지수적 변질과정의 재고시스템에 관한 연구
(Stochastic Inventory Model with an Exponential Decay)

金 永 敏*

Abstract

This thesis aims to find an optimal inventory of probabilistic model with an exponential decay. This system is divided into the production period and non-production period and the behavior of each period is analyzed by birth and death process. The result of this analysis gives how to decide the economic production quantity and the optimal production cycle.

Ⅰ. 서 론

재고는 기업의 생산과 판매의 주 기능을 연결하는 시스템의 주요소인 물품의 흐름이 이 시스템내의 어떤 지점에 정체되어 있는 상태로서 어떤 조직체가 미래의 수요를 위하여 보유하는 자산이다.

재고가 충분하지 않을 경우 생산이 원활이 이루어지지 못하고, 적시에 판매가 이루어질 수 없고, 반대로 과다한 경우는 기업수익성이나 자금의 유동성에 영향을 미친다.

따라서 이 자산을 어디에 어떻게 얼마의 양을 언제 보유하는가 하는 문제는 이 자산에 대한 수요의 형태, 주문여건, 재고부족비, 주문비용 등과 같은 다양한 비용과 제품의 특성에 의해 좌우되며, 특히 제품의 특성에 변질이 포함된 경우는 그 가치상에 손실을 제고문제에 고려해야 한다.

본 연구에서는 수요가 확률적 성격을 띤 경우에서 입고가 일시에 일어나지 않고 점진적으로 일어날 때 제품이 변질을 하는 재고시스템을 고려, 재고정책을 수립하여 총비용을 최소로 하는 최적발주량 및 생산기간을 결정하는 데 그 목적이 있다.

재고관리를 하기 위해 일회 주문량을 결정하는 데는 수요에 대한 성격을 사전에 알고 있는 확실한 여건하의 확정적 모형과 수요가 확률적 성격을 지니는 불확실상황하의 확률모형의 두 가지가 있다.

본 연구에서는 생산과 수요가 확률적 성격을 갖고 있는 경우에서 특별한 경우인 지수분포를 할 때에 대해 연구하였다. 또한 재고품이 변질을 할 경우에 대한 경제적 발주량을 결정하였다.

생산이 있는 기간은 고객 도착률을 생산율로 서비스율을 수요율로 대치하여 출생—소멸과정(birth and death process)을 이용하였고, 생산이 없는 기간은 이미 연구된 것을 이용하였다.

마지막 단계로 두 기간을 합친 기간에서는 한 주기에 대한 평균 재고량과 평균수요율은 가중산술평균으로 구했다. 이를 이용하여 단위시간당 평균총비용을 구하고, 이를 최소로 하는 최대재고수준을 구하여 경제적 평균발주량을 구했다.

Ⅱ. 모델의 설정 및 고찰

변질재고시스템이란 시간이 경과함에 따라 제품의 특성, 형태의 변화, 기술적인 변화에 의해 그 가치가 하락하는 재고시스템을 말한다. 일반적으로 거의 모든 제품의 시간이 경과함에 따라 변질이 된다. 다행히 모든 제품에 대해 그 변질률이 낮기 때문에 고려할 필요가 없다. 그러나 음식물이나 식품과 같은 부패식품, 알콜이나 가솔린 등과 같은 휘발성 제품, 축전지 등의 소멸제품은 변질이 매우 빠르므로 그

* 인하대학교 산업공학과

가치상의 손실을 재고문제에서 고려해야 한다.

변질은 크게 두 부류로 구분된다. 즉, 수명이 고정된 경우와 임의일 경우이다. 수명이 고정된 경우는 유효기간이 명시된 것으로 일정한 수명이 지나면 가치를 상실하는 경우이며, 임의인 경우에는 수명이 임의변수이며, 확률분포로 나타난다.

본 논문에서는 변질이 임의인 경우에서 출생—소멸과정(birth and death process)을 이용하기 위해 지수적 변질과정(exponential decay process)인 경우에 대해 다음과 같은 가정을 하였다.

〈가정〉

1. 생산은 모수가 p 인 지수분포를 한다. (unit／unit time)
2. 수요는 모수가 d 인 지수분포를 한다. (unit／unit time)
3. 제품의 수명은 임의일 경우이며 모수가 α 인 지수분포를 한다.
4. 단위당 원가는 일정하다(won／unit).
5. 일회 준비비는 일정하다(won／set-up).
6. 재고부족은 허용되지 않으며 미납품 재고도 없다.
7. 생산은 일정기간 동안만 한다.
8. 재고의 보충은 생산이 있는 기간에는 수요량과 변질량을 차감한 만큼 증가한다.
9. 생산율은 수요율보다 크다.
10. Q단위의 주문량에서 생산기간 동안의 수요량과 변질량을 차감한 량이 최대재고수준이다.
11. 변질은 제품이 재고로 받아들여져야 시작된다.

생산이 있는 기간(T_1)은 생산과 수요 그리고 변질이 함께 있는 기간으로 고객 도착률을 생산율로, 서비스율을 변질을 포함한 수요율로 대치하면 출생—소멸과정(birth and death process)과 일치한다. 따라서 각 재고수준에 대한 확률을 구할 수 있고 평균재고량과 평균수요율을 구할 수 있다.

생산율이 p, 수요율이 d, 변질률이 α, 최대재고수준을 k라 하고 G Matrix를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|ccccccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3\cdots & k-3 & k-2 & k-1 & k \\
\hline
G=0 & -p & p & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & (d+\alpha) & -(p+d+\alpha) & p & & & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & (d+2\alpha) & -(p+d+2\alpha) & p & & & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & (d+3\alpha) & -(p+d+3\alpha)\ p & & & & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & (d+4\alpha) & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
 & & & & & p & & & \\
k-3 & & & & \{d+(k-3)\alpha\} & -\{p+d+(k-3)\alpha\} & p & & \\
k-2 & & & & & \{d+(k-2)\alpha\} & -\{p+d+(k-2)\alpha\} & p & \\
k-1 & & & & & & \{d+(k-1)\alpha\} & -\{p+d+(k-1)\alpha\} & p \\
k & & & & & & & (d+k\alpha) & -(d+k\alpha)
\end{array}
$$

G Matrix의 성질에 의해 식 (1)이 성립한다.

$$P \times G = O \quad \cdots\cdots (1)$$

단, P : (k+1) Row Vector

G : (k+1)×(k+1) Matrix

O : (k+1) Row Vector

식 (1)을 전개하면

$$-pP_0+(d+\alpha)P_1=0$$
$$pP_0-(p+d+\alpha)P_1+(d+2\alpha)P_2=0$$
$$pP_1-(p+d+2\alpha)P_2+(d+3\alpha)P_3=0$$
$$pP_2-(p+d+3\alpha)P_3+(d+4\alpha)P_4=0$$
$$\vdots$$
$$pP_{k-2}\{p+d+(k-1)\alpha\}P_{k-1}+(d+k\alpha)P_k=0$$
$$pP_{k-1}-(d+k\alpha)P_k=0$$

이 된다. 따라서 일반식 P_n은 식 (2)로 표시되며 한계조건(boundary condition)은 식 (3)으로 표시된다.

$$P_n=\begin{cases} P^n \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(d+i\alpha)} P_0 & \text{for } 1 \le n \le k \\ 0 & \text{for } n < k \cdots\cdots \end{cases} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\sum_{n=0}^{k} P_n = 1 \quad \cdots\cdots (3)$$

식 (2)와 식 (3)을 연립하면 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$P_0=\frac{1}{\left(1+\sum_{n=1}^{k} P^n \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(d+i\alpha)}\right)} \quad \text{for } n=0$$

$$P_n = P^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(d+i\alpha)} P_0 \quad \text{for } 1 \le n \le k \cdots \quad \cdots\cdots (4)$$

식 (4)를 이용하여 각 재고수준에 대한 확률값이 정해지고 평균재고량 $E[I_1]$은

$$E[I_1] = \sum_{n=0}^{k} n \cdot P_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

가 되며 변질을 포함한 평균수요율은 식 (6)이 된다.

$$E[D_1] = \sum_{n=1}^{k} (d + n\theta) P_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

식 (6)을 이용하여 평균생산기간 $E[T_1]$ 을 구할 수 있다. 즉, $E[T_1]$ 동안의 생산량에서 $E[T_1]$ 동안의 수요량과 변질량을 차감하면 최대재고수준이 되는 바를 이용하여 구할 수 있다. 즉,

$$p\, E[T_1] - E[D_1]\; E[T_1] = k$$

$$E[T_1] = \frac{k}{P - E[D_1]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

이 된다.

생산이 없는 기간 (T_2) 은 생산은 없고 수요와 변질만이 있는 기간으로 최대재고수준 k개를 소비하는 과정이다. 이때의 각 재고수준의 변환과정은 그림 1로 표시된다.

t 시점	(t + Δt) 시점	
n	n−1	$d \cdot \Delta t + n\alpha \cdot \Delta t$
n	n	$1 - d\,\Delta t - nd \cdot \Delta t$
n+1	n	$d \cdot \Delta t + (n+1)\, d \cdot \Delta t$
n	n	
1	0	$d \cdot \Delta t + d \cdot \Delta t$
0	0	$1 - p \cdot \Delta t$

그림 1. 변질이 있는 경우의 변화과정

그림 1을 수식으로 표현하면

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n+1}(t)\{d \cdot \Delta t + (n-1)\alpha \cdot \Delta t\} + P_n(t)\{1 - d \cdot \Delta t - n\alpha \cdot \Delta t\} \quad \text{for} \quad 1 \leq n \leq k-1$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_1(t)\{d \cdot \Delta t + \alpha \cdot \Delta t\} + P_0(t)\{1 - P \cdot \Delta t\} \quad \text{for} \quad n = 0$$

이 된다. 이를 정리하여 양변을 Δt 로 나누어 주어 식 (8)을 얻는다.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\{d + (n-1)\alpha\} + P_n(t)\{-d - n\alpha\} \quad \text{for} \quad 1 \leq n \leq k-1$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)(d+\alpha) + P_0(t)(-p) \quad \text{for} \quad n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

여기서 확률분포가 안정된 상태라 하면, 즉 $t \to \infty$일 때

$$\lim_{t \to \infty} P_n(t+\Delta t) = P_n(\infty) = P_n$$

이라 하면 식 (a)가 성립한다.

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(\infty+\Delta t) - P_n(\infty)}{\Delta t} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 적용시키면

$$0 = P_{n+1}\{d + (n+1)\alpha\} + P_n(-d - n\alpha) \quad \text{for} \quad 1 \leq n \leq k-1$$

$$0 = P_1(d+\alpha) + P_0(-p) \quad \text{for} \quad n = 0$$

이 되며, 일반식 P_n 을 구하면 식 (10)이 되고 한계조건(boundary condition)은 식 (11)이 된다.

$$P_n = \frac{p}{d + n\alpha} P_0 \quad \text{for} \quad 1 \leq n \leq k \cdots\cdots \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{k} P_n = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)을 연립하여 식 (12)를 얻는다.

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{d + n\alpha}} \quad \text{for} \quad n = 0$$

$$P_n = \frac{p}{d+n\alpha} \left(\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{d + i\alpha}} \right) \quad \text{for} \quad 1 \leq n \leq k \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

식 (12)를 이용하여 평균재고량 $E[I_2]$와 변질을 포함한 평균수요율을 $E[D_2]$를 구할 수 있다. 즉, 식 (13)과 식 (14)로 표시된다.

$$E[I_2] = \sum_{n=0}^{k} n \cdot P_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

$$E[D_2] = \sum_{n=1}^{k} (d + n\theta) P_n \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

식 (14)를 사용하여 생산이 없는 기간의 평균기간 $E[T_2]$를 구할 수 있다. 즉, 최대재고수준에서 생산이 없는 기간 동안의 수요량과 변질량을 차감하면 0이 된다. 따라서 $E[T_2]$는 식 (15)로 표시된다.

$$K - E[D_2]\; E[T_2] = 0$$

$$E[T_2] = \frac{1}{E[D_2]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

생산이 있는 기간 (T_1)과 생산이 없는 기간 (T_2)을 합한 기간인 한주기 동안의 평균재고량은 식 (5)와 식 (13)의 산술평균으로, 평균수요율은 식 (6)과 식 (14)의 산술평균으로 구할 수 있다. 즉,

$$E[I] = \frac{E[I_1] \times E[T_1] + E[I_2] \times E[T_2]}{E[T_1] + E[T_2]} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

$$E[D] = \frac{E[D_1] \times E[T_1] + E[D_2] \times E[T_2]}{E[T_1] + E[T_2]} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

가 되며, 이를 이용하여 한 주기 동안의 단위시간당 평균총비용을 구할 수 있다. 이때의 총비용에는 변질에 의한 손실이 포함된다. 즉, E〔TC〕는 단위시간당 준비비용과 변질에 포함한 수요에 대한 단위시간당 생산비용과 단위시간당 재고유지비를 합친 것이 된다. 이는 식 (18)로 나타난다.

$$E〔TC〕=\frac{C_1}{E〔T_1〕+E〔T_2〕}+C_2\cdot E〔I〕+C_3\cdot E〔D〕 \quad \cdots\cdots (18)$$

단, E〔TC〕: 단위시간당 평균총비용
E〔T_1〕: 생산이 있는 기간의 평균기간
E〔T_2〕: 생산이 없는 기간의 평균기간
E〔I〕: 평균재고량
E〔D〕: 변질을 포함한 평균수요율
C_1: 일회준비비
C_2: 단위시간 단위당 재고유지비
C_3: 단위당 생산원가

식 (18)은 최대재고수준 (K)에 따라 변화한다. 즉, K가 증가함에 따라 한 주기의 기간이 증가하여 단위시간당 평균준비비는 감소하고, 반대로 단위시간당 평균재고유지비와 평균생산비는 증가한다. 이를 그림으로 표시하면 그림 2가 된다.

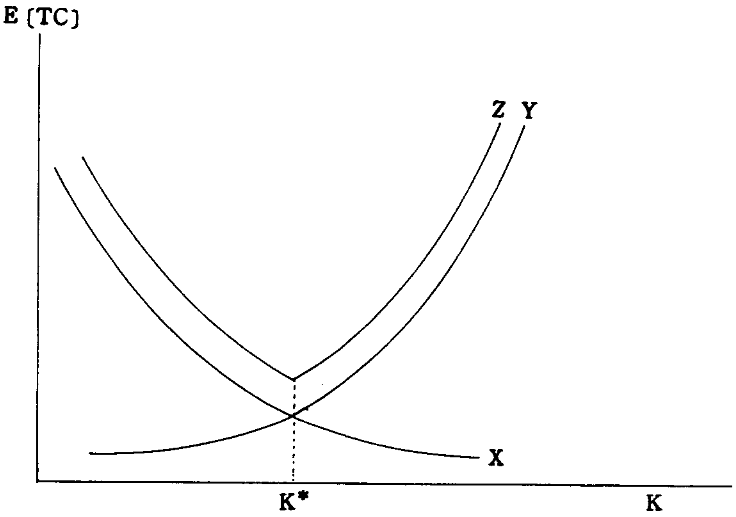

그림 2. 최대재고수준(K)의 변화에 따른 비용곡선

단, X: 단위시간당 평균준비비용 곡선
Y: 단위시간당 평균재고유지비용과 평균생산비용의 합의 곡선
Z: 단위시간당 평균총비용 곡선

그림 2에서 본 바와같이 단위시간당 평균총비용을 최소로 하는 최적의 최대재고수준 (K*)는 식 (19)를 만족해야 한다.

$$E〔TC(K^*+1)〕-E〔TC(K^*)〕\geq 0$$
$$E〔TC(K^*-1)〕-E〔TC(K^*)〕\geq 0 \quad \cdots (19)$$

식 (19)를 만족하는 K*를 구하여 생산이 있는 기간의 경제적 평균기간 E〔T_1*〕와 경제적 평균발주량 E〔Q*〕를 식 (20)과 식 (21)로 구한다.

$$E〔T_1^*〕=\frac{K^*}{P-E〔D_1〕} \quad \cdots\cdots (20)$$

$$E〔Q^*〕=P\cdot E〔T_1^*〕 \quad \cdots\cdots (21)$$

재고보충이 일시에 일어나지 않고 점증적으로 일어나는 변질제품의 확률적 재고시스템은 식 (19)를 만족하는 최적의 최대재고수준 (K*)을 찾음으로써 경제적 평균발주량이 결정된다.

Ⅲ. 결 론

수요가 확률적 성질을 가지고 있는 경우는 확정적일 때와 달리 확률과정론(stochastic process)을 사용하여 재고시스템을 분석하여야 한다. 또한 제품이 변질을 하는 경우는 변질에 의한 비용을 고려해야 한다. 따라서 본 연구에서는 제품이 시간이 경과함에 따라 가치상의 손실이 발생하는 경우의 확률적 재고시스템을 마아코브 과정(Markov process)의 특별한 경우인 출생-소멸과정(birth and death process)을 사용하여 분석하였다.

그 결과 평균총비용을 최소로 하는 경제적 평균발주량과 평균생산기간은 식 (19)를 만족하는 최적의 최대재고수준 (K*)을 찾음으로써 식 (20)과 식 (21)로 얻을 수 있다. 또한 적용사례에서의 결과에서 변질률이 증가함에 따라 평균총비용이 증가하며, 경제적

평균발주량과 평균생산기간은 감소한다고 분석되었으나 지면 관계상 컴퓨터 프로그래밍과 적용사례는 생략하였다.

본 연구에서는 수요가 지수분포를 할 때에 대해 다루었는데 수요가 보다 일반적인 분포를 할 때에 대한 연구는 다음 과제로 필요하다.

Reference

1. Albright, S.C., Optimal Stock Depletion Policies with Stochastic Lives, *Management Science*, vol. 22, No. 8, pp. 852—857, 1976.
2. Avishai, M. and Uri, Y., Optimal Entering Rules for Customer with Option at An M／G／I Queue, *Management Science*, vol. 29, No. 2, pp. 174 — 184, 1983.
3. Bezalel Gravish, B. and P. Schweitzer, The Markovian Queue with Bounded Waiting Time, *Management Science*, vol. 23, No. 12, pp. 1349 — 1357, 1977.
4. Choi, Jin-Yeong & Kim, Man-Sik, A Continuos Review(S, S) Inventory Model in which Depletion is due to Demand and Loss of Units, *Journal of Korean Institute of Industrial Engineers*, vol. 11, No. 1, pp. 33 — 40, 1985.
5. Duermeyer, B.L., A Multi — Type Production System for Perishable Inventories, *Operations Research*, vol. 26, No. 3, 1978.
6. Fries, B., Optimal Order Policy for Perishable Commodity with Fixed Life Time, *Operations Research*, vol. 23, No. 1, pp. 46 — 61, 1975.
7. Hillier & Lieberman, *Introduction to Operations Research*, Holden-Day, Inc., 1980.
8. Nadder, E., *Inventory Systems*, John Willey and Sons, 1966.
9. Nahmias, Perishable Inventory Theory : A Review, *Operations Research*, vol. 20, No. 4, pp. 680 — 708, 1982.
10. Prabku, N. U. *Queues and Inventories*, John Willey & Sons, Inc., 1965.
11. Wolff, R. R., Poisson Arrivals See Time Averages, *Operations Research*, vol. 30, No. 2, pp. 223 — 231, 1982.