ed.(1955) p. 4～5.

19) 프톨레마이오스의 증명(정리 29)은 다음과 같다. $\angle AFG+\angle CGF\neq 2\angle R$이라고 하면, $\angle AFG+\angle CGF>2\angle R$, 또는, $<2\angle R$이다. 만일, $2\angle R$보다 크면, 다른 측에 있는 각의 합, $\angle BFG+\angle FGD<2\angle R$이다. 그러나, $AF /\!/ CG$이면, $FB \| GD$. 따라서, $\angle AFG+\angle FGC>2\angle R$이면, $\angle BFG+\angle FGD>2\angle R$이어야 하지만, 이것은 불가능하기 때문에,

$$\angle AFG+\angle FGC \ngtr 2\angle R$$

또, 마찬가지로,

$$\angle AFG+\angle FGC \nless 2\angle R$$

따라서 $\angle AFG+\angle FGC=2\angle R$

20) 프로크로스는, 평행선공준을 증명하기 위해서, 다음 두 명제를 자명의 것으로 내세우고 있다.

『서로 만나는 두 직선 위의 두 점의 거리는, 두 직선을 충분히 연장하면, 얼마든지 크게 할 수 있다.』

『평행선 사이의 거리는 유한이다.』

그러나, 위의 첫번째의 명제는, 타원형(楕圓形)의 비유클레이데스기하학에서는 성립하지 않으며, 또 두번째의 명제는, 쌍곡선형(雙曲線形)의 비유클레이레스 기하학에서는 성립하지 않는다.

이 평행선 논쟁에 열기를 더하게 한 것은, 칸트의 공간들이었다. 그는 〈순수이성비판〉(純粹理性批判) 속에서 공간을 선험적(先險的)인 직관(直觀)에 의해 파악된다고 말하고 있다. 즉,

『기하학의 원칙은 모두(예를 들어, '3각형의 두 변의 합은 나머지 한 변보다 크다'라는 명제도 직선이나 3각형 등의 일반적 개념으로부터 이끌어지는 것이 아니고), 직관에 의해서 그것도 선험적인 직관에 의해서 얻어진 것이다.』[21]

이 '선험적인 직관' 특유의 자명성(自明性)과 확실성이 평행선공준에는 결여되어 있었다. 이 때문에, 이 공리를 다른 자명인 공리를 바탕으로 이끌어내려는 시도가 칸트 철학의 영향아래서 강하게 나타난 것이다.[22] 그렇다면, 새로운 수학으로서의 비유클레이데스기하학을 형성시킨 요인은 무엇이었을까. 물론, 논리적인 구명에 의해서만 이 새 기하학이 형성된 것이 아님은, 삿케리(G. Saccheri, 1667~1733년)나 랑벨트(H. Lambert, 1728~1777년)가 좌절하게 된 이유를 따져보면 알 수 있다.[23] 새로운 기하학은, 단순히 논리적으로 무모순(無矛循)의 체계를 세운 것만으로 이루어지지 않았으며 그에 앞서, 공간관의 근본적인 변환, 그리고, 공리(공준)이란 무엇인가에 관한 공리관(公理觀)의 변환이 필요하였다.

공적으로 인정된 것은 아니지만, 비유클레이데스기하학의 기본사상에 최초로 도달한 것은 아마 가우스였을 것이다.[24] 가우스가 비유클레이데스기하학이 성립한다는 것에 대해 확신을 갖게된 이유로, 평행선공준을 부정하여도 기하학의 체계에 아무런 모

---

21) Kant, 'Kritik der reinen Vernunft' s. 91).

22) 18세기 이후의 평행선공준에 관한 논문수는, F. Engel/P. Stäckel, "Die Theorie der Parallelinieren(1895년)의 부록의 표에 의하면, 다음과 같다.

1701~1710년	1편	1771~1780년	10편
1711~1720〃	2	1781~1790〃	20
1721~1730〃	0	1791~1800〃	22
1731~1740〃	4	1801~1810〃	29
1741~1750〃	6	1811~1820〃	37
1751~1760〃	12	1821~1830〃	41
1761~1770〃	4	1831~1840〃	35

위의 표에 의하면, 〈순수이성 비판〉이 나온 1781년 이전과 이후는, 논문편수가 2배 이상의 차이가 있다.

23) 비유클레이데스 기하학에 거의 접근하면서도 감히 이 새 기하학에 들어서는 것을 거부한 이 두 사람(삿케리와 랑벨트)의 태도 속에서 수학의 전한기에 있어서의 특유한 현상을 볼 수 있다. 그들의 좌절은, 인식론적(認識論的)인 면과 깊이 연관되어 있었던 것이다. 비유클레이데스 기하학의 확립이, 단순히 논리적 반성 이상의 것, 즉, 공간관의 변란을 요구한 것은 바로 이 때문이었다. 직각가정(直角假定)의 기하학, 유클레이데스 기하학만이 참(眞)이라고 하는 이 두 사람의 신념은, 그들의 공간론·자연철학과 깊은 연관이 있었다. 그들에게 있어서는, 공간은 시간과 함께 존재의 기본전제(本基前提)이다. 이처럼, 공간개념이 단순하면, 공간은, 오직 하나이어야 하며, 따라서, 복수의 기하학이라는 것은 있을 수 없었다.

24) 야노스·보야이의 비유클레이데스 기하학에 관한 논문("Abhundlung über imaginäre Grössen")(1837년)을 읽은 가우스는 그의 아버지에게 보낸 편지(1832년 3월 6일자) 속에서, 이 논문의 내용이, 부분적으로는, 그가 이미 30년 내지 35년 전에 행한 바가 있는 고찰과 완전히 일치한다고 쓰고 있다(Gauss, Werke Ⅷ, s. 221).

순이 일어나지 않는다는 것, 그리고 비유클레이데스적 삼각법이 무모순적(無矛循的)으로 성립한다는 것 이외에, 그 나름의 철학적(=인식론적) 고찰도 강하게 작용하였다는 것을 보아넘겨서는 않된다. 그는, 당시의 철학자들이 수학의 기초에 관해 언급하는 것에 일종의 혐오감마저 드러냈었는데,[25] 그것은, 그 자신이 기하학의 본질에 대해 깊이 사색하고 있었기 때문이다. 그가 칸트의 종합판단(綜合判斷)과 분석판단(分釋判斷)의 이론을 비판하였던[26] 것도 이 이유에서였다. 요컨데, 그가 새로운 기하학의 가능성에 관해 확신을 갖게 된 것은, 당시의 권위적인 공간이론이었던 칸트의 공간관을 극복한 결과였으며, 그것은 바로 공간에 관한 그 자신의 인식론적 성찰(認識論的省察)에서 얻은 성과였다고 보아야 한다. 그러나 유클레이데스 기하학의 권위는, 단순히 무모순의 공리체계(公理體系)를 지닌 이론이라는 이유에 의해서만 지탱되어온 것은 아니었다. 더 중요한 것은 우리의 일상세계는 물론 갈릴레이, 뉴턴 이래의 자연과학도 이 기하학을 바탕으로 삼아왔다는 사실이다. 가우스가 비유클레이데스기하학의 공표를 삼가한 것은, 종례 일반으로 통용되어온 이러한 관례적인 생활이나 사고에 위협을 주는 '기괴(奇怪)한' 이론으로, 『어리석은 자들의 요란한 아우성』[27]을 빚는 것을 두려워하였기 때문이다. 가우스의 이 조심스러운 배려에는 충분한 이유가 있었다. 그것은 무엇보다도, 비유클레이데스기하학이 직관의 세계와 모순된다는 점이었는데, 이 '직관의 세계'는 바로 칸트가 그의 공간론속에서 옹호하였던 유클레이데스기하학의 세계인 것이다. 어째든 오직 하나의 공간만을 인정한다는 칸트의 권위적인 발언[28]을 무릅쓰고, 새로운 기하학을 형성한다는 것은, 그 자체가 하나의 사상적인 도약이며, 따라서, 여기에는 논리적·형식적체계 이상의 것이 선행되어야 하였다. 가우스는 물론 철학자는 아니다. 그러나, 그가 부정적인 의미에서 진정 기하학의 기초에 관한 철학적인 견해에 관심을 나타낸 것은, 종래의 지배적인 공간론에 도전해서 그것을 극복해야 할 필요에서였으며, 이것이 새기하학의 수립자로서의 그에게 주어진 피할 수 없는 과제였던 것이다.

가우스는, 타우티누스에게 보낸 답장(1824년 11월 8일자) 속에서 다음과 같이 말하고 있다.

---

25) 가우스는 슈마허(Schumacher)에게 보낸 편지(1844년 11월 1일) 속에서 다음과 같이 쓰고 있다. 『당신이 철학을 본업으로 삼는 사람들이 사용하는 개념이나 정의에 하등의 혼란이 없는 것처럼 생각하고 있다는데 정말 놀랬다. 수학자가 아닌 철학자들은 이런 점에서 가장 많은 혼란을 빚는다』(Gauss, *ibid.*, XII, s. 62).

26) 『분석명제와 종합명제에 관한 칸트의 구별은 극히 보잘것없거나, 허구적(虛構的)인 것에 지나지 않다고 생각된다』(*ibid.*, s. 63).

27) 가우스가 벳셀(F. W. Bessel)에게 보낸 편지(1829년 1月 27일자).

28) 『공간은, 사물 일반의 관계에 관한 논증적 개념, 또는 흔히 일컬어지는 것처럼 일반적 개념이 아니고, 순수직관이다. 그것은 첫째로, 우리는 오직 하나의 공간만을 표상(表象)할 수 있기 때문이다. 우리가 많은 공간이라고 할 때, 이러한 공간은, 모두 유일한 동일의 공간의 부분을 뜻한다… 공간은, 본래 하나 밖에 없다』(Kant, *ibid.*, s. 91).

『3각형의 세 각의 합이 180°보다 작다는 가정은, 종래의(유클레이데스적인) 것과는 전혀 다른 독자의 기하학을 결과적으로 형성시키게 된다. 이 기하학은, 그 자체로서 완전히 무모순의 체계를 이루며, 거기서의 어떤 문제도, 하나의 상수를 결정할 문제를 제외하면, 풀 수 있다. 이 상수는, 선험적으로는 찾아낼 수 없다. 이 상수를 크게할수록 유클레이데스기하학에 접근시키고, 그 무한대값은 이 두 기하학을 일치하게 만든다. 이 기하학의 명제중의 어떤 부분은 역리적(逆理的)으로 보이고, 익숙하지 않는 사람에게는 전혀 터무니없이 느껴진다. 그러나, 정확히 고찰하면, 그속에서 해결되지 않은 것은 아무것도 없다. 가령, 3각형의 세개의 각은, 그 변을 충분히 크게 잡을 수 있으면 얼마든지 작아질 수 있으며, 또 3각형의 면적은 그 변이 아무리 크게 되어도 결코 일정의 한계를 벗어나지 못하고, 아니 결코 그곳에 도달하지 못한다. 이 비유클레이데스기하학속에서 모순을 끌어내려고 한 나의 온갖 노력은 헛된 것이었다. 만일 비유클레이데스기하학이 참(眞)이면, 그리고, 저 상수가 지상, 또는 우주에서 우리가 측정할 수 있는 양(量)과 어떤 관계에 있다면 그 상수는 경험적으로 발견될 것이다.』[29]

여기서 주목해야 할 것은, 부정상수(不定常數)의 결정, 그러니까, 기하학의 결정이 후천적(後天的)이라고 하는, 가우스의 경험론적(經驗論的) 주장이다. 이것은 칸트의 선험적(先險的)인 공간론과 극히 대조를 이룬다. 가우스의 경험론적인 공간론은,

『수가 우리의 정신의 산물인데 대해, 공간은, 우리의 정신의 바깥에 실재성(實在性)을 가지고 있기 때문에, 그 법칙성을 선험적으로 부여할 수 없다.』[30]

는 데에 근거를 두고 있다.

칸트가 기하학의 공리적 성격(公理的 性格), 그리고 그 공리가 종합판단(綜合判斷)임을 강조한 것은 주목할만하다.[31] 그것은 칸트의 이 주장의 기하학의 기본 문제가 단지 정의·증명 등의 논리적 방법만으로는 해결되지 않는다는 반성을 수학자들에게 촉구하였을 것이라는 점에서 말이다. 그러나, 공간은 직관에 의해서 선험적·필연적으로 파악되며, 공리(公理), 선험적인 종합적 원칙이자 필연적으로 참(眞)이어야 할 명제라고 하는 칸트의 입장에서는, 유클레이데스기하학 이외의 기하학을 받아들일 여지는 없다. 이에 비해, 가우스는 공간이 우리의 바깥에서 실재성(實在性)을 지닌 존재이고, 그 본질은 미지의 면이 많으며, 따라서, 평행선공준이 성립하는지의 여부는, 실제의 관측결과에 의해서 결정되는 문제라고 보았다. 가우스에게 있어서는, 공리란—적어도 평행선공준은— 그 참, 거짓이 직접적으로는 명백하지 않은 가설적명제(假設的命題)였던 것이다. 기하학은 물리공간에 그 바탕을 두고 있으면서, 동시에 가설적인 연역이론(演繹理論)으로서, 그것으로부터 상대적

29) Gauss, *ibid.*, Ⅷ, s. 187.
30) 1830년 4월 9일부의 벳셀에게 보낸 편지(*ibid.*, s. 201).
31) G. Martin, "Kant's Metaphysics and Theory of Science"(1955년) Chapt Ⅰ, §2.

으로 독립하고 있다는 2중성을 지니고 있다. 가우스가 기하학이 전체로서는 가설적인 연역적 체계(演繹的 體系)이다는 것까지를 파악하고 있었다고는 단정하기 어려우나 어째든, 종래 기하학으로 하여금 이데아의 세계에서 물리공간을 일방적으로 지배하도록 만든, 플라톤 이래의 합리주의의 전통을 지양하고, 공간의 경험적인 성격에 바탕을 주어, 기하학의 이론적 근거를 자연속에서 구하였던 가우스의 태도는, 비단 수학사에서 뿐만 아니라, 널리 사상사(思想史)에 있어서 획기적이었다.

로바체프스키기하학의 배경사상을 생각할 때, 여기서도 가우스의 경우와 마찬가지로, 칸트의 공간론과의 대결이 주목을 끈다. 평행선공준에 관한 '진리성(眞理性)'의 확증을 위해서는 실험만이 도움이 된다고 한 그의 말[33]은, 그가 어떤 입장에서 비유클레이데스기하학을 형성하였는가를 단적으로 보여주고 있다. 그는 기하학의 성립의 근거를 자연속에서의 운동, 더 근원적으로는, 자연이 간직하는 힘에서 찾고 있다.[34] '힘'이 기하학의 결정적인 조건이라는 로바체프스키의 사상은 다음 글에 잘 구체화 되어 있다.

『보통의 기하학에서는, 반지름 r인 구면의 면적의 크기는 $4\pi r^2$이 되기 때문에 힘은 거리의 제곱에 비례하여 감소하지 않으면 않된다. 나는 허기하학(虛幾何學, (imaginäre Geometrie)[35] =비유클레데스기하학)에서는, 구의 표면적이

$$\pi(e^r - e^{-r})^2$$

과 같음을 발견하였으나, 이러한 기하학에는 아마도 분자력(分子力)이 따르는 것으로 보인다.』[36]

로바체프스키의 이러한 발상은 공간을 선

32) 『기하학에 있어서의 평행선공준이, 오늘에 이르기까지 불완전하다는 것은 누구나 알고 있다. 유클레이데스 이래, 2천년이 흐른 사이에 베풀어진 갖은 노력이 헛된 것이었음은, 사람들이 증명하려고 한 진리가 그러한 개념 속에 없기 때문일 것이다. 그리고, 그 진리를 확증하기 위해서는, 다른 자연법칙의 경우와 마찬가지로, 실험만이, 예를 들어, 천문학적 관측이 도움이 되지 않을까 하는 의혹을 품게 되었다』("Neue Aufangrgründen der Geometrie mit einer vollstän dige Theorie der Parallelinen" (F. Engel, "Nikolaj Iwanowitch Lobailschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen(1893년) ss. 67).

33) 『자연에 있어서는, 우리는 운동 밖에 모른다. 즉, 운동없이는 감각적으로 인상받는 것은 불가능하다. 이 때문에, 다른 모든 개념, 이를테면, 기하학적 개념은 인위적으로 우리의 사고에 의해서 이루어진 것이다. 그것들은 운동의 성질에서 추출된 것이기 때문이다. 이렇듯, 공간은 그 자체만으로 우리에 대해 존재하고 있는 것은 아니다. 따라서, 자연에 있어서의 약간의 힘이 하나의 기하학에, 다른 힘이 그것의 특별한 기하학에 따르도록 했을 때, 우리의 사고에 대해 하등의 모순을 일으키지 않는다…. 힘만이 모든 것, 즉 운동·속도·시간·질량·거리, 심지어 각(角)마저도 만들어낸다는 것은 의심의 여지가 없다』(*ibiid.*, s. 76).

34) 이 새 기하학을 '허기하학'이라고 부르면, 자칫, 허구적인 내용인 것으로 오해받을까 두려워한 탓인지, 나중의 논문에서는 '범기하학(汎幾何學)(Pangeometrie)의 명칭을 쓰고 있다.

35) *Ibid.*, s. 76.

36) 로바체프스키는, 평행각 $\pi(x)$에 관해서

$$\tan\frac{1}{2}\pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}, \text{ 즉, } \pi(x) = 2\tan^{-1}e^{-\frac{x}{k}}$$

를 증명하였다(*ibid.*, s. 214). 이 식에서 k의 값 α가 정해지면 $\pi(x)$는 x의 함수이며, x가 감소할 때, $\pi(x)$는 커지고, x가 k에 비하여 극히 작으면, $\pi(x) \to 2\angle R$. 즉, 유클레이데스 기하

험적인 직관형식(直觀形式)으로 간주하는 칸트의 입장에서는 도저히 용납되지 않는 내용이다.

로바체프스키가 비유클레이데스기하학과 유클레이데스기하학의 관계를 정확히 파악하고 있었다는 것은, 다음 글이 잘 말해 준다.

『한쪽 기하학의 방정식과 또 한쪽의 그것과의 차이는, 하나의 새로운 상수에서 생기며,[37] 앞으로 이 상수는 관측에 의해 정해져야 하겠지만, 관측에서 밝혀질만한 차이가 없다는 것이 알려져 있기 때문에, 설령, 엄밀하게 따졌을 때 옳은 것은 아닐지언정, 실제의 측정에서는 모든 사람들에 의해 가정되어 있는 기하학—유클레이데스기하학—으로 충분하다. 이 사실은 그 체계가 우연히 자연속에서 발견되거나, 그렇지 않으면 자연속에서 우리에게 미치는 모든 거리가, 아직 무한이 작다는 것을 뜻한다.[38]

요컨데, 로바체프스키는 비유클레이데스기하학의 특수한 경우가 유클레이데스기하학임을 분명히 밝힌 것이다.[39] 즉, 유클레이데스기하학의 명제는 그것이 간단하고 또 우리의 경험 내용에 아주 가깝다는 것일 뿐이지, 그렇다고 이것은 유클레이데스기하학이 보편필연적(普遍必然的)이라든가, 선험적으로 참(眞)임을 입증하는 것은 아님을 분명히 하고 있다. 그런데, 여기서 무엇보다 주목해야 할 점은, 그의 기본적인 공간관에 관해서이다. 칸트에게 있어서는, 공간이란 직관의 형식이며, 따라서 기하학은 삼라만상의 물질계(物質界)와는 상관없는 선험적인 학문이어야 하였다. 그러나, 현재의 관측범위에 속하는 이른바 현상공간(現象空間)이 유클레이데스적이라 하는 것은, 우연에 지나지 않으며, 우리의 관측한계를 벗어난 우주공간이 어떤 구조를 지니고 있는가에 대해서는 선험적으로 결정할 수는 없다. 이것이 로바체프스키의 공간관이자, 기하학 사상이었다. 이러한 공간에 대한 경험론적 태도는 가우스의 사상에 놀라우리만큼 가깝다. 그것은 로바체프스키가 새로운 기하학을 창조하기 위해서는, 가우스의 경우와 마찬가지로, 치밀한 논리적 추론(論理的推論)과 아울러, 공간관의 변환, 즉 선험적인 공간론으로부터의 이탈이 불가피하였기 때문이다. 새로운 수학의 창조를 위해서 수학내의 이론 자체 뿐만 아니라, 수학의 배경적인 사상까지도 변혁되어야 한다는 것은 이 비유클레이데스기하학 형성사(形成史)에서도 물론 예외일 수는 없었다. 이렇듯, 로바체프스키하학은, 유클레이데스기하학을 특수한 경우로 포함하리만큼 광범위하였지만, 여기에도 한계는 있었다. 그가 시

학이 성립하는 세계는, 상수 k에 의하여 나타내어진 길이에 비하면, 극히 작다는 것을 알 수 있다.

37) *Ibid.*, s. 77.

38) 이 점은, 그의 〈범기하학(汎幾何學)〉(1855년)에서도 명확히 설명되어 있다("Pangeometrie," Ostwald Kl. Nr. 130, s. 31).

39) 그는 〈범기하학〉 속에서, 다음과 같이 주장하고 있다.
『(삼각형의 단각의 합이 일정하다는 가정은) 공간에 관한 우리의 개념의 필연적인 귀결은 아니다. 경험만이 이 가정의 참임을 입증한다.』("Pangeometrie," §9).

도하였던 물리학적인 경험주의와 엄격한 기하학적인 연역적 방법의 '통일'은 기실, 마이너스의 정곡률(定曲率)을 갖는 비유클레이데스기하학이라는, 한정된 형태로 실현되었을 뿐이었다.

2. 리이만기하학 성립의 배경

리이만은 수학 이외에 물리학을 깊이 연구하였으며, 철학에 대해서도 단순한 호기심 이상의 관심을 가지고 있었다.[40] 이 리이만의 학문적 성장을 위해서는, 가우스의 영향은 거의 절대적이었다.[41] 리이만이 그의 취임강연〈기하학의 기초에 관한 가설〉(Über die HypotLesen, welche der Geometriezu Grunde liegen, 1854년) 속에서 인용한 가우스의 〈곡면론(曲面論)〉은 종래의 곡면론에서는 볼 수 없는 획기적인 방법으로 곡면을 파악하고 있다. 즉, 곡면을 3차원 공간에 포함된 도형으로서 외부로부터 고찰하는 종전의 방법과는 달리 가우스는, 곡면 그 자체를 독립된 대상으로 보고, 좌표를 곡면속에서 잡는 방식을 취했다. 이 가우스의 곡면론의 특색은, 곡면을 2차원의 연속인 다양체(多樣體)로 파악하여 곡면 고유의 구조를 파악하는데에 있지만, 이것을 다차원(多次元)의 집합체에 자연스럽게 확장할 수 있다는 데에, 이 방법의 뛰어난 점을 볼 수 있다. 곡면을, 그 주위의 공관과의 관계를 일응 도외시하고, 그 자신의 내부로부터 고찰하는 방법은, 3차원 공간의 경우에 확장하였을 때, 그것을 둘러싸는 4차원 공간을 가정하지 않고도 되기 때문에 극히 편리하다. 물론, 2차원으로부터 4차원으로의 확장에는 많은 어려움이 따르게 되며, 바로 이것을 극복하였다는 데에 리이만의 뛰어난 업적이 있는 것이지만, 어쨌든 가우스의 곡면론이 리이만의 '취임강연'을 낳게하는데 중요한 구실을 한 것은 틀림없다.

수학의 배경사상이라는 면에서는, 리이만은, 그 자신이 말한대로 헬발트(J.F. Herbart, 1776~1841년)의 철학(=인식론(認識論))으로부터 강한 영향을 받았다.[42] 리이만의 헬발트 철학에 대한 관심은, 그의 형

---

40) 『내가 지금 진행시키고 있는 연구는 다음과 같다.

첫째, 대수함수·지수함수, 또는 원함수·타원함수 및 아벨함수에서 큰 효과를 거두었던 것과 같은 방법으로, 허수를 다른 초월함수론에 도입할 것.

둘째, 이것과 관련해서 편미분방정식의 적분에 관한 새로운 방법, 나는 이것을 이미 많은 물리학적 대상에 적용해서 성과를 거두었다.

셋째, 나의 주된 연구는, 열·빛·자기(磁氣) 및 전기에 관한 실험데이터를 써서, 이것들과 관련된 연구를 가능케 한 기지(旣知)의 자연법칙의 새로운 파악에 관해서이다. 이에 관해서는 주로 뉴턴이나 오일러의 저작의 연구, 그리고 한편에서는 헬발트(J.F. Herbart)의 연구가 도움이 된다. 헬발트의 초기의 연구에는 거의 전적으로 따를 수 있었으나, 그의 후기의 사색의 진행에 관해서는, 본질적인 점에서 견해를 달리할 수밖에 없었다. 즉, 그의 자연철학 및 자연철학과 심리학의 결합에 관한 심리학의 명제들에 대해서는 견해차가 생긴다』("B. Riemanns Gesemmelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,"(Hrsg. von H. Weber/R. Dedekind, 2 Aufl. (1892년) s. 507~508.

41) 리이만이 '취임강연'에서 이용한 것으로는, 가우스의 쌍2차잉여(雙2次剩餘)에 관한 논문(1831년)·〈기념논문〉(1849년)·〈곡면론〉(1827년) 등이 있다고 그 스스로 말하고 있다(*ibid.*, s. 273).

42) 이 사실에 관해서는, 위의 주 '40' 이외의 곳에서도 리이만은 설명하고 있다(*ibi.*, s. 273, s. 276).

이상학(形而上學)이 아니고, 경험적 개념의 고찰에 관한 부분에 대해서였다.[43] 헬발트에 의하면, 공간은 일정한 경험적인 질서체계이지만, 칸트의 주장과는 달리 공간적 질서(空間的 秩序)를 규정하는 것은 주관이 아니라 경험 자신이다. 리이만은 헬발트의 이러한—형이상학 이전의—실재론적(實在論的)[44] 입장에 서서, 칸트의 선험주의(先險主義)를 비판하였다. 그것은 새로운 수학을 형성하기 위해서는, 칸트의 선험주의적 입장, 즉, '세계파악'(世異把握, Weltauffassung)에 도움이 되는 개념이, 인간정신의 특별한 선험적 성질에서 비롯된다는 주장과 결별할 필요가 있었기 때문이다.[45] 리이만이 헬발트와 다른 것은, 후자가 '사물'과 '변화' 사이의 모순을 철학자답게 형이상학적으로 해결하려고 하였던데 대해, 전자 즉, 리이만은 그 해결을 '연속적 변화와 인과성(因果性)의 개념'을 통해, 현실세계에서 합리적으로 구하려고 한 점이다. 실재(實在)—즉, '그 자신으로서 이루어지는 것'[46]—은, 될 수 있는대로 자신을 유지하려고 하기 때문에, 비약적이 아니라 연속적으로 변화하게 되며, 또 그 '것'은 다른 요인이 덧붙여지지 않는 한, 그 상태를 유지하는 것이므로, 이 변화에는 원인이 필요하다는 것이다 특히, 이 '연속적 변화'—또는 '연속'—에 리이만은 중요한 의미를 부여하였다. 이 생각은 리이만기하학의 기본개념인 〈일반연속다양체〉(一般連續多樣體)의 인식론적인 바탕을 이루고 있다. 즉, 이 사상에 의해서 기하학은, '공간'의 이론으로부터 연속다양체(連續多樣體)의 이론으로 그 영역을 확대하게 된 것이다.

리이만의 '취임강연'의 주목표는, 한마디로 가우스의 〈곡면론〉, 즉, '곡면상의 기하학'의 n차원에게로의 확장이었다. 이 기하학(=〈리이만기하학〉)은, 나중에 〈리이만공간〉, 또는 〈리이만다양체〉로 불리어지게 된 공간의 기하학이며, 리이만공간은, '리이만계량'(計量), 즉, 선소(線素) ds에 관해서,

---

헬발트는, 1809년, 케니흐스버그 대학의 초청에 의해 명예로운 칸트의 강좌를 인계받았다. 그의 연구는 철학, 심리학, 교육학에 걸쳤으나, 오늘날 교육학자로서 많이 알려져 있다. 그의 철학의 주제는 칸트와 마찬가지로 경험에서 출발하여, 그것을 비판하는 데에 있었다. 그에 의하면, 인간에게 있어서 확실성을 뒷받침해주는 것은, 경험 외에는 없기 때문에 철학의 기초와 출발점은 경험적 지식에 두어야 한다는 것이다.

43) 참조 : Herbert, "Sämitliche Werke"(1802년) Hrsg. von Hartenstein, Bd. XII, s. 58~59. Herbert, "Allgemeine Metaphysik" II, Teil(1829년)(*op. cit.*, Bd. VIII).

44) 실재론(實在論, realism)은, 중세에는 유명론(唯名論, nominalism)과 대립하는 의미로 쓰여졌으나, 근대에는 전혀 반대의 뜻을 지니게 되어, 사물이 의식주관(意識主觀)과는 따로 독립해서 존재한다는 생각을 가리키게 되었다. 여기서는 물론, 후자의 뜻으로 사용하고 있다.

45) 『그런데, 헬발트에 의하여 다음 사실이 증면된 것이다. 즉, 세계파악에 도움이 되는 여러 개념도 모름지기 언어와 함께 우리에게 전해지는 것이며, 그것들의 성립은, 역사적으로나 우리 자신의 발전과정에서도 포착할 수는 없으나, 이들 개념은 모두 감각적 표상(感覺的 表象)의 단순한 결합형식 이상의 것일 바에는 이 원천(감각적 표상)으로부터 이끌어낼 수 있으며, 따라서 모든 경험에 선행하는 인간정신의 특별한 성질로부터 유도되어야 할 필요는 없다. 이들 개념의 원천이 감각적 지각에 의해서 주어지는 것 속에 있다는 이 증명은 우리에게 중요하다. 왜냐하면 이것에 의해서만 이들 개념의 의미가, 자연과학에 있어서 만족할만한 방식으로 확립될 수 있기 때문이다』(H. Weber/R. Dedekind, *ibid.*, s. 522).

46) *Ibid.*

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i\, dx_j$$ [47]

로 나타내어지는 다양체이다. 즉 2차의 미분형식(微分形式)의 제곱근을 길이로 삼는 선소(線素)가 불변이라 하고, 이것을 기준으로 계량이 규정되는 n차원의 연속다양체의 이론이 곧 리이만기하학인 것이다. 리이만은 다차원(多次元)의 연속다양체를 형성하는 방법을 설명하기에 앞서 먼저 이산(離散, diskret)인 다양체와 연속인 다양체를 이렇게 구별한다.

『양(量)의 개념이 가능하기 위해서는, 어떤 일반개념이 있어서, 이것을 규정하는 방식이 여러가지 있어야 한다. 그 중 어떤 규정방식(Bestimmungsweise)으로부터 다른 규정방식으로 옮길 수 있는지 어떤지에 따라 연속인 또는 이산인 다양체를 형성한다.』[48] 여기서 얻은 연속다양체가 1차원 연속다양체이다. 이 1차원 다양체가 다른 1차원 다양체에게도 어떤 일정한 방식으로 옮긴다고 하면, 즉 한 다양체의 모든 점이, 다른 다양체내의 정해진 점에게로 각각 옮긴다고 생각하면, 이렇게 해서 얻은 '규정방식' 전체는, 2차원의 연속 다양체를 만들고, 또 이 절차를 되풀이 하면 임의의 높은 차원의 다양체가 형성된다.[49]

리이만은 공간의 구조를 곡률(曲率)에 의해서 결정할 때, 먼저 곡률이 위치함수(位置函數)[50]로서 가변(可變)인 다양체를 생각하여, 그에 이어, 정곡률(定曲率)의 다양체에 주목하였다 .다양체의 계량관계는, 곡률에 의해서 결정된다. 따라서 정곡률의 다양체[51]에서는, 모든 점에 있어서의 계량관계가 동일한 구조를 지니기 때문에, 도형을 임의의 위치로 옮길 수 있다. 2차원의 정곡률의 다양체(=곡면)에서는, 이 안에 있는 면분(面分)은 신축(伸縮)하는 일이 없이 움직일 수 있으며, 양(+)의 정곡률의 곡면에서는 굴곡(屈曲)이 없이 움직인다. 따라서 이러한 곡면은 구면으로 고쳐 나타낼 수 있다. 그러나, 음(−)의 정곡률 곡면에서는 이것은 불가능하다. 또 곡률이 0인 곡면에서는, 그 속의 면분은 위치와 방향에 상관없이 항상 일정하지만, 이것은 다른 곡면에서는 성립하지 않는다. 리이만은 이와 같이

47) 유클레이데스 공간에서 점의 위치를 직교좌표로 나타내면, g는 모두 0, 또는 1이 되어

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+\cdots\cdots+dx_n^n$$

이다. 이것은 물론, 피타고라스의 정리이기 때문에, 본문의 미분형식은 이 정리의 확장으로 간주할 수 있다.

48) *ibid.*, s. 275.

49) 여기서 주목해야 할 것은, 다양체 그 자체가, 따라서 그 특수한 경우로서의 공간 자체도 동적으로 구성되어 있다는 점이다. 이러한 동적·계열적 사고에서는 헬발트의 영향을 엿볼 수 있다.

50) 예를 들어, 1차원 다양체의 가변적인 부분(=곡선)은, 그 다양체의 각 점에 대하여 각각 한 값을 지니고 있다. 그 점이 연속적으로 변할 때, 이 가변적 부분의 값도 연속적으로 변한다고 하면 이것은 곧, 주어진 다양체내에서 한 점을 중심으로 하여 하나의 연속인 위치함수(位置函數)를 생각하는 것이 된다.

51) 정곡률을 α라고 할 때, 선소(線素) ds는,

$$ds=\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

이다.

곡률이 0인가, 모든 0이 아닌 정곡률인가에 따라, 공간을 분류하였는데, 그 정곡률이 0인지 아닌지를 결정하는 것은, 경험에 의하지 않으면 않된다.

거듭 말하지만, 리이만의 '취임강연'의 내용은, 2차의 미분형식의 제곱근으로 나타내어진 선소(線素)를 계량의 기준으로 삼는, 다차원(多次元)의 연속다양체의 이론—즉, 〈리이만기하학〉—인데, 여기서 선소는 좌표변환이나 이동에 대해서 불변이라는 것이 가정되어 있다. 이 불변성(不變性)에 의해서, 한 점에 있어서의 국소적(局所的)인 좌표계와, 그 근방에서의 그 점과의 연관이 주어지고, 이것을 매개로 하여 다양체 전체에서의 계량관계가 이루어진다. 그의 이러한 연속다양체의 계량이론(計量理論)이 아인슈타인의 일반상대성이론(一般相對性理論)의 수학적인 바탕이 된 것이다.[52]

공간론에 있어서의 리이만의 중요한 업적의 하나는, 공간을 연속다양체의 특수한 경우로 파악하여, 그 구조를 구명한 것인데, 이것이 성과를 올리기 위해서는, 추상화·구체화라는 방법이 필요하였다. 추상화의 면에서는, 곡면을 대표하는 여러 2차원 연속다양체 및 유클레이데스공간이 대표하는 여러 3차원 연수체 뿐만 아니라, 해석학에서는, 더 고차의 연속다양체가 나타나 있기 때문에, 차원을 한정시키지 않는 일반의 n 차원 연속다양체를 생각하게 되었으며, 또, 다양체 중에서도 이러한 계량적인 다양체 외에 비계량적인 다양체--예를 들어 사영공간, 리이만면(面) 등—또는 계량관계가 분명치 않은 다양체 등이 있어서 이것들을 통합적으로 다루기 위해서 계량성을 버리고, '연장성'(延長性)이라는 위상적(位相的) 성질만을 남게 하므로서, 극히 일반적인 연속다양체의 개념이 형성되었다.[53] 역으로, 구체화의 과정은 다음과 같이 이루어진다. 먼저 다양체에 이산적(離散的)인 것과 연속적인 것의 두 가지가 있다는 점에 주목하여, 그 중에서 연속적—즉, 위상적—다양체에 계량(計量)을 부여한다. 이 연속다양체에는 여러 계량관계가 있을 수 있지만, 곡선의 길이나 선소(線素)의 길이의 불변성 그리고, 선소(線素)의 표시—2차 미분형식의 제곱근—등을 가정하여, 이것들을 전제로, n차원 다양체에 일종의 계량관계를 수립한다. 리이만기하학은 바로 이에 관한 이론인 바, 다양체를 이런 형태의 것으로 한

52) 물론 리이만이 제시한 '기하학'은 정곡률의 기하학이며, 가변적(可變的)인 곡률을 갖는 일반상대성이론의 4차원공간의 기하학과는 달랐다. 리이만으로부터 아인슈타인에게로 넘어가기 위해서는 우선 수학적인 면에서는 리이만 기하학의 계량의 기본형식인 2차미분형식의 변환의 이론이 텐서해석(tensor analysis)으로서 발전해야 한다. 그러나, 상대성이론의 수학적 기초의 본질적 부분은 리이만의 이론 속에 충분히 내포되어 있다.

53) 연속다양체의 개념이 중요시하게 된 현실적인 이유로 수학, 물리학의 발전이 있었다는 사실을 보아넘길 수 없다. 역학(力學)이 질점(質點)이자 강체(剛體)의 역학으로 머물러 있을 때에는 상미분방정식만이 쓰이지만, 파동·유체(流體)·포텐셜 등이 수학적으로 다루어지고, 변분학(變分學)이 발전하게 됨에 따라서 편미분방정식이 등장한다. 그런데, 이 미분방정식에서는 다변수함수에 포함된 많은 변수 사이의 연관이 문제가 되기 때문에 여기서 필연적으로 다차원 연속다양체의 개념을 다루지 않을 수 없게 된다.

정시킨 것은, '공간'의 특수화를 위해서였다. 그런데 계량관계를 설정하는 데에는 여러가지 가능성이 있기 때문에 이 한정은 가정적(假定的)인 것이어야 한다. 이와 같이 「추상⇄구체」의 과정을 겪으므로서, 우리의 '공간' 즉, 현상공간(現象空間)을 다른 다양체들과 구별짓는 그 특수성을 명확히 파악할 수 있게 된다.

리이만이 그의 '취임강연'의 제목에 '공리'(또는 '공준')이 아니고, '가설(假設)'이라는 표현을 사용한 이유는 이제 분명해졌다. 그리고 그가 강연의 서론속에서 유클레이데스기하학의 기초가 가설적인 것이라고 주장하고 있는[54] 이유도 말이다. 실재 그 자신도 '공간'의 구조에 관한 공리를 가설적으로 제시하고 있다. 즉,

Ⅰ. 모든 점에 있어서 세 면소(面素)의방향에서의 곡률은 0이다. 따라서, 3각형의 안각의 합이 어디서나 그 직각과 같으면, 공간의 계량관계는 결정된다.

Ⅱ. 유클레이데스와 같이 단지, 곡선이 위치에 상관없이 존재한다고 가정할 뿐만 아니라, 입체도 위치와 관계없이 존재한다고 가정하면, 곡률은 모든 점에서 일정하게 되고, 게다가 한 3각형의 안각의 합이 정해지면, 다른 모든 3각형의 안각의 합도 정해진다. 이것은, 정곡률(定曲率)의 공간이다.

Ⅲ. 곡선의 길이는 위치와 방향과 상관이 없다고 하는 대신에, 곡선의 길이와 방향이 위치와는 상관이 없다고 가정한다.[55]

위의 Ⅰ이 필연적인 것이 아니고, 경험에 바탕을 둔 가설임은 3차원 이상의 연속다양체의 존재에 의해서 명백하며, Ⅱ에 관해서는, 이 공리가 성립하지 않는, 음의 곡률을 가진 공간의 가능성에 의해서, 그리고, Ⅲ에 관해서는, 이것이 성립하지 않는 양 또는 음의 정곡률의 공간의 가능성에 의해서 분명하다. 요컨데, 위의 공리는 모두 경험적 사실의 뒷받침을 받고 있는 가설인 것이다. 뿐만 아니라, 유클레이데스의 공리계에 비하여 훨씬 더 근본적이고 보편적인 명제들,[56] 그리고 이들 명제를 바탕으로 하여 성립하는 리이만기하학 전체가 하나의 가설적·연역적 체계인 것이다. 이처럼 리이만이 공리는 가설이며, 따라서 기하학은 가설적인 연역체계(演繹體系)라는 결론에 도달할 수 있었던 것은, 그가 공간의 이해에 대해서 경험론적(經驗論的) 태도를 취하였을 뿐만 아니라, 수학·물리학상의 연구를 통하여 여러가지 중요한 다양체가 존재하고, '공간'은 그 일종에 지나지 않는다는 사실을 인식하게 되었기 때문이다. 가우스로부터 비롯된 경험과·구체화와 가설화(假說

54) 『유클레이데스가 기초로 삼았던 이들 사실은 모든 사실과 마찬가지로 필연적인 것이 아니고, 다만 경험적으로 확실할 뿐이며, 따라서 그것들은 가설이다. 그러므로, 이러한 개연성(蓋然性)—이것은 관측의 범위 내에서는 분명히 크지만—을 연구한 다음에야 관측의 한계를 넘어서 불가측(不可測)의 큰 방향에도, 또 작은 방향에도 이것들을 확장할 수 있는지 어떤지를 판단할 수 있는 것이다』(H. Weber/R. Dedekind, *ibid.*, s. 272~273).

55) H. Weber/R. Dedekind, *ibid.*, s. 281.

56) 이를테면, 『곡선의 길이는 위치와는 상관이 없다』, 『선소(線素)의 길이는, 2차의 무한소를 무시하면 무한소의 변위(變位)에 대해서 불변이다』, 『선소의 제곱은 2차의 미분형식으로 나타낼 수 있다』는 등이다.

化)·추상화의 통일은 다른 누구보다도 리이만에게서 또렷한 형태로 나타났다. 그러나 이러한 기하학 내부의 변화에 머물지 않고, 널리 사상의 세계에 새로운 변혁을 안기게 하였다는 점에, 비유클레이데스기하학과 리이만기하학의 의의가 있다. 즉, 이 새 기하학은 좌표기하학이나 사영기하학의 발견과는 달리 비단, 수학세계 내에서의 사건으로 그치지 않고, 공간개념의 변혁이라는 철학상의 전환기를 빚게 한 것이다.

3. 추상공간(抽象空間)의 형성

오늘날, 수학적으로 '공간'은 가장 넓은 의미로 집합을 뜻한다. 집합을 '공간'이라고 부를 때, 그 원소는 '점'이라고 한다. 예를 들어, 구간 $[a,b]$를 '공간' 그리고 이 구간내의 각 실수를 '점'으로 부를 수도 있으며, 또는 $[a,b]$에서 정의된, 실수값을 취하는 함수전체의 집합을 '공간' 그리고 이들 각 함수를 '점'이라고 불러도 된다. 이 구간내의 함수 전체가 아니라 그 중 연속함수의 집합만을 생각하여 '공간'으로 삼아도 되고, 실수 전체를 그렇게 불러도 좋다. 이렇게, 집합을 '공간'이라고 부르게되면, 혼란을 피하기 위해서, 그때마다 어떤 '공간'에 관해 생각하고 있는가를 분명히 해둘 필요가 있다. 그리고 한꺼번에 복수의 '공간'을 다룰 때에는 각 '공간'에 다른 명칭을 붙여서 구별해야 한다. 가령, '공간' $[0,1]$을 I라고 이름짓고, I에 있어서의 실수값 함수(實數值函數) 전체의 '공간'을 F(I), 그리고 이 중 연속함수 전체로 된 공간을 C(I)와 같이 나타내는 따위로 말이다. 또, 실수 전체로 된 공간은 R로 나타내고, 이것을 특히 '실수공간'(實數空間)이라고 부르기로 한다. 이 경우에, 위에서처럼 F(R), C(R)을 정의할 수 있다. 그러니까,

F(I), C(I), F(R), C(R)

등은 모두 함수를 그 원소를 갖는 '공간', 즉 '함수공간'(函數空間)의 예이다. 그러나 '공간'이 단지 집합을 바꾸어 부른데 지나지 않는다면, 별로 의미가 없다. 따라서 '공간'에 현상공간과 엇비슷한 해석(解釋, interpretation)을 덧붙일 수 있도록 성격을 규정해야 한다. 이것이 공리주의(公理主義)의 방법이다.

19세기의 수학, 특히 중엽까지의 그것은, 다분히 직관적이어서 기하학적인 형상(形象)에 의지하였었다. 추상적인 면이 강한 함수(函數)의 개념에 관해서도 '그래프'로 불리어지는 곡선 또는 곡면이 그 이해를 용이하게 만든 것 따위가 그 예이다. 그러나, 집합론의 형성이래, 여러 가지 집합이 수학에서 다루어지게 된 결과, 적극적인 의미에서 집합의 '공간'화가 절실해졌다. 그것은 집합 중에서도 무한집합은 원소의 갯수를 샅샅이 살피는 따위의 유한적인 파악이 불가능하기 때문에 수학적인 이해를 보다 용이하게 만들기 위해서는, 이러한 집합에 기하학적인 형태를 부여할 필요가 있었기 때문이다. 이 요구에 호응해서 프레셰(M. Fréchet)에 의해 도입되 '추상공간'(抽象公間)은, 수학연구를 비약적으로 촉진시켰다.

프레셰의 논문 〈와이엘슈트라스의 한 정리의 일반화〉(Généralization d'un théorèm de Weierstrass, 1904년)은, 와이엘슈트라

스의 정리인

『폐구간 〔a, b〕에서 연속인 1가 실함수(1假實函數) F(x)는, 〔a, b〕의 한 점에서 최대값(또는 최소값)을 취한다』

를 확대한 다음 정리의 증명이었다.

『콤팩트의 집합에서 정의된 일의적(一意的)이고 연속인 범함수(汎函數)는 유계(有界)이며, 그 정의구역(定義區域)의 적어도 한 원소에 대한 상한(上限)에 도달한다.』

위의 정리의 증명은 프레셰의 'L공간'[57]·콤팩트집합·범함수(汎函數)의 연속 등의 개념을 도입하여 범함수의 정의구역을 추상공간으로서 파악하여, 연속함수의 상한(上限)에 관한 와이엘슈트라스의 정리를, 범함수의 경우에까지 확장한 것이었다. 그는 1906년의 학위논문[58] 속에서 추상공간론을 전개하였는데, 여기서 도입된 공간으로는, 위에서 말한 'L공간' 이외에 'E공간' 'V공간' 등이 있다. 'E공간'은 〈거리공간(距離公間)〉이라고 보통 부르고 있는데, 그것은, 우리가 흔히 쓰는 거리의 개념을 추상화한 것이기 때문이다. 프레셰는 이처럼 '거리'에 관한 정의를 통해, 추상공간에 관한 연구를 한층 발전시켰다. 다른 한편, 그는,

'연속함수의 집합으로 이루어지는 함수공간', '해석함수(解析函數)의 집합으로 이루어지는 함수공간'

등의 정의, 또,

'거리', '근방', '집적점(集積點)', '응집점(凝集點)', '개집합', '폐집합', '콤팩트집합', '가분성(可分性)'

등의 개념을 도입하여 추상공간의 기하학적 구조(幾何學的構造)를 따졌다.[59]

위의 개념들은 모두, 오늘날 위상수학(位相數學)에서 쓰이고 있는 용어들인데, 이것이 또 현대수학의 입장에서 리이만공간(또는, 리이만다양체(多樣體))를 어떻게 정의하는가에 관한 설명에도 필요한 것이다.

일반적인 위상의 이론은, 칸톨의 실수집합에서의 위상의 이론(=點集合論)에서 비롯된다. 따라서 위상에 관한 많은 기본적 개념은 칸톨에 의해 제시된 것이다. 그 후 공리계(公理系)에 바탕을 둔 위상의 정의가 프레셰의 수렴공간(收斂空間)·거리공간의 이론(1906년), 리이쓰(F. Riesz)의 집적점(集積點)·도집합(導集合)에 의한 이론(1909년), 하우스돌프(F. Hausdorf)의 근방공간(近傍空間)의 이론등에 의하여 이루어졌다. 위상공간은, 보통, 하우스돌프의 방법을 따라 다음 세 조건을 만족하는 집합 X로서 정의 된다.

즉, X의 각 원소 p에 대하여 'p의 근방' 이라고 불리어지는 X의 부분집합 $\{u_{(p)}\}$가 정의되고,

i. p의 근방 $u_{(p)}$는 반드시 p를 포함한다.

---

57) 집합 E에서 E의 원소의 열 $\{a_n\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 중에서 극한원소를 갖는 것이 다음 조건, 즉,
(1) $a_n=a$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$일 때, $\{a_n\}$은 극한원소 a를 갖는다.
(2) '$\{a_n\}$이 극한원소 a를 가질 때, 그 임의의 무한부분열 $\{a_{pn}\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$은 극한원소 a를 갖는다'를 만족할 때, E를 'L공간'이라고 한다.

58) "Sur quelque paints du calcul fonctionnel," Pendi. Mat. Palermo 22(1906), 1—74.

59) 참조 : M. Fréchet, "Les espaceo abstraits et leur théorie considerée commeintroduction à l'analyse ginèrale,"(1928, Paris).

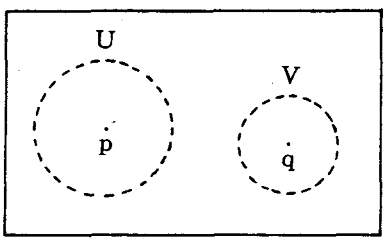
ii. p의 두 근방 u_1, u_2에 대해서, $u_1 \cap u_2$에 포함되는 p의 근방 u_3이 존재한다.

iii. p의 근방 u_p에 포함되는 임의의 원소 q에 대해서 $u_{(p)}$에 포함되는 q의 근방 u_q가 존재한다.

이 때, 집합 X의 '점'(=원소) p의 근방 u_p의 전체를 p의 기본근방계(基本近傍系)라 부르고, 집합 X에는 〈근방계〉에 의하여 위상이 정의되었다고 한다. 예를 들어, 실수전체의 집합 R에서, 각점 p에 대하여 그 점을 포함하는 구간(a,b)를 p의 근방이라고 정의하면 위의 세 조건을 만족한다. 거리공간은 위상공간이다. 왜냐하면, p를 거리공간 S의 한 점, ε을 임의의 양수라고 할 때, $(p,q)>\varepsilon$을 만족하는 S의 점 q의 집합을 'p의 ε근방' $u_{(p,\varepsilon)}$이라고 부르기로 한다면, 이러한 '근방'으로 이루어진 근방계(近傍系)는, 하우스돌프의 조건 i, ii, iii을 만족하기 때문이다.

하우스돌프가 〈집합론의 기초〉(Grundlage der Mengenlehre, 1914년)에서 위상공간을 정의할 때에는, 위의 i, ii, iii 외에,

iv. p, q가 서로 다른 점일 때, p의 근방 $u_{(p)}$와 q의 근방 $u_{(q)}$중에, 서로 공통점을 갖지 않는 것이 존재한다.



라는 조건을 덧붙였다. 이 공리 iv는 점과 점 사이가 너무 '밀착'하는 것을 막는 것이기 때문에 '분리공리(分離公理)'이라고 불리어진다. 이 분리공리를 만족하는 위상공간을 특히, '하우스돌프공간'이라고 한다. n차원 유클레이데스공간은 보통의 의미의 거리공간이며, 따라서 하우스돌프공간이다. 또 하우스돌프공간의 부분공간은 역시 하우스돌프공간임이 명백하므로 유클레이데스공간의 부분공간으로서 얻어지는 여러 위상공간은 모두 하우스돌프공간이다.

위상공간의 정의와 관련해서 해석학을 위상적 방법에 의하여 연구하는 위상해석(位相解析)에서 중요한 구실을 하는 '위상벡터공간'·'바나흐공간'·'힐버트공간'등은 모두 위상공간의 일종이며, 개념의 외연성(外延性)이라는 점에서 따지면,

$$\text{위상공간} \supset \text{위상벡터공간} \supset \text{바나흐공간} \supset \text{힐버트공간}$$

이라는 관계가 있다.

여기서 다시 거리공간의 문제로 되돌아가 보자. 앞에서 살펴본 바와 같이 집합론이나 위상적방법의 발전에 따라 해석학에 있어서도 함수 자체를 집합 —즉, 함수공간—으로 생각하여, 이것에 '거리'를 정의하여 여러가지 수렴(收斂)을 다룬 것이 프레셰, 리이쓰(F. Riesz, 1880~1956년)등의 연구였다.

일반으로 두 공간—즉, 집합— S, S'가 있을 때, S로부터 S'에게로의 함수 C(=사상(寫像)) 전체의 집합을 F(S,S'), 즉,

$$F(I,R)=F(I), \quad F(R,R)=F(R)$$

와 같이 나타내기로 한다면, S,S'가 지닌 성질에 따라서, F(S,S')의 원소 f에도 여러가지 조건이 덧붙여진다. 이를테면, S,S'

가 위상공간이면, f가 연속이라는 등 말이다. 이 때, S로부터 S′에게로의 연속사상(連續寫像) 전체의 집합을 C(S, S′)로 나타내기로 하자. 즉,

$$C(I, R)=C(I),\ C(R, R)=C(R)$$

과 같이 나타내기로 하자. 또 S, S′가 C^∞공간[60]이 , f가 C^r함수—즉, r번 연속적미분가능인 함수—이거나, C^∞함수이라는 것은 의미가 있다. 이러한, S로부터 S′에게로의 함수 전체의 집합을, 각각

$$C^r(S, S'),\ C^\infty(S, S')$$

로 한다면, S, S′가 해석공간(解析空間)[61] 일 때, S로부터 S′에게로의 해석함수(解析函數) 전체의 집합 A(S, S′)가 정의된다. 이 때, 명백히

$$F(S, S')\supset C(S, S')\supset C^1(S, S')\supset\cdots$$
$$\supset C^\infty(S, S')\supset A(S, S')$$

가 성립한다. 이러한, F(S, S′), 또는 그 부분집합을 일반으로 S로부터 S′에게로의 함수공간(函數空間)이라고 한다. 함수공간의 개념은 이처럼 광범하지만, '집합'을 '공간'으로 바꾸어 부르는데에는, 어떤 의미로 현상공간에 가까운 '공간다운' 성질이며 구조를 지니도록 하고, 기하학적인 취급이 가능해야 한다. 이 때 비로소 함수공간은, 공간으로서의 의의를 지니게 된다. 프레셰의 추상공간의 정의는 기술적(記述的)이자 구성적(構成的)이었다는 점에서도[62] 확실히 뛰어났다.

해석공간(解析空間)은 물론, C^∞공간이자 C^r공간이며, 다양체이다. (그러나 그 역은 일반으로 성립하지 않는다.) 예를 들면, 구면은 해석공간이기 때문에, C^r공간으로서 구조를 지니고 있다.

C^r공간이 이제 정의되었으므로, 〈리이만공간〉의 정의를 내리기는 쉽다. 즉, M이 n차원의 C^1공간일 때, M으로 부터 실수공간 R에게로의 $n(n+1)/2$개의 연속함수 $g_{ij}(x)$ $(1\leq i\leq j\leq n)$ 이 정의되고, 또,

$$g_{ji}(x)=g_{ij}(x)$$

와 같이 놓을 때, 대칭행렬(對稱行列)$(g_{ij}(x))$가, 모든 x에 관해서 항상, 양 값 2차 형식(正値 2次 形式)의 행렬로 나타난다고 하면, 이 때, 리이만공간이 주어졌다고 한다.

추상적요소를 대상으로 하는 이론의 전개가 가능하다 하더라도, 이러한 이론이 과연 얼마만큼의 쓸모가 있는가 하는 의문이 남게 될지도 모른다. 그러나 비록 추상적 요소가 어떤 종류의 것인지에 관해서는 전혀 도외시 되고는 있으나 필요에 따라서는 더 구체적인 의미를 이것에 부여해서 해석(解釋, interpretation) 할 수 있는 짜임새가 이론속에 구조적으로 갖추어져 있다는 것에

---

60) 일반으로 n차원 다양체 M에서 변환함수(變換函數)가 모두 r번 연속적 미분가능(連續的 微分可能)일 때, M을 C^r 다양체(또는, C^r 공간), 임의로 몇번이고 미분가능일 때, M을 C^∞ 다양체(또는, C^∞ 공간)라고 한다.

61) 위의 주(註)에서 변환함수가 해석함수(解析函數)일 때, M을 해석적 다양체(解析的 多樣體), 또는 해석공간(解析空間)이라고 한다.

62) $a, b\in E$에 대해서 조건 i, ii, iii을 만족하는 $(a, b)\geq 0$을 '거리'로 정하는 것은 기술적(記述的) 정의이고, 가령 연속함수의 집합 C에 대하여, $y_1(x)$, $y_2(x)\in C$의 거리로서, $\mathrm{Min}|y_1(x)-y_2(x)|$를 취하는 것은 구성적(構成的)인 정의이다.

유의할 필요가 있다. 그 한 예로, 추상적 집합의 원소를 이를테면, 사람이나 사과등과 바꿔놓는다 하여도, 그것들은 여전히 가치를 잃지 않는다. 추상공간이나 추상적 함수의 이론이 수학의 온갖 분야에 걸쳐, 널리 쓰이고 있는 것은 이러한 사실에 근거를 두고 있기 때문이다.

맺는 말

—공간관과 기하학—

원초적인 소박한 세계관에 있어서는 공간적인 것은 현실적인 것의 일반의 원형이었다. 이러한 세계이해의 태도에 비친 '세계'란, 곧, 공간적 우주(空間的宇宙) 그것이었다. 따라서 여기서는 공간 자체가 세계 전체를 포괄하는 원리를 뜻하게 된다. 모든 존재자(存在者)를 공간적으로 파악한다는 점에서는 그리스철학도 마찬가지였다. 게다가 그리스인에게 있어서는 현실의 존재자 뿐만아니라, 그 가치나 미(美), 리즘이나 조화까지가 공간적·유형적(有形的)인 것—이를테면, 조각적인 형태나 균형—과 밀접하게 라기보다 본질적으로 결부되어 있었다. 한편, 공간은 무형이자 실체(實體)가 없는 불가사의한 것이며, 따라서 두려운 대상으로 여겨졌기 때문에 형체와 내용을 갖춘 사물과 비교할 때, 이러한 공간은 가치적인 면에서 '비존재'(非存在)로 간주되었다. 그러나 유의해야 할 것은 고대에는 정신·물질의 2원적인 분리는 아직 이루어지지 안했다는 사실이다. 플라톤이나 아낙사고라스 뿐만 아니라, 일반으로 그리스인이 생각하는 '정신'적인 것—그것은 원래 객관적인 존재원리나 우주의 형성력(形成力)으로 여겨진 것이지만—에는 늘 공간적인 요소가 결부되어 있었다. 그리스를 포함한 고대인의 입장에서는 정신으로부터 공간적·우주적인 것으로 옮기는데에 하등의 저항을 느끼지 안했다.

그러나 그리스도교적 세계관은 전에 볼 수 없는 새로운 상황을 창출(創出)하였다. 여기서는 중심적이고 포괄적인 실재(實在)는 이제 공간적으로 뻗은 세계체계도 그 원리도 아니다. 오히려 '세계'는 정신적인 것의 총체를 뜻한다. '정신적인 것'으로 이루어진 이 세계에 견주어 볼 때, 공간적·우주적인 것, 그리고 이러한 경향을 지닌 것들은 모두 비현실적인 것이었다. 따지고 보면, 원초적인 세계이해 뿐만 아니라, 과학적 탐구의 대상으로서도 공간은 항상 모든 것을 포괄하는 원리이자 현실적인 것의 기저를 이룬다. 심지어, 최고의 사변(思辯)조차도 언어나 도식을 사용하는 경우에는 공간적인 관계와 형상(形象)의 명석성을 바탕으로 삼을 수밖에 없다. 반면에, 정신성·인격성이라는 내면적 실재성으로 부터 미루어 따지면 그리스인이 공간을 비존재(非存在)라고 하였던 것과 다른 뜻으로, 공간이며 온갖 공간적질서의 존재성이 극히 의심스러운 것이 된다. 중세에는 공간과 정신이라는 이 화해하기 어려운 이원성(二元性)의 등장때문에, 양자 사이에서 존재의 우위성을 둘러싼 세계관의 대립이 오래도록 지속한다. 최초의 교부(敎父)시대 이래, 중세철학자의 관심은 정신적인 것, 자체를 공간적·

물질적해석으로 부터 지키고, '정신적인 것'의 새로운 의미를 추출해내는데 있었다. 그러나 다른 한편에서는 외적·공간적인 것과 내적·정신적인 것의 직접적이고 조화적인 일치라는 생각을 버리지 못하였다. 중세 철학자들이 세속적인 것과 초속적(超俗的)인 것이라는 정신적·종교적 대립에 지상적인 것과 천계적(天界的)인 것이라는 공간적, 우주적인 —고대적인—대립을 결합시킬 수 있었던 것은 이 때문이다. 천문학적 우주영역(宇宙領域)은, 동시에 정신적 인격적인 존재자의 위계성(位階性)을 부여하기 위한 자리이기도 하였던 것이다.

그러나 근세의 새로운 과학과 새로운 자연철학—갈릴레이로 부터 칸트에 이르기까지—의 방법과 체계의 면에서, 공간원리는, 고대 또는 중세의 세계상(世界像)과는 전혀 다른 형태로 놀랄만큼 강화되었다. 즉, 공간의 속성(屬性), 특히 그 무한성·평등성(uniformity)·합리성 등이 새로히 평가되므로서 공간의 존재가 적극적인 의미를 새로이 지니게된 것이다. 당초, 공간의 '무한성'이란 고대의 사상가들에게 있어서는 존재로서의 불완전성을 뜻하였다. 세계는 그 '형상'(形象)의 원리를 구(球)로 삼은 이래 이미 완결된 존재로서 유한 적이며, 한계와 한도를 지닌 존재였다. 아리스토텔레스에 의하면, 이러한 외적무한성(外的無限性)은 결코 현실적인 것이 아니고, 한낱 가능성에 지나지 않는다.[63] 그러나 근대적사유(近代的思惟)는 '자연이라는 책'을 무엇보다 중요시한다. 즉, 성서나 영적인 계시에 못지않게 '자연이라는 책'—외적 현실성— 속에서도 신은 자신을 계시한다는 것이다. 이 경향은, 특히, 크자누스(N. Cusanus, 1400~1464년) 이래 세계는 무한자(無限者)에 의한 창조물로서, 또는 그 자신 무한의 세계로 간주되었다. 이제 공간이 비존재적(非存在的)인 공허에 지나지 않는다는 관념은 낡은 감각으로서 배제된다. 그 결과 공간은 어김없는 적극적인 존재가 되었으며, 완전한 무한적인 양(量)으로서의 성격을 지닌다. '평등성'의 개념도 근대적인 공간관의 두드러진 특징의 하나이다. 고대 중세의 세계관 속에 뿌리를 내리고 있었던 상과 하, 세계의 표면과 세계의 중심, 지상적인 것과 천상적인 것 사이의 절대적인 대립이 근대에 이르러 장소 또는 방향의 상대적인 구별로 바뀐다. 장소나 방향의 구별을 이처럼 상대적인 것으로 간주하는 것은 공간의 평등성을 전제로 하므로서 비로소 가능해진다. 이 평등성의 원리를 철학적으로 제시한 것은 역시 크자누스였다. 또 공간의 '합리성'에 관해서는, 크자누스가 지적한 바와 같이 그 '무한성'과 깊은 연관이 있다. 즉, 무한성의 본질에 엄격히 개념적으로 접근할 수 있는 것은 바로 이 '평등성' 때문인 것이다. 기하학에 의해서 우리는 '신에게 이르는 길'을 찾을 수 있기 조차한다. 자연이라는 책은 삼각형이나 원등의 수학적인 문자로 씌어지고 있다고 하는 갈릴레이의 말은 자연공간의 합리성을 전제로 한 것이다.

근세의 과학의 성과가 눈부신 것이었으니 만큼, 그 방법이야 말로 자연에 접근할 수

63) Aristoteles, "Phisiea" Ⅲ, 5, 6.

있는 유일하게 참된 방법으로 여겨졌으며, 이로 말미암아, 공간에 관한 기하학적 진리—그리고, '기하학적인' 운동론의 진리—는 무릇 근세의 사상가들에게는 영원의 진리의 원형으로 섬겨졌다. 유클레이데스의 〈스토이케이아〉가 학문적 체계의 이상이된 것은 이 까닭이다. 수학적인 구명을 통해 발견된 공간의 내재적(內在的) 체계성과 다양한 대상에 조화롭게 대응하는 공간구조의 합법칙성(合法則性)으로 미루어 공간은 최고이자 가장 풍부한 합리성의 위대한 본보기가 된 것이다.

근세에 이르러 공간의 문제가 세계의 문제로 되고, 이른바 공간의 형이상학(形而上學)이 성립하기 위해서는, 세계를 무한인 것으로 보는 새로운 공간관이 전제되어야 하였다. 무한 세계에 있어서는 한계란 있을 수 없고, 따라서 세계에는 공허한 공간은 존재할 수 없다. 곧 세계=공간인 것이다. 근세의 공간론의 배경을 이룬 것은, 이러한 형이상학적 관념이었다. 데칼트는, 자연학(自然學)을 기하학으로 환원시켰으며, 한걸음 더 나아가 스피노자는 공간성을 신의 속성으로 간주하기까지 하였다.[64] 즉, 그에게 있어서는 '기하학적질서'는 곧 세계의 신적(神的)인 질서였다. 이러한 관점에 서면 기하학적방법은 비단, 논증적 방법에 그치지 않고, 세계의 실재(實在) 그 자체를 구명하는 방법이 되기도 한다. 실재로 공간의 문제는 17,8세기를 통하여 수학상의 문제 뿐만 아니라 그 이상으로 철학·신학상의 문제였다. 데칼트로부터 뉴톤, 칸트의 시대에 이르기까지 공간론은 줄곧 형이상학적인 문제였다. 근세에 있어서는 기하학적방법이 '방법' 그 자체 —즉, 보편적 방법—로 간주된 것은 이처럼 공간의 수학인 기하학이야말로 '세계의 수학'이었기 때문이다. 바꿔 말하면 기하학적 방법은 무한세계의 형이상학을 전제로 삼는 것이었다. 이러한 공간개념을 전제로 하지 않고는, 해석기하학을 비롯한 근세기하학의 방법이나 성격을 충분히 파악하기는 어렵다.

에우클레이데스가 소극적으로「부분을 갖지 않는 것」이라고 정의하였던 점은 근세에는 적극적으로 위치를 나타내는 것, —라이프니쯔의 표현을 빌면「위치를 표출(表出)하는 것」[65]—이 되었다. 실제로 무한공간에 있어서는, 그 요소인 점은 무한소이어야 하고, 따라서, 무한공간의 기하학은 위치의 기하학이어야 한다. 이것이 라이프니쯔가 개척한 '위치해석학'(analysis situs)의 기본사상이었다. 크기를 갖지 않는 형이상학적 점(點)을 '요소'로 갖는 공간은 이제 현실적인 것이라기 보다 이상적(理想的)인 것이 되었으며, 따라서 공간의 수학으로서의 기하학도 현실적·외재적(外在的)인 의미를 잃고, 이상적·가능적인 것이 되었다. 바꿔 말하면 이것은 기하학이 순수수학으로서의 위치를 확보하였음을 뜻한다. 그 기반이된 것은, 칸트의 선험적 관념론(先驗的 觀念論)이었다. 수학·자연학(自然學)·형이상학이 각각 독립한 학문으로서 정립된 것은 칸트

64) Spinoza, "Ethica" I—14.
65) Leibniz, "Philosophische Schriften" (hrsg. Gerhardt), Bd. Ⅶ, s. 355.

의 철학에서였다고 한다. 그러나 공간을 직관과 연관지었다는 점에서는 아직 수학과 철학의 구별은 명확하지 못하였다고 할 수 있다. 이것은 공간이 어떤 의미로든 아직 외재적인 성격을 지녔으며, 따라서 기하학이 자연학으로부터 완전히 독립한 학문으로서 정립되지 안했음을 뜻한다. 즉, 칸트의 단계에서는 기하학은 순수한 수학으로 성립되어 있지 않았다. 이것이 가능해지기 위해서는, '초'(超)기하학으로서의 비유클레이데스기하학의 출현까지 기다려야 하였다.

리이만기하학은, *n*차원 다양체의 계량적(計量的)인 미분기하학이지만, 비계량적(非計量的)인 관점을 도입하면, 사영적 미분기하학(射影的微分幾何學)이나 아핀미분기하학이 형성된다. 클라인의 〈엘랑겐·프로그램〉은 동질적인 공간만을 대상으로 삼았기 때문에 가변적(可變的)인 곡률을 갖는 비동질(非同質)의 공간까지도 대상으로 하는 리이만기하학은 여기서 제외되어 있었으나, 이것을 군론적(群論的)인 방법에 의하여 다른 기하학과 통합한 것이 칼탄(E. Cartan, 1869~1951년)으로부터 비롯된 이른바 접속(接續)의 기하학이다. 이것은 현대의 미분기하학의 중심테마이다. 기하학과 공간의 다양화, 그리고 통합의 과정은 리이만에 이르러 하나의 극점을 이룬다, 그런데 리이만에게서 처음으로 명확히 나타난 '공리의 가설화(假說化)'는 기하학 뿐만 아니라, 현대의 수학 전반에 걸쳐 볼 수 있는 경향이다. 연구영역의 확대와 다양화로 말미암아, 종래, 자명적(自明的)이고 필연적인 진리로 간주된 공리가 가설적인 것으로 성격을 바뀌어 간 것이다. 그리하여 다양화된 각 이론체계에서 무엇을 기본가정 —즉, 공리—으로서 설정하는가는 오직 대상에 대응해서 이루어질 이론의 발전과 관련이 있는 유효성에 의해서 좌우된다. 연구대상과 이론의 다양화라는 현대적인 상황은 공리의 선험적 필연성(先驗的 必然性)을 이미 무의미한 것으로 만들고 있는 것이기도 하다.

현대의 공리적이론(公理的理論)과 공리적 방법을 낳은 것은 요컨데, 고도로 복합·다양화된 경험내용에 대응한 공리의 가설화(假說化), 그리고 이에 따른 명제의 구조적 고찰의 필요성이었다. 바꾸어 말하면, 오늘에 있어서의 공간과 기하학의 추상화는 단순한 추상이 아닌, 적극적인 추상을 통해 형성된 결과인 것이다.