Journal of Historia Mathematica Vol. 3. No. 1, 1986. 9
The Society of Korean Matheatical History

유클리드 추방론의 의미

고려대학교 **유 희 세**

1. 유클리드의 의미

수학이란 학문이 공리체계의 기초 위에 세워진 연역논리의 전개라면 인류가 처음으로 수학을 만들게 된 것은 바로 유클리드의 원론부터이다. 물론 유클리드의 원론을 완벽한 기하학의 체제를 갖추도록 보완한 것이 힐버트의 '기하학기초론'이지만, 하여간 유클리드가 수학사에서 가지는 의미가 대단히 중요하다. 유클리드로 대표되는 그리스 수학 이전에도 이집트나 바빌로니아에 오래 전부터 기하학적 지식과 공리적인 사고, 연역적인 사고, 소위 논증은 아직 없었다. 가령 바빌로니아의 문헌으로 발굴된 Plimpton 322에는 피타고라스의 정리의 계산에 관한 수표가 기록되어 있다. 피타고라스가 처음으로 그 정리를 증명한 것이 기원전 6세기이고 그 증명이 유클리드의 원론(기원전 300년)의 제1권 명제 47에 나와 있지만 Plimpton 322의 연대는 기원전 19세기 무렵이다. 즉 기하학의 정리로서 엄격하게 증명되기 전에 증명을 거치지 않으면서 기하학적 지식과 기능으로 발달한 여러 세기가 경과되었던 것이다. '증명'이라고 하는 놀라운 혁명이 수학사에서 일어난 것이 바로 그리스 수학이며 유클리드는 그 상징이다.

2. 유클리드와 수학교육

수학사를 생물학에서의 계통발생(phylogeny)에 비한다면 수학교육은 생물학에서의 개체발생(ontogeny)에 비할 수 있다. 생물계에서는 개체발생이 계통발생을 반복한다고 하지만 수학사와 수학교육의 관계는 어떠한가? 수학사에서 일어났던 유클리드의 혁명이 수학교육에서는 어떻게 실현되어야 하는가? 이것은 수학교육에 있어서 기하교육이 가지고 있는 오랜 문제인 동시에 그 완전한 해답과 결론은 아직 나온 일이 없다. 그럼에도 불구하고 기하교육은 한시도 중단될 수는 없다는 데에 문제의 심각성이 있다. 증명이 없는 기하교육을 경험적 기하(practical geometry)의 교육이라고 하고 증명이 있는 기하교육을 형식적 기하(formal geometry)의 교육이라고 하지만 기하교육에 있어서 이 practical geometry에서 formal geometry에로 옮겨가는 과정이 바로 수학사에 있어서의 Euclid의 혁명의 시기에 해당한다. 물론 수학교육에 있어

서의 법칙과 생물학에 있어서의 가설이 필연적으로 일치할 이유는 없다. 우리나라의 현행 교육과정을 보면 중학교 2학년에서 '증명'을 가르치고, 중학교 3학년에서 유클리드의 평면기하의 부분을 필하기로 되어 있다. 그런데 참고로 이웃나라 일본의 예를 하나 들어 보자. 1984년 8월 Adelaid에서 있었던 제5차 세계수학교육학회에서 일본의 한 학자의 논문발표에 따르면 그 나라 중학생의 3분의 1 이하가 겨우 증명이란 것이 수학에 있어서 무엇인가를 이해한다고 한다. 이것은 매우 심각한 문제이다. 즉 수학사에 있어서의 유클리드 혁명이 수학교육에 있어서 성공율이 3분의 1 이하라는 것을 의미하기 때문이다. 우리 나라에서는 어떠한가? 나는 서울에서 중학생을 상대로 '증명'의 개념을 구체적 문제를 통하여 조사해 본 일이 있다. 나의 조사는 숫자로 퍼센테이지를 낼 수 있는 것은 아니었지만 내가 조사한 학교에서의 학생들은 전부 '증명'의 의미를 모르고 있었다. 그런데 앞에 말한 일본의 연구발표의 더욱 놀라운 점은 사실은 '증명'의 교육의 실패에 대한 원인 분석에 있다. 즉, 그 연구발표는 말한다. '증명'의 교육의 실패는 결코 학생들이 너무 어리기 때문이 아니라는 것이다. practical geometry의 교육이 체계화되어 있지 않았기 때문에 formal geometry 교육에로의 옮겨감에 실패한 것이라는 결론이었다. 이것은 중대한 지적이다.

3. 유클리드 추방론의 등장

한국교육이라는 색안경을 끼고서 수학교육의 사조를 개관하면 대개 다음과 같은 것이라고 나는 생각한다.

1930년대 이전 : 고전적인 수학교육, 즉, 유클리드가 그 내용이다.

1940—50년대 : 생활수학

1960—70년대 : 현대화수학

1980년대 이후 : 현대화가 벽에 부딪힌 이후의 시대, 이때 등장한 대표적인 사상은 Problem solving, back to basics, technology in math. education 등이다.

유클리드 추방론이 등장하는 것은 1950년대 말, 즉, 수학교육 현대화 물결이 일기 시작할 때, 프랑스의 Dieudonné 교수가 세계를 향하여 외친 것이 그 발단이다. 수학교육의 현대화가 곧 유클리드 추방론은 물론 아니지만, 적어도 세계의 강력한 선진국 프랑스에서는 1960년대와 70년대의 수학교육(나는 1960년대의 프랑스의 자료를 입수하지 않고 있어서 확언할 수는 없으나 1970년대의 자료는 자세히 검토한 일이 있다.) 이 Dieudonné의 주장대로 실행되었다. 그의 주장을 쉽게 알려면 다음의 그의 저서에 의하는 것이 좋다. algébre linéaire et geómétrie élémentaire(1964).

그의 주장을 요약하면 다음과 같다. 유클리드의 원론 또는 그 공리계를 보완한 힐버트의 공리체계 위에 건설된 기하학을 기하교육에 도입하지 말라. 힐버트의 공리체계와 동치이고 다른 공리체계 위에 기하학을 세우더라도 그런 것이 기하교육에 도입되어서는 안된다. 그런 공리체계는 배우고 나면 잊어버리게 마련이고 잊어버려도 아무 손실이 없다. 그런 것은 안 배우는 것이 낫다.

또 유클리드에 나오는 기하학적 지식, 즉, 유클리드에는 기하의 정리만 있는 것은 아니지만, 거기 나오는 모두 468개의 명제는 실제 생활에서도 현대수학에서도 실용가치가 전혀 없다. 그런 것은 안 배우는 것이 낫다. 그런고로 기하교육은 다음과 같이 하라. 처음에 벡터공간을 대수적으로 정의한다. 여기에 공리의 개념이 있다. 유클리드공간을 벡터공간으로 보는 것이다. Dieudonné의 말을 다음에 인용한다. "순수기하학, 해석기하학, 삼각법, 사영기하학, 비유클리드기하학, 뫼비우스기하학, 복소수함수론 등으로 분리되어 있는 여러 영역의 밑바닥에는 수학의 하나의 중심적인 분야가 복병처럼 잠복하고 있다는 것을 우리는 알고 있다. 그것은 현대수학에 있어서의 선형대수(linear algebra)이다. 선형대수는 현대수학에 있어서 가장 중심적이고 가장 효과적인 이론의 하나이다. 그 응용은 수론에서부터 이론물리학, 해석학, 기하학, 위상수학에 이르기까지 다양하다. 학생들이 어릴 때부터 이 중요한 원리를 습득하게 하는 것은 대단히 유리하다. 우리는 학생들에게 선형적으로 사고하도록 가르쳐야 한다……."

이리하여 유클리드 추방론은 유클리드를 추방하고 나서 그 자리에 선형대수를 도입하고 선형대수의 한 응용으로 기하공간을 도입한다.

이리하여 그들은 주장한다. "수학교육에서는 개체발생은 계통발생을 반복하지 않는다!"라고.

4. 유클리드 추방론의 운명

추방론의 운명을 소개하기 전에 우리는 잠깐 냉정히 문제의 소재를 생각하자.

우리는 '증명'의 교육의 중요성과 그 실패의 원인에 대한 한 보고를 소개했다. 그리고 거기서 우리는 개체발생이 계통발생을 반복한다는 가설을 시인하였지만 사실 문제는 그리 쉽지가 않다. '증명'은 도리없이 '공리'를 요구하는데 유클리드의 5공리는 완전하지가 않다. 그렇다고 힐버트의 5공리계는 수학기초론의 어려운 단련을 거쳐야 이해가 된다. 그런고로 '증명'의 교육은 학생들이 그 뜻을 모르고 있는 것이 당연할지도 모른다. 여기에 기하교육의 미해결의 과제가 있다. 여기에 유클리드 추방론이 등장하여 개체발생은 계통발생을 반복하지 않는다고 주장하고 선형대수와 그 사영(mapping)의 개념을 중시한 것이다. 1980년 버클리대학에서 제4차 세계수학교육학회에서는 '기하학의 죽음'이라는 분과회의가 있었다. 거기서는 바로 유클리드 추방론의 검토를 하였다. Dieudonné도 물론 연단에 섰다. 미국, 독일 등의 학자들이 Dieudonné를 집중공격을 하고 있었다. '유클리드 추방론'에 대한 비판의 근거는 추방론이 선형대수라고 하는 대수적인 개념에서 출발하여 기하공간을 그 한 예로 들게 되는데 처음부터 가장 직관을 존중하여야 할 기하교육에서 직관을 말살하게 되는 것은 부당하다는 것이었다.

여기에 대하여 Dieudonné의 응답은 "미국은 지구상에서 기하교육에 관해서는 가장

후진국이다"라고 하는 것이었다.

그런데 Dieudonné에 대한 반항은 프랑스 내부에서도 일어났다. 물리교사들이 수학교사들에게 수학시간에 무엇을 가르쳤기에 학생들이 기하도형에 대해 기초지식도 안 가지고 있느냐라고 하는 것이었다.

5. 결 론

나는 유클리드 추방론에 동조할 수도 없고 반대할 수도 없다. 오늘의 기하교육은 이와 같은 진퇴양난의 위기에 서 있다. 문제 해결의 서광은 보이지 않는다. 그러나 이 문제가 바르게 해결되는 날까지는 그 희생자는 교육을 받는 우리 젊은 제2국민들이다.

참 고 자 료

1. Plimpton 322

$a=2uv \quad b=u^2-v^2 \quad c=u^2+v^2 \quad u>v$

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	317	481	29	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

2. *Στοιχειων α'—μζ'*

(원론 제 1 권 명제 47)

Κοιναὶ ἔννοιαι

α' : *τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλος ἐστὶν ἴσα*

β' : *καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.*

γ' : *καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.*

δ' : *καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.*

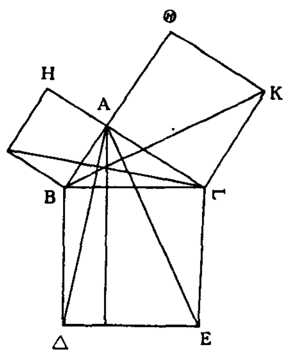
ε' : *καὶ, τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

ς' : *καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

ζ' : *καὶ τὰ ἐφαρμόςοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

η' : *καὶ τὰ ὅλον τοῦ μέρους μειςόν ἐστιν.*

θ' : *καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιεχουσιν.*



Euclid : *μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν.*

Platon : *μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.*

Στοιχεῖα(Elementa)의 내용분해

권	정의	공준	공리	명제	내용
1	23	5	5	48	평면도형
2	2	0	0	14	면적의 변형
3	11	0	0	37	원
4	7	0	0	16	원의 내접, 외접
5	18	0	0	25	비례론
6	4	0	0	33	비례론의 기하학적 응용

7	22	0	0	39	수론
8	0	0	0	27	수론
9	0	0	0	36	수론
10	16	0	0	115	무리량론
11	29	0	0	39	입체도형
12	0	0	0	18	체적의 이론
13	0	0	0	18	정다면체

정의 ὅροι, 공준 αἰτήματα, 공리 κοιναὶ ἔννοιαι, 명제 πρότασις, 작도 κατασκευή, 증명 ἀπόδειξις, 가정한다 ὑποτιθέναι, 결론 συμπέρασμα, 음미 διορισμός

Hilbert의 Grundlagen der Geometrie(1899)

1. 결합공리 Incidence Axioms

a) 평면 : ① 〔주어진 2점에 대하여 그들〕 2점을 포함하는 직선이 항상 존재한다. ② 2점을 포함하는 직선은 꼭 하나 밖에 없다. ③ 1직선 위에는 항상 적어도 2점이 존재한다. 1직선 위에 있지 않는 적어도 3점이 존재한다.

b) 공간 : ④ 〔주어진〕 3점을 포함하는 평면이 항상 존재한다. 평면은 항상 적어도 1점을 포함한다. ⑤ 동일 직선 위에 있지 않는 3점을 포함하는 평면은 꼭 하나 밖에 없다. ⑥ 어떤 직선이 평면 위의 2점을 포함하면 그 직선 위의 점은 모두 그 평면 위에 있다. ⑦ 만약 2평면이 1점을 공유하면 그들은 다른 또 1점을 공유한다. ⑧ 동일평면 위에 있지 않는 적어도 4점이 존재한다.

2. 순서공리 Ordering Axioms
(Axioms of betweenness)

a) 직선 : ① 점 B가 2점 A와 B 사이에 있다고 할 때에는 점 A,B,C는 1직선 위에 있고, B는 C와 A 사이에 있다. ② 주어진 2점 사이에는 그들을 맺는 직선 위의 1점이 꼭 존재한다. ③ 1직선 위의 3점에 한 점이 다른 2점 사이에 있다고 하는 점은 꼭 하나 밖에 없다.

b) 평면 : ④ A,B,C가 동일직선 위에 있지 않는 3점, a가 평면 ABC 위의 직선인데 이들 3점의 어느 것도 통과하지 않는 것이라면, 만약 a가 선분 AB 위의 한 점을 지나면 a는 선분 AC 위의 1점 또는 선분 BC 위의 1점도 지난다. (이것은 Pasch의 공리다.)

순서의 공리 때문에 직선을 그 위의 점을 생각하므로써 선분으로, 평면을 그 위의 직선을 생각하므로 영역으로 분해할 수 있어서, 직선에 있어서의 점의 이쪽과 저쪽, 평면에 있어서의 직선의 이쪽과 저쪽, 단순폐다각형의 내부와 외부를 구별할 수 있고, 또(두 직선에 의하여 만들어진 반직선이 이루는) 각을 정의할 수 있게 되어 그 내부와 외부를 구별할 수 있게 된다.

3. 합동공리 Congruence Axioms

a) 직선 : ① A와 B를 직선 a 위의 2점, A′를 같은 직선 a, 또는 다른 직선 a' 위의 점이라고 하면 a' 위에서 A′의 주어진 쪽에 선분 AB가 선분 A′B′에 합동이 되도록 점 B′를 꼭 잡을 수가 있다. ② 동일선분에 합

동인 두 선분은 합동이다. ③ AB와 BC가 동일직선 위의 〔B 이외의〕 공통점을 가지지 않는 2선분일 때, A′B′와 B′C′가 처음 직선과 같은 또는 다른 직선 위에서 같은 배치에 있고 한쪽에서 AB와 A′B′가, 다른 쪽에서 BC와 B′C′가 합동이면 AC와 A′C′도 합동이다.

b) 평면 : ④ 평면 α 위의 각(h,k), 평면 α' 위의 직선 a'와, a' 위의 점 O′, 그리고 O′에서 나오는 반직선 h'가 있을 때, 평면 α' 위에 각 (h',k')가 각 (h,k)와 합동이 되고 각 (h',k')의 내부의 점전부가 〔α' 위에서〕 a'의 주어진 쪽에 있게 되는 하나의 하나만의 반직선 k'가 존재한다. 또 모든 각은 그 자신과 합동이다. ⑤ 두 삼각형 ABC와 A′B′C′에 대하여 AB와 A′B′가 합동, AC와 A′C′가 합동, 각 BAC와 각 B′A′C′가 합동이면 각 ABC와 각 A′B′C′도 합동이다.

4. 평행선 공리 Axion of Paralles

한 직선의 외부의 한 점을 지나 처음의 직선과 만나지 않는 직선은 하나 이하로 존재한다(하나 이상의 증명의 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에 의하여 증명된다).

5. 연속성 공리 Axions of Continuity

① (측정공리 또는 archimeder의 공리)

AB와 CD를 임의의 2선분이라고 할 때, 직선 AB 위의 점 $A_1, A_2, \cdots, A_n$가 있어서 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$가 선분 CD와 합동이고, B가 A와 A_n 사이에 있게 할 수 있다.

② (직선의 완비성 공리, (axiom of linear completeness)) 한 직선 위의 점 전체는 공리 Ⅰ-①, Ⅰ-②, Ⅱ, Ⅲ-①, Ⅴ-①을 보존한 채로 확대할 수는 없는 체계를 형성한다.

〔abrégé α' histoire des mathematiques (1700—1900), 제13장 공리론과 논리학(Marcel Guillaume) 중에서〕

J. Dieudonne Linear Algebra and Geometry(Algèbre linéaire et géométrie élémentaire)(1964)

서론 This book gives a complete account of the basic idea of elementary linear algebra which represent the very least a competent French "bachelier" should know.

Mathematicians of past centries have suceeded in impressing upon the minds of the cultivated public, the image of math. as a rigid, fixed science occupying the place of honous in an empyrean of absolute truths religiously handed down from one generation to the next as though it were a divine revelation wherein no change is allowed.

The source of misunderstanding lies in the fact that it is quite true to say that the theorems proved 2000 years ago are every bit as true now as they were when they were first discovered, while "experimental truths" never seem to be anything more than approximations which are continually perfected.

What changes in Math. is the point of

view from which results already acquired, are assessed. New acquisitions lead scholars to rethink ancient theorems, to examine their links one with another in the light of more recent theories and place them in a fresh context in a more rational manner. 이 경우에 수학이 다른 과학과 다른 점은 이와 같은 계속적인 변동 중에도 과거의 정리들이 상처를 입지 않고 분해되어버리는 일도 없다는 점이다. 다만 쏟아져 나오는 수준 높은 기본정리들 앞에서 과거의 정리들은 점점 그 중요성이 감소되어 간다는 점이다. 이와 같은 역사변천의 사실을 인식할 때 오늘날 최첨단에서 피땀흘리며 진리를 발견하고 있는 수학자들은 좀더 겸허하게 그들의 오늘의 발견이 내일에는 학교 아동들의 노리개가 될 것이란 사실을 알아야 할 것이다.

최근까지만 해도 중고등학교 수학교육의 개념에 있어서 전통적인 개념에 대한 재구성의 시도는 없었다. Viète(1540—1603)의 시대나 Cauchy(1789—1857)의 시대만 하더라도 Euclid의 기초실력을 가지면 소위 고등수학을 하는 준비로서 손색이 없었다. 그런데 이 두 수학자 사이의 2백년 동안에 수학적 지식의 축적은 실로 크게 증대하였고, 연구의 새 강력한 방법들이 개발되었다. 그러나 그 방법이란 그리스의 수학자들이 생각하고 다뤘던 공간과 수의 기본개념 이외의 지식을 필요로 하지 않았다. 그런데 Cauchy 이후의 최근 1세기 동안에 전혀 양상은 달라졌다. 물리학자들이 고대에는 분해불가능이라고 생각했던 원자를 분해하게 된 것처럼 수학자들은 추상화의 노력으로 위의 기본개념을 깨기 시작했다. 그 결과 전혀 선배들이 예측할 수 없었던 새 강력한 무기를 얻게 되었다. 그 무기들로 미해결의 여러 문제들을 풀게 되었다. 그 동안 중고등 수학교육은 여전히 Grassmann(1809—1877), Cantor(1845—1918) 이전의 상태에 안주하고 있었다. 즉 그것은 본질적으로 Euclid 기하였다. 거기에 Viète . Descartes (1596—1650)의 대수와 약간의 미분적분학이 가미된 것이었다. 따라서 이것과 대학 1학년의 수학과의 갭이 점점 늘어났다. 현재도 중고등학교에서 가르치는 내용의 대부분이 다음과 같은 것이란 점을 주목하자.

(1) Constructions by ruler and compass

(2) Properties of traditional figures such as the triangle, various quadrilaterals, circles and systems of circles, conics along with all refinements accumulated by generations of specialized "geometries" and teachers in search of examination questions.

(3) The rigmarole of trigonometric formulas and their kaleidorcopic transformations leading to wonderful solutions of problems concerned with triangles, being done by "logarithmic calculation", if you please!

지금 대학 1학년의 수학책의 어느 페이지를 펴보아도 이런 아름다운 문제는 하나도 없다. 간혹 원추곡선이 나오지만 그것은 Calculus의 일반곡선론의 일부로 배워버린다.

대학수학은 너무 추상적이어서 중고등학교 수학이야말로 장차 공과기술계통으로 나갈 때 필요한 것이라고 생각하는 사람이 있는가? 그것은 잘못이다.

고등학교 수학은 지식으로서는 필요없다고 하더라고 그 탐구방법과 마음의 태도는 장차 크게 유익하다고 생각하는 사람이 있는가? 그것도 잘못이다. 그것은 Descartes의 시대까지는 타당한 생각이 있을 것이지만 Newton의 시대에는 타당하지 않다.

Grassmann과 Cayley(1821—1895) 이후 (벌써 100년 전이다) 초등기하에 있어서는 Choquete가 말한 바와 같이 "royalroad"가 생겼다. 즉 극도로 단순한 공리계(Euclid-Hilbert의 공리계와는 대조적이다)에서 출발하여 어떤 정리든지 쉽게 증명하자는 것이다. 이 방법은 별로 신기한 것은 아니다. 즉 수학에 있어서 한 공리계를 그와 동치인 다른 공리계로 대치함으로써 보다 간결하게 논리를 전개시킬 수가 있는 것이기 때문이다. 그러면 여기서 중대한 결정을 해야 한다. 골치가 아프고, 배우고 나자마자 잊어버려야 하는 방법을 가르치지 말고, 적절한 이론, 즉 약간의 중심적인 단순한 개념에서 논리적으로 출발하되 그것이 장차 두고두고 연구활동의 기초개념이 되는 이론이다.

현대수학적 방법의 또 하나의 특색은 피상적으로는 다르게 보이지만 깊은 데에서는 유사한 이론들을 통일(재편성)하는 일이다. 전통적인 수학교육의 결점은 같은 것을 여러 갈래로 갈라 놓았다는 점이다. 고등학교를 마칠 때까지 학생들이 배운 이론의 일람표를 만들어 보자!

pure geometry, analytic geometry, trigonometry, projective geometry, conformal geometry, non-Euclidean geometry, theory of complex mumbers.

지금 우리는 안다. 이 분리되어 있는 여러 영역의 밑바닥에 수학의 하나의 중심적인 분야가 복병처럼 잠복하고 있다는 것을, 그것은 현대수학에 있어서의 선형대수(linear algebra)이다. 선형대수는 현대수학에 있어서 가장 중심적이고 가장 효과적인 이론의 하나이다. 그 응용은 수론에서부터 이론물리학, 해석학, 기하학, 위상수학에 이르기까지 다양하다. 학생들이 어릴 때부터 이 중요한 원리를 습득하게 하는 것은 대단히 유리하다. 우리는 학생들에게 선형적으로 사고하도록 가르쳐야 한다.

- 계속적으로 일관성 있게 가르친다.
- 빠른 시기부터 현대수학적 방법에 익숙하게 한다.
- 여러 분야를 통일적으로 다룰 수 있게 한다.
- (1) 수학을 공리적으로 구성하는 것이 필요하다는 것을 배운다.
- (2) 빠른 시기에 학생들은 추상적인 개념에 익숙하게 하되 그 중에서 가장 어려운 것은 mapping(사영)(또는 변환 transformation)의 개념이다. 그리고 아마 더 어려운 것은 사영의 대수(the algebra of mappings)이다.

(1)과 (2)를 가르침으로서 우리는 현대수학의 구조의 핵심을 가르치고 있는 것이다.

차례 Ch. Ⅰ. Real numbers

Ch. Ⅱ. Axioms of Euclidean Geometry

Ch. Ⅲ. Vector spaces

Ch. Ⅳ. Affine plane geometry

Ch. Ⅴ. Euclidean plane geometry

Ch. Ⅵ. Three-dimensional affine geometry

Ch. Ⅶ. Three-dimensional Euclidean geometry

Mathématique première B, première A (facultatif)의 교과서의 차례

Première partie : Algèbre linéaire

1. Espace vectorjels
2. Applications linéaires
3. Composition des applications linéaires
4. Orientation du plan

Deuxième partie: Produit scalaire et angles

5. Produit scalaire
6. Bases arthonormées
7. Rotations vectorielles
8. Angles
9. Cesnus et Sinus d'un angle

Troisième partie : Fonctions circulaires

10. Mesine des angles
11. Définition des fonctions circulatires
12. Étude des fonctions circulaires

Quatrième partie : Calcul numérique

13. Tables numerique
14. Régles à calcul
15. Machine à calculer

Session: Wesnesday 1200

Venue: Room 30

THE TRANSITION FROM "PRACTICAL"TO "FORMAL" GEOMETRY DR W L OOSTHUIZEN UNIVERSITY OF PRETORIA, FACULTY OF EDUCATION BROOKLYN PRETORIA SOUTH AFRICA 2000.

In order to narrow the gap between 'practical' and 'formal' geometry the following possible procedure may be considered : "Test" the geometry properties which have been discovered practically. The aim of this is to stress the significance of the previous years' work and to force the pupils to experience the necessity of logical order. Write the discovered geometry properties in the form "if then." The purpose of this is to prepare the pupils for deductive reasoning which is necessary for Formal Geometry. Get pupils to draw specific geometrical figure. This enables the pupils to experience the necessity of reading attentively and drawing correctly. Get pupils to explore properties of equality in geometry context. The objective of this is to lead pupils to "translate" properties into words and to improve perceptiveness. Conversion of a theorem into a problem. This has a dual function. On the one hand the problems permit the pupils to attach meaning to the previous years' work and on the other hand the problems actively involve the pupils.

Session: Wednesday 1200
Venue: Room 2

CRITICAL PERIOD TO PREPARE PUPILS FOR THE SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS

Ichiei Hirabayashi
Faculty of Education, Hiroshima University, 1-1-89, Higashisenda-cho, Nakaku Hiroshimashi, Hiroshima'Ken Japan.

In our country, Japan, where almost all children receive the later secondary education, a large number of 'dropouts' in mathematics is the most serious concern of educationists. Especially the dropping in the early stage of lower secondary school is most remarkable. According to an investigation, only less than one third of the lower secondary school pupils can barely understand what is proof in mathematics. The author believes that this is not because of the poor teaching ability of teachers but because of the irrele vant curriculum ; today's secondary school curriculum was originally not for the education for all but for the minority of intelligent elites, and it is basically an educational error to try to adapt this curriculum to all pupils. Traditionally the grades 5 and 6 (10-12 years) of primary school have been regarded as the refinement of the primary education, but in today's society like our country these grades are indeed the critical period to give them the mental foundation to be able to learn the concepts such as 'demonstration' and 'variable' which are the essential components of the secondary school mathematics and mathematics in general, and if this period passes, pupils will no longer have the chance to learn the genuinemathematics forever. It is very much resemble to having the fondness of reading in some period of young ages and if they miss the chance, it is said, they will not be willing to read book through the later life.

Session: Wednsday 1200
Venue: Room 30

CREATIVE THINKING WITH EUCLIDEAN GEOMETRY, Roger V. Jean, Université du Québec à Rimouski, 300 avenue des Ursulines, Rimouski, Québec, G5L 7C3

The oldest of disciplines has been wrongly neglected by the 20th century educationalists. Euclidean geometry, still the best entrance in the world of mathematics, must reintegrate the place it had before the event of modern mathematics one hundred years ago. In order to recover the enthusiasm for this very root of mathematics we must put forward, in addition to enlightened anrmators, stimulating methods having a strong emphasis on visual expression, and which call upon the creativity of the students. That is precisely to what the material proposed here inafter is turned to. The idea is to awaken and to promote the student's reflection. Contrarily to algebra, geometry is not available by purely technical manipulations. This is the stumblingblock that the usual methods barely overcome. In order to definitively transform the class of geometry into an active class, a use of the overhead projector is made with superposed transparencies. In a game of clues and incentives, the theorem is decomposed, with the help of the students, into its different logical steps. The classical proof becomes a graphic proof. The method, which will be illustrated with many sets of transparencies, reinforces the first three levels of van Hiele's classification, but it is mainly concerned with the development of the abilities to make deductions and researches for a rigorous proof, what corresponds to van Hiele's levels four and five. Proving a theorem becomes a game, that of searching the exit of a labyrinth whose entrance is the hypothesis of the theorem. The spatial visualization of a theorem can take a variety of forms. Here is the place for creative education, for creative thinking. Theorems become riddles to be solved.

Session: Tuesday 1600
Venue: Room 29

WHAT IS WRONG WITH THE MOVEMENT "BACK-TO-BASICS" AND WHAT WAS WRONG WITH THE MOVEMENT "NEW MATH"? George Malaty, Al-Fateh University, Tripoli, Libya

To answer these questions, let us discuss the justifiers of each movement, and the way of reforming each. After that we shall answer two further questions ; what is wrong with mathematics education? and what have we to do? In the case of the movement "Back-to-Basics" the main justifier, which led to it, was the weakness in arithmetical skills. In the case of the movement "New Math" the justifier, which gave specialists the go-ahead was the launching of the first sputnik in 1957. Now, the way of reform in each movement. In the case of "Back-to-Basics," the programs have to stress the achievement of arithmetical skills, but we can see that there are tendencies which are taking us back about 50 years. In the case of "New Math," in a short time (10 ~15 years) specialists tried to build a new curriculum instead of the traditional one of hundreds of years(with insufficient evaluation and insufficient teacher preparation). What can we say is wrong with mathematics education and what have to do about it? The present movement "Back-to-Basics" came as a reaction to "New Math." The present tendencies can lead to such mathematical curricula, which are close to practical needs but not to the structure of mathematics. We have to go back to the basics of education and answer the follwing questions : 1) what is mathematics? 2) what can we teach in each phase? 3) what can we get from teaching mathematics in each phase (aims)? When a group of specialists builds a curriculum, they have to use it in a limited number of schools before extending it, and continously evaluate and develop it. Before introducing any new material they must train teachers, who will use it. Instead of working on diverse projects, they should evaluate and develop only one curriculum.

Session: Sunday 1030
Venue: Room 30

A TAXONOMY OF PROCESS ABILITIES AND SKILLS IN MATHEMATICS.
Douglas H. Crawford. Queen's University, Kingston, Ontario, Canada K7L 3N6.

Until fairly recently, mathematics teaching and learning have emphasized content and content-related objectives. Mathematics was thought of as a body of knowledge to be learnt, and considerable weight was placed on reproducing proofs of theorems and propositions. A notable exception was the work of George Polya who saw problem-solving as the main objective of the mathematician and devoted much thought to the processes involved such as using analogies and solving a simpler, but related problem. In the last decade or more, this aspect of mathematics has received much greater attention by authors such as Scandura, Morley, Bell and others. Morley(1973) drew attention to the need to "consider the longer-term objective of developing the pupils' power in characteristic mathematical activities such as classifying, generalizing, symbolizing, proving". More recently, Bell(1978) reviewed research, curriculum innovation and current thinking related to problem-solving, proof and mathematisation. Bell regards mathematisation as a key ability. A related ability, mathematical modelling, has also received considerable attention in recent years, together with a renewed and sustained emphasis on problem-solving. On the basis of this recent work, the author has constructed a taxonomy of process abilities and skills for use in a high-technology related research project in Canada. The presentation will focus on the development of the taxonomy, with special reference to the transition from basic mathematical processes such as comparing, to the more complex ones such as abstracting, generalising, mathematical modelling, and problem-solving. The taxonomy as reported will include illustrations of specific skills, and abilities together with discussion of the possible uses to which it may be put, e.g., testing, curriculum development. Reactions, and discussion from the audience will be most welcome.