φ, λ網과 X, Y網의 調整에 關한 比較研究

A Comparative Study on Simultaneous Adjustment of Geodetic Networks between with φ, λ Coordinates and with X, Y Coordinates

白 殷 基* 金 元 翼**
Baick Eun-Kee Kim Won-Ik
崔 允 秀***
Choi Yun-Soo

要 旨

本 論文에서는 φ, λ網과 X, Y網을 同時調整하는 프로그램을 작성하고, 調整計算한 結果를 比較分析하였다.

初期値로는 成果表上의 φ, λ座標와 X, Y座標를 利用하였으며, 基準楕圓體로 Bessel値를 使用하였으며, 觀測에 대한 重量은 1로 가정하였다. 平面上으로 거리변환시에 原點縮尺係數를 1.0000으로 하였으며, φ, λ에서 X, Y로의 投影은 Gauss의 二重投影을 적용하였다.

우리나라 一部地域의 實測데이타를 적용한 結果 平均位値誤差가 φ, λ網에서는 6.2cm, X, Y網에서는 5.8cm로 나타났으며 두 방법에 의한 調整結果差의 RMSE가 1.7cm로 實用上 부합되는 結果를 주고 있다.

ABSTRACT

This paper deals with comparison of simultaneous geodetic networks between with geographical coordinates and with plane coordinates.

The adjustment computation is performed by variation of coordinates. Provisional values for observation equations are computed by extended Guass mid-latitude formula using official coordinates (φ, λ) in geographical network abjustment, measurements are reduced to plane by origin scale factor (=1.0000) Bessel ellipsoid and unit weight are adopted, and geographical coordinates are projected by Guass conformal double projection.

The processing results of a test-network by distances yield the average root mean square error of position 6·2cm for adjustment with φ, λ and 5.8cm for adjustment with X, Y. RMSE of discrepancy between two methods is 1.7cm. This result conform to required accracy.

*서울市立大學 土木工學科 教授
**서울市立大學 大學院 博士課程
***서울市立大學 大學院

1. 序　論

우리나라의 1등 測地網은 1910년～1918년의 土地調査事業을 통하여 이루어졌다. 당시의 網은 13개의 블럭으로 구성하여 각 블럭내에 하나씩의 檢基線을 設置하고 總 400點(남한 189점)의 1등 三角點으로 구성되었다.[1) 2) 3) 4)]

이 경우 手計算에 의해 조정을 하는 과정에는 연산을 줄이기 위한 半解析的인 방법(semi-rigorous method)과 條件式에 의한 方法을 採擇하였으나, 근래에는 컴퓨터의 발달로 座標調整法에 의한 測地網의 同時調整이 可能하게 되었다.

이러한 同時調整法에는 投影을 어떻게 適用시키느냐에 따라 다음 두 가지로 大別된다.[6)]

먼저 地表面上의 觀測値를 楕圓體상의 값으로 補正한 후,

1) 楕圓體상의 距離, 方向 등을 이용하여 φ, λ座標調整을 실시하여 經緯度 座標를 구하는 方법, $x=F(\varphi,\lambda)$, $y=i(\varphi,\lambda)$의 投影計算에 의해 x, y座標를 구할 수 있다.

2) 楕圓體상의 거리, 방향을 縮尺係數를 이용한 距離補正, 方向補正 $(t-T)$: 子午線·收差 (ν)에 대해 보정을 하여 平面상의 값으로 만든 후 X, Y網으로써 座標調整을 실시하여 平面直角座標를 구하는 方法, 여기서는 $\varphi=P(x,y)$, $\lambda=Q(x,y)$의 投影計算에 의해 φ, λ를 구할 수 있다.

本 硏究에서는 이 두가지 방법을 적용하고 그 結果를 比較檢討하고자 하였다.

여기서 基準楕圓體로는 벳셀값을 採擇하였으며, 觀測에 대한 重量을 1로 가정하였으며 原點縮尺係數는 1.0000을 使用하였다. 또한 φ, λ에서 X, Y로의 변환은 Gauss상사 二重投影을 적용하였다.

2. 基本理論의 展開

國家의 測地基準點測量에서는 φ, λ를 사용하여 직접 조정계산하고 φ, λ座標만을 x, y값으로 投影하는 것이 일반적이다. 이때에는 位置關係를 직관적으로 알기 어렵고 계산이 복잡한 점이 있으나 φ, λ網을 사용하여 1等 網을 同時調整(rigorous adjustment)하게 된다. 그러나 公共測量에서는 楕圓體面上의 距離와 方位角을 平面에 投影하고, 平面上의 調整計算과 座標計算을 실시하는 것이 보통이다.[1) 7) 8) 9)]

2.1 座標調整法

座標調整法(variation of coordinates)에서는 개개의 觀測에 대하여 다음과 같은 觀測方程式으로 나타낼 수 있다.[6) 10) 11)]

$$BX=L+V \tag{1}$$

위 式(1)에서 觀測方程式의 數 m이 미지수의 수 n보다 클 경우 最小제곱법의 원리를 적용하여 다음 조건이 만족되도록 한다. 즉,

$$V^TPV=min \tag{2}$$

위 (2)式의 조건을 만족하기 위해서는 다음과 같은 正規方程式(normal equation)을 푸는 결과와 일치된다.

$$B^TPBX=B^TPL \tag{3}$$

여기서, $B^TPB=N$, $B^TPL=t$로 놓으면

$$X=N^{-1}t \tag{4}$$

가 된다. 이 式이 보정량 $\delta\lambda_i$, $\delta\varphi_i$를 구하는 式이 된다.

또, $Q=N^{-1}=(B^TPB)^{-1}$은 중량에 대한 계수행렬이며, 백터 X에 대한 分散一共 分散메트릭스(variance-covariance matrix)는 다음과 같다.

$$\sum=\sigma_oQ \tag{5}$$

여기서 σ_o는 重量 1인 觀測의 標準誤差로서 다음 式에 의해 구한다.

$$\sigma_o=\sqrt{\frac{V^TPV}{m-n}} \tag{6}$$

미지량(보정량)과 표준오차의 계산은 위의 각 式에 의해 구하면 되나 수치계산을 간단히 하기 위해서는 반복계산을 한다.[11) 12)]

2.2 觀測方程式

楕圓體上에서의 平均緯度를 利用한 距離觀測方程式은 다음 같이 표현된다.[3) 4) 5) 12)]

$$v=-a'_S\delta\lambda_1-b_S\delta\varphi_1+a'_S\delta\varphi_2+b'_S\delta\lambda_2+\frac{S\text{prov}-S\text{obs}}{S\text{prov}}\rho \quad (7)$$

여기서

$$a'_S=\frac{N\cos\varphi\sin\alpha}{S\text{prov}}$$

$$b_S=\frac{M\cos\alpha}{S\text{prov}}+\frac{N\sin\varphi\sin\alpha}{2S\text{prov}}\cdot\frac{\Delta\lambda}{\rho}$$

$$b'_S=\frac{M\cos\alpha}{S\text{prov}}+\frac{N\sin\varphi\sin\alpha}{2S\text{prov}}\cdot\frac{\Delta\lambda}{\rho}$$

$\varphi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ 점1과 점2의 평균위도

$\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1$ 경도의 차이

$\alpha=\frac{A_{12}+A_{21}\pm180^\circ}{2}$ 평균 방위각

첨자 : prov. (provional values) 초기치
obs. (observations) 관측치

平面上에서의 距離觀測方程式은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[1)6)8)10)]

$$-b_1\Delta X_1-b_2\Delta Y_2+b_1\Delta X_2+b_2\Delta Y_2=(O-C)+V$$

단, $b_1=\cos t_{12}=\frac{X_2^\circ-X_1^\circ}{S^\circ}$

$b_2=\sin t_{12}=\frac{Y_2^\circ-Y_1^\circ}{S^\circ}$ (8)

$O(=S)$: 평면상으로 投影된 거리

$C(=S^\circ)$: 初期値에 의한 計算値 (computed values)

X_1°, X_2°, Y_1°, Y_2° : 初期値

楕圓體上의 距離를 平面上으로 投影하는 距離補整式은 다음과 같다.[4)5)]

$$(s/S)_{ij}=m_\circ\{1+(1/6r_\circ^2m_\circ^2)(y_i^2+y_iy_j+y_j^2)\} \quad (9)$$

단, $m_\circ=1.0000$

$r_\circ$ = 原點에 있어서의 平均曲率半徑

S = 球面距離

s = 平面距離

3. φ,λ에서 X, Y로의 變換

地理的 經緯度(φ,λ)로부터 平面直角座標 (X, Y)로의 投影은 既存의 舊成果의 投影計算에 적용된 Gauss의 等角二重投影法을 적용하였다.[14)15)16)17)] 또한 平面直角座標의 原點으로는 中部原點 ($\varphi_\circ=38^\circ00'00''$, $\lambda_\circ=127^\circ00'00''$)를 사용하였다.

地理的 緯度 B_P, 經度L_P로부터 球體上의 緯度 b_P, 經度l_P를 구하는 式은 다음과 같이 된다.

$$\tan\left(\frac{b_P}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{k}\tan^v\left(\frac{B_P}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin B_P}{1+e\sin B_P}\right)^{\frac{ve}{2}} \quad (10)$$

$$l_P=v\lambda \quad (11)$$

여기서,

$\lambda=L_P-L_\circ$

$v=\sqrt{1+f^2\cos^4B_\circ}$

$$k=\frac{\tan^v\left(\frac{B_\circ}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{b_\circ}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(\frac{1-e\sin B_\circ}{1+e\sin B_\circ}\right)^{\frac{ve}{2}}$$

$\sin b_\circ=\sin B_\circ/v$

球體上의 緯度 b_P, 經度 l_P로부터 球面座標 X, Y를 求하는 式은 다음과 같이 된다.

$$X=r_\circ(b'-b_\circ) \quad (12)$$

$$\sin(Y/r_\circ)=\cos b_P\cdot\sin l_P \quad (13)$$

다만

$r_\circ=a\sqrt{1-e^2}/(1-e^2\sin^2B_\circ)$

$\tan b'=\tan b_P/\cos l_P$ (14)

b'는 式(14)로 주어지는 媒介變數로서 球面上의 p點에서 主子午線에 내린 垂線의 발의 球面緯度를 나타낸다.

球面座標 X, Y로부터 平面直角座標 x, y 및 子午線収差角r를 求하는 式은 다음과 같이 된다.

$$x=X \quad (15)$$

$$y=r_\circ\ln[\cos(Y/r_\circ)/\{1-\sin(Y/r_\circ)\}]=r_\circ\log[\cos(Y/r_\circ)/\{1-\sin(Y/r_\circ)\}]/M \quad (16)$$

$$\tan r=\sin b_P\cdot\tan l_P \quad (17)$$

다만, $M=0.4342944819$ (對數의 根率)

$B_\circ, L_\circ$: 平面直角座標 原點의 地理的 緯度 및 經度

B_P, L_P : 任意의 點p에 있어서의 地理的 緯度

및 經度

x, y : 任意의 點p에 있어서의 平面直角座標의 縱軸 및 橫軸方向

b_o, l_o : 假定 球體上에서의 原點의 緯度 및 經度

b_P, l_P : 任意의 點p의 球體上에서의 緯度 및 經度

r, : 平面直角座標의 縱軸과 眞北과의 偏差를 나타내는 角, 子午線收差角

a : 地球楕圓體의 長半徑

e : 地球楕圓體의 扁心率

f : $\sqrt{e^2/(1-e^2)}$ (扁平率)

4. 適用 및 分析

이 論文에서는 國立地理院에서 1982년에 觀測한 精密三角測量 觀測値의 일부인 忠北미원, 속리지역의 13점(관측변장 26개, 평균관측거리

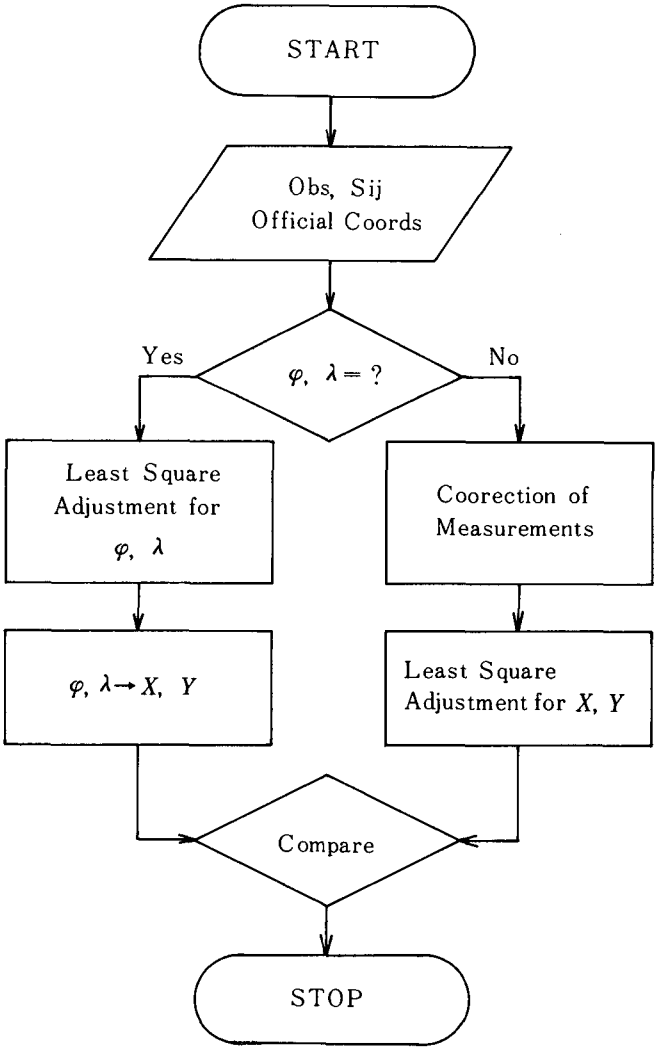

그림 1. 흐름도

10.7km)의 값을 사용하였다. 測量成果審査基準 및 作業規程에 따라 觀測한 거리를 기상보정 및 평균해면상으로 投影計算된 基準楕圓體上에서의 거리를 사용하였다.[4]

座標調整法에 의하여 測地網을 同時調整(simultaneous adjustment)하기 위하여 그림(1)과 같이 1점1방향 고정에 의한 조정이 가능하도록 프로그램을 작성하였다.[5]

φ, λ網調整時에는 距離의 觀測値 S와 舊成果를 入力데이타로 하여 Hubeny에 의하여 擴張誘導된 Gauss의 平均緯度公式(文獻 12參照)을 적용하여 X, Y網調整時에는 楕圓體上의 거리를 式(9)를 적용하여 平面上의 距離로 변환하였다.

表1. 觀測데이타 및 結果

	φ, λ網	X, Y網
觀測數	26	26
三角點數	13	13
未知數의 數	23	23
Rank Defect	0	0
剩餘觀測數	3	3
單位重量에대한標準誤差	1.66×10^{-6} rad(0.3″)	1.9(cm)
平均位置誤差 $\sigma_0\cdot\sqrt{Tr(Q)/n}$	1.03×10^{-5} rad(6.2cm)	5.8(cm)
座標의 고정	$\delta\varphi_1=0$ $\delta\lambda_1=0$ $\delta\varphi_2=0$	$\delta X_1=0$ $\delta Y_1=0$ $\delta X_2=0$

表2. X, Y網과 φ, λ網 調整 結果 (單位 : m)

測點	X, Y網		φ, λ網	
	X	Y	X	Y
1	−147956.462	48474.462	−147956.462	48474.462
2	−142576.591	59157.529	−142576.591	59157.527
3	−142854.729	68317.019	−142854.707	68317.016
4	−138758.011	78402.153	−138757.982	78402.148
5	−157202.934	48730.246	−157202.937	48730.253
6	−155217.948	58985.825	−155217.944	58985.830
7	−153869.644	70272.324	−153869.622	70272.327
8	−147388.992	74344.907	−147388.966	74344.909
9	−143907.039	85284.231	−143907.005	85284.229
10	−165782.149	59145.309	−165782.143	59145.320
11	−162865.756	66423.902	−162865.742	66423.915
12	−161635.680	77903.642	−161635.651	77903.654
13	−151532.019	83096.766	−151531.985	83696.769

觀測方程式의 係數 메트릭스는 φ, λ網의 경우는 式(7)를 X, Y網의 경우에는 (8)을 적용하였다. 正規方程式은 Gauss의 消去法을 적용하여 直接 解를 구하도록 구성되어 있으며, 최종적으로 最確値, 單位重量에 대한 標準誤差 δ_0, 각 점에 대한 位置誤差 M_P, 誤差楕圓要素 및 平均位置誤差 $(\delta_0\sqrt{T_r(Q)/n})$의 값들이 出力되도록하였다.

表3. φ, λ網과 X, Y網 調整 結果의 差異의 RMSE

	ΔX	ΔY	平均
RMSE(單位 : cm)	2.2	0.7	1.7

表4. 初期値에 따른 X, Y網 調整 結果 (單位 : m)

測點	成果(X, Y)를 適用한 結果		成果(φ, λ)를 適用한 結果*	
	X	Y	X	Y
1	−147956.500	48474.420	−147956.462	48474.462
2	−142576.570	59157.460	−142576.591	59157.529
3	−142854.658	68316.953	−142854.729	68317.019
4	−138757.883	78402.068	−138758.011	78402.153
5	−157202.972	48730.253	−157202.934	48730.246
6	−155217.930	58985.824	−155217.948	58985.825
7	−153869.566	70272.319	−153869.644	70272.324
8	−147388.890	74344.868	−147388.992	74344.907
9	−143906.876	85284.178	−143907.039	85284.231
10	−165782.133	59145.364	−165782.149	59145.309
11	−162865.701	66423.943	−162865.756	66423.902
12	−161635.564	77903.681	−161635.680	77903.642
13	−151531.868	83696.753	−151532.019	83096.766

* φ, λ를 X, Y로 變換한 結果

表5. 初期値 選擇에 따른 X, Y網 調整 最確値 差의 RMSE

	ΔX	ΔY	平均
$RMSE$(單位:cm)	9.5	4.9	7.6

單位重量의 標準誤差가 表1과 같이 φ, λ網에서 0.3″ X, Y網에서는 1.9cm이고 平均位置誤差도 X, Y網이 5.8cm, φ, λ網이 6.2cm $(1.03\times10^{-5}$ rad)이고 局部的인 網調整에서는 X, Y網 調整이 效果的임을 알 수 있다.

데이타를 처리한 결과 φ, λ網과 X, Y網調整 最確値 差의 RMSE가 表3과 같이 X軸方向이 2.2cm,

Y軸方向이 0.7cm로 나타났으며 平均은 1.7cm로써 精密三角測量에서의 水平位置決定의 目標正確度인 3cm보다 작으며 이는 실용상 부합되는 結果를 준다.

初期値選擇에 따른 X, Y網 調整 최확치의 差異의 RMSE가 X軸 方向이 9.5cm, Y軸方向이 4.5cm로 나타났으며 平均이 7.6cm로 나타났다.

5. 結 論

φ, λ網調整과 X, Y 網調整計算을 실시하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. φ, λ網調整과 X, Y網調整의 結果가 거의 같게 나타났다(表2, 表3參照)
2. 單位重量에 의한 標準誤差와 平均位置誤差가 X, Y網 1.9cm, 5.8cm이고, φ, λ網의 경우 0.3″, 6.2cm로 局部的인 網調整에는 계산이 간편한 X, Y網이 더 效果的 일 수 있다.
3. 初期値에 따른 最確値의 差의 RMSE가 X軸方向이 9.5cm, Y軸方向이 4.5cm로 나타났으나, 網調整시에 初期値 選擇을 위한 研究檢討가 必要한 것으로 思料된다.

參考文獻

1. 白殷基, 測量學, 清文閣. 1985.
2. 朝鮮總督府 臨時土地調査局, 朝鮮土地調査事業報告書, 1918年 11月.
3. Komaki, K, "The Readjustment of the Meiji First Order Triangulation Network by the Projection Method," Bulletin of the Geographical Survey Institute, Vol. XXIX, part2, 1985. 3, pp. 1~45.
4. 崔允秀, "測地網의 同時調整에 關한 研究" 서울市立大學 석사논문, 1986. 2.
5. 日本測量協會, "精密基準點測量(改訂版)", 1980.
6. Vaníček, P. and E. J. Krakiwsky, "Geodesy: the Concepts," North-Holland Publishing Co, 1982.pp 398~405.
7. Muller, Ivan I. and Karl H. Ramsayer, "Introduction to Surveying" Frederick Ungar Publishing Co., 1979, pp. 103~144.
8. 白殷基, 李榮鎭, 崔允秀, "經緯度 座標(φ, λ)에 의한 測地網의 同時調整," 大韓土木學會論文集, 第5卷, 第4號.
9. 日本測量協會, "測量の數學的基礎," 1982, pp. 273~301.
10. Mikhail, E. M., and G. Gracie, "Analysis and Adjustment of Survey Measurements." VNR. 1982, pp. 59~105, pp. 148~179.
11. Bemford, G. "Geodesy" Oxford, 1980, pp. 126~157.
12. 坪川家恒・大森又吉, "測地學 序説," 山海堂, 1968, pp. 1~12, pp. 176~195.
13. 佐藤一裕, "測地學의 基礎," 山海堂, 1984, pp. 25~158.
14. 石川甲子男, "電子計算機에 의한 Gauss 二重投影의 計算," GSI Journal No 42(1971).
15. 崔在和, "우리나라 平面直角座標에 관한 研究," 韓國測地學會誌, Vol. 1 No 2. 1983, 12, pp. 42~59.
16. 野村正七, 地圖投影法, 日本地圖 センター, 1984,pp. 303~336.
17. Robinson, A. H., "Elements of Cartography (2nd ed.)," John Wiley & Sonc, Inc.,1969. pp. 200~272.