

二次元 適應 Lattice 알고리즘의 收斂特性에 관한 研究

(A Study on the Convergence Properties of the Two-dimensional Adaptive Lattice Algorithm)

白 興 基*, 李 鍾 珏**

(Heung Ki Baik and Chong Kak Lee)

要 約

本 論文은 Parker와 Kayran에 의하여 提案된 2次元 lattice 필터에 gradient search 기법을 適用하여 反射係數를 循環的으로 구할 수 있는 새로운 2次元 適應 lattice 알고리즘의 開發 및 그 收斂特性의 解析에 關하여 研究한 것이다.

또 2次元 適應 lattice 알고리즘에 μ 알고리즘을 適用하여 2次元 適應 lattice μ 알고리즘을 얻었으며, 2次元 適應 lattice μ 알고리즘이 2次元 適應 lattice 알고리즘에 비하여 μ 값이 작을 때 상대적으로 收斂速度가 커짐을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

Abstract

This paper describes a new two-dimensional adaptive lattice algorithm which determines reflection coefficients recursively by applying the gradient search technique to a two-dimensional lattice filter proposed by Parker and Kayran. The convergence characteristics of the proposed algorithm are also described. A new two-dimensional adaptive lattice μ algorithm has been obtained through the application of the μ algorithm to the two-dimensional adaptive lattice algorithm. Computer simulation proves that the convergence speed of the two-dimensional adaptive lattice μ algorithm is relatively higher than that of the conventional adaptive lattice algorithm when μ has a small value.

I. 序 論

1次元 lattice 필터는 豫測誤差(prediction error)의 直交性(orthogonality)에 의하여 反射係數의 收斂速度가 크고 필터의 最適次數를 쉽게 결정할 수 있으며, word length에 대한 感度가 낮아 音聲處理, 雜音除去, 스펙

트럼 推定 등에 널리 이용된다.^(1,2)

이와 같은 lattice 필터의 장점으로 인하여 2次元 lattice 필터의 具現에 대해서 많은 관심을 가지게 되었다. Marzetta는 反射係數와 minimum phase 誤差 필터 사이의 관계를 연구하였고,⁽³⁾ Parker와 Kayran은 1次元을 2次元으로 확장한 2次元 lattice 필터의 구조를 提案하였다.⁽⁴⁾ Parker와 Kayran에 의하여 提案된 2次元 lattice 필터에서는 데이터를 블럭처리(block processing)하여 反射係數를 구한다.

1次元 lattice 필터의 反射係數를 구하는 방법은 여러가지 있으나^(5,6) 循環的으로 구하는 알고리즘이 대부분이며 이들 알고리즘의 收斂特性은 대체로 알려져

*正會員, 全北大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chonbuk National Univ.)

**正會員, 서울大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul National Univ.)

接受日字: 1986年 2月 17日

있다.¹⁶⁾ 그러나 지금까지의 연구에 의하면 2次元 데이터의 경우에는 블럭처리하기 때문에 데이터의 실시간처리(real time processing)가 곤란하다. 2次元 데이터를 실시간처리하는 방법으로 最適係數를 循環의으로 구하는 방법이 제시되어 있으나,¹⁷⁾ 이 방법은 LMS 알고리즘을 2次元에 適用한 것으로 2次元 데이터를 1次元 데이터로 풀어 처리하기 때문에 엄밀한 의미에서 2次元 適應 알고리즘이라 할 수 없다.

본 研究에서는 Parker와 Kayran이 提案한 2次元 lattice 필터에 gradient search 기법을 적용하여 反射係數를 循環의으로 구하는 새로운 2次元 適應 lattice 알고리즘을 提案하고 이 알고리즘의 收斂特性을 解析 하였으며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 본 논문에서 提案한 알고리즘에 의하여 구한 反射係數가 Parker와 Kayran이 提案한 블럭처리 방법에 의하여 구한 最適 反射係數와 일치함을 확인하였다.

또 μ 알고리즘¹⁸⁾을 2次元 適應 lattice 알고리즘에 適用하여 收斂速度가 더 큰 2次元 適應 lattice μ 알고리즘을 提案하였으며 이 알고리즘이 μ 값이 작을때 상대적으로 收斂速度가 증가함을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

II. 2次元 lattice 필터

Parker와 Kayran이 提案한 2次元 lattice 필터를 1次元 lattice 필터를 확장한 것이다.⁴⁾ 이제 이 확장 과정에 대하여 간단히 살펴보기로 하자

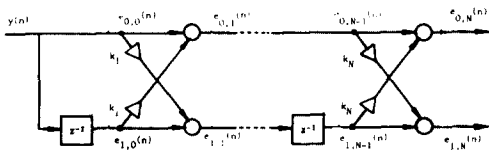


그림 1. 1次元 lattice 필터의 구조
Fig. 1. One-dimensional lattice filter structure.

그림 1은 1次元 lattice 필터의 구조이다. 그림 1에서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 e_{0,o}(n) &= e_{1,o}(n) = y(n) & (1) \\
 e_{0,p}(n) &= e_{0,p-1}(n) + k_p \cdot e_{1,p-1}(n-1) & (2) \\
 e_{1,p}(n) &= e_{1,p-1}(n-1) + k_p \cdot e_{0,p-1}(n) & (3)
 \end{aligned}$$

여기서 $e_{0,p}(n)$, $e_{1,p}(n)$ 은 각각 p次段에서의 順方向豫測誤差(forward prediction error)와 逆方向豫測誤差(backward prediction error)를 나타낸다.

위 식에 나타난 바와 같이 이 豫測誤差는 初期值로 $y(n)$ 을 갖으며 段數가 증가하면 p次段의 誤差는 p-1

次段의 誤差 $e_{0,p-1}(n)$, $e_{1,p-1}(n-1)$ 과 反射係數 k_p 와 의 線型結合으로 결정된다.

이와 같은 lattice 필터의 概念을 2次元에 도입하여 보자. 2次元의 경우에는 x, y 방향에 따라 각각 順方向, 逆方向의 組合으로 이루어진 4개의 誤差 $e_{00,p}(m,n)$, $e_{01,p}(m,n)$, $e_{10,p}(m,n)$, $e_{11,p}(m,n)$ 을 생각할 수 있으며, 이들 誤差는 p-1次段의 誤差 $e_{00,p-1}(m,n)$, $e_{01,p-1}(m,n-1)$, $e_{10,p-1}(m-1,n)$, $e_{11,p-1}(m-1,n-1)$ 과 反射係數 $k_{01,p}$, $k_{10,p}$, $k_{11,p}$ 의 線型結合으로 결정된다. 이때 誤差의 初期值는 $y(m,n)$ 이 된다.

이것을 식으로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 e_{00,p}(m,n) &= e_{00,p-1}(m,n) + k_{01,p} \cdot e_{01,p-1}(m,n-1) \\
 &\quad + k_{10,p} \cdot e_{10,p-1}(m-1,n) + k_{11,p} \cdot e_{11,p-1}(m-1,n-1) & (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{01,p}(m,n) &= e_{01,p-1}(m,n-1) + k_{01,p} \cdot e_{00,p-1}(m,n) \\
 &\quad + k_{10,p} \cdot e_{11,p-1}(m-1,n-1) + k_{11,p} \cdot e_{10,p-1}(m-1,n) & (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{10,p}(m,n) &= e_{10,p-1}(m-1,n) + k_{01,p} \cdot e_{11,p-1}(m-1,n-1) \\
 &\quad + k_{10,p} \cdot e_{00,p-1}(m,n) + k_{11,p} \cdot e_{01,p-1}(m,n-1) & (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{11,p}(m,n) &= e_{11,p-1}(m-1,n-1) + k_{01,p} \cdot e_{10,p-1}(m-1,n) \\
 &\quad + k_{10,p} \cdot e_{01,p-1}(m,n-1) + k_{11,p} \cdot e_{00,p-1}(m,n) & (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{00,o}(m,n) &= e_{01,o}(m,n) = e_{10,o}(m,n) = e_{11,o}(m,n) = y(m,n) & (8)
 \end{aligned}$$

식 (4)~식 (8)에 따른 2次元 lattice 필터의 구조는 그림 2와 같다.

식 (4)~식 (7)은 벡터를 이용하여 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 e_{00,p}(m,n) &= e_{00,p-1}(m,n) + K_P^T \cdot E_{00,p-1}(m,n) & (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{01,p}(m,n) &= e_{01,p-1}(m,n-1) + K_P^T \cdot E_{01,p-1}(m,n) & (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{10,p}(m,n) &= e_{10,p-1}(m-1,n) + K_P^T \cdot E_{10,p-1}(m,n) & (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{11,p}(m,n) &= e_{11,p-1}(m-1,n-1) + K_P^T \cdot E_{11,p-1}(m,n) & (12)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 K_P &= [k_{01,p}, k_{10,p}, k_{11,p}]^T \\
 E_{00,p}(m,n) &= [e_{01,p}(m,n-1), e_{10,p}(m-1,n), e_{11,p}(m-1,n-1)]^T & (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{01,p}(m,n) &= [e_{00,p}(m,n), e_{11,p}(m-1,n-1), e_{10,p}(m-1,n)]^T & (14)
 \end{aligned}$$

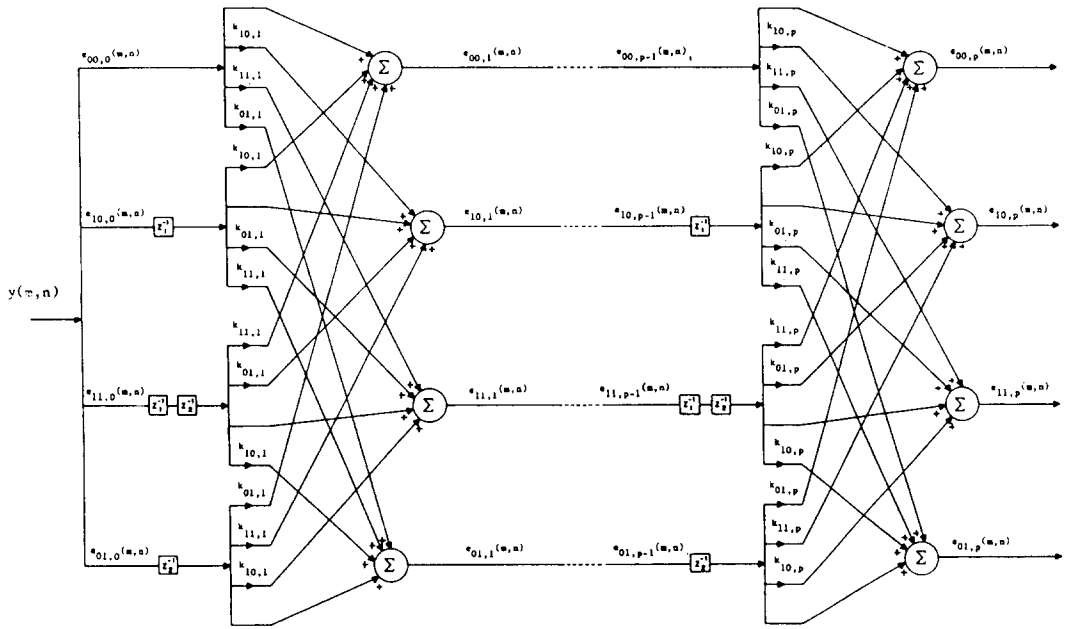


그림 2. 2次元 lattice 필터의 구조
Fig. 2. Two-dimensional lattice filter structure.

$$E_{10,p}(m, n) = [e_{11,p}(m-1, n-1), e_{00,p}(m, n), e_{01,p-1}(m, n-1)]^T \quad (15)$$

$$E_{11,p}(m, n) = [e_{10,p}(m-1, n), e_{01,p}(m, n-1), e_{00,p}(m, n)]^T \quad (16)$$

이고 []^T는 轉置行列을 나타낸다.

反射係數벡타 K_p 는 다음과 같이 정의되는 平均自乘誤差(mean square error) J_p 를 最小化하여 얻는다.

$$J_p = E\{e_p^2(m, n)\} = E\{\alpha_{00} \cdot e_{00,p}^2(m, n) + \alpha_{01} \cdot e_{01,p}^2(m, n) + \alpha_{10} \cdot e_{10,p}^2(m, n) + \alpha_{11} \cdot e_{11,p}^2(m, n)\} \quad (17)$$

여기서 $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ 은 誤差에 대한 무게(weight)로서 각각 0, 1의 값을 갖는다.

식 (17)에 식 (9)~식 (12)를 대입하여 정리하면 平均自乘誤差는 다음과 같이 된다.

$$J_p = d_p + 2K_p^T \cdot P_p + K_p^T \cdot R_p \cdot K_p \quad (18)$$

여기서

$$d_p = E\{\alpha_{00} \cdot e_{00,p-1}^2(m, n) + \alpha_{01} \cdot e_{01,p-1}^2(m, n-1) + \alpha_{10} \cdot e_{10,p-1}^2(m-1, n) + \alpha_{11} \cdot e_{11,p-1}^2(m-1, n-1)\} \quad (19)$$

$$P_p = E\{\alpha_{00} \cdot e_{00,p-1}(m, n) \cdot E_{00,p-1}(m, n) + \alpha_{01} \cdot e_{01,p-1}(m, n-1) \cdot E_{01,p-1}(m, n) + \alpha_{10} \cdot e_{10,p-1}(m-1, n) \cdot E_{10,p-1}(m, n) + \alpha_{11} \cdot e_{11,p-1}(m-1, n-1) \cdot E_{11,p-1}(m, n)\}$$

$$+ \alpha_{11} \cdot e_{11,p-1}(m-1, n-1) \cdot E_{11,p-1}(m, n)] \quad (20)$$

$$R_p = E\{\alpha_{00} \cdot E_{00,p-1}(m, n) \cdot E_{00,p-1}(m, n)^T + \alpha_{01} \cdot E_{01,p-1}(m, n) \cdot E_{01,p-1}(m, n)^T + \alpha_{10} \cdot E_{10,p-1}(m, n) \cdot E_{10,p-1}(m, n)^T + \alpha_{11} \cdot E_{11,p-1}(m, n) \cdot E_{11,p-1}(m, n)^T\} \quad (21)$$

이며 P_p, R_p 는 각각 $3 \times 1, 3 \times 3$ 行列이다.

식 (18)을 보면 平均自乘誤差 J_p 는 反射係數벡타 K_p 의 2次式으로 표시되기 때문에 平均自乘誤差 J_p 는 유일한 最小値를 갖는다. 따라서 다음과 같이 기울기 (gradient) ∇_p 를 0으로 놓고 풀면 平均自乘誤差 J_p 를 最小로 하는 最適反射係數 벡타 K_p^* 가 얻어진다.

$$\nabla_p = \frac{\partial J_p}{\partial K_p} = 2P_p + 2R_p \cdot K_p = 0 \quad (22)$$

$$K_p^* = -R_p^{-1} \cdot P_p \quad (23)$$

따라서 J_p 의 最小値 $J_{p, \min}$ 은 다음과 같이 된다.

$$J_{p, \min} = d_p + K_p^{*T} \cdot P_p \quad (24)$$

식 (23)를 보면 2次元 lattice 필터에서 最適反射係數 벡타를 구하는 식은 1次元 TDL 필터(tapped-delay line 필터)의 Wiener-Hopf식의 行列형태와 유사함을

알 수 있다. (次數가 3인 1次元 TDL 필터의 Wiener-Hopf 식에 해당된다.)^[10]

1次元 필터에서 TDL 필터의 경우에는 最適係數를 구하는데 行列式을 풀어야 하는 반면,^[10] lattice 필터의 경우에는 각 段의 係數가 서로 독립적으로 反結合(decouple)되어 있어 각 段별로 스칼라(scalar) 처리를 하면 된다.^[7]

2次元 필터에서 TDL 필터의 경우에는 最適係數를 구하는 식은 일반적으로 존재하지 않으며 2次元 데이터를 1次元으로 풀어 1次元 TDL 필터처럼 最適係數를 구하는 방법이 있으나,^[11] 이것은 엄밀한 의미에서 2次元 適應 필터라 할 수 없다. 반면에 lattice 필터의 경우에는 1次元 TDL 필터와 마찬가지로 次數가 3인 行列式을 풀면 最適反射係數가 얻어지기 때문에 2次元 데이터를 처리하는데 있어서 2次元 適應 필터로 적당하다.

III. 2次元 適應 Lattice 알고리즘

1. 2次元 適應 Lattice 알고리즘의 誘導

식 (23)에 의하여 最適反射係數 벡터 K_P^* 를 구하는데는 많은 計算量이 필요하므로 steepest descent 방법을 이용하여 다음과 같이 循環的(recursive)으로 구한다.

$$K_P(m_{j+1}, n_{j+1}) = K_P(m_j, n_j) + \mu [-\nabla_P(m_j, n_j)] \quad (25)$$

여기서 (m_j, n_j) 는 time index j 에서의 좌표이다.

∇_P 역시 많은 計算量이 필요하므로 다음과 같이 瞬時值 $\hat{\nabla}_P$ 으로 近似化하면 알고리즘 I 이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_P(m_j, n_j) &= \frac{\partial e_P^*(m_j, n_j)}{\partial K_P(m_j, n_j)} \\ &= 2e_P(m_j, n_j) \frac{\partial e_P(m_j, n_j)}{\partial K_P(m_j, n_j)} \\ &= 2[\alpha_{00} \cdot e_{00,P}(m_j, n_j) \cdot E_{00,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{01} \cdot e_{01,P}(m_j, n_j) \cdot E_{01,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{10} \cdot e_{10,P}(m_j, n_j) \cdot E_{10,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{11} \cdot e_{11,P}(m_j, n_j) \cdot E_{11,P-1}(m_j, n_j)] \end{aligned} \quad (26)$$

Algorithm I

$$\left\{ \begin{aligned} K_P(m_{j+1}, n_{j+1}) &= K_P(m_j, n_j) + \mu [-\hat{\nabla}_P(m_j, n_j)] \quad (27) \\ \hat{\nabla}_P(m_j, n_j) &= 2[\alpha_{00} \cdot e_{00,P}(m_j, n_j) \cdot E_{00,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{01} \cdot e_{01,P}(m_j, n_j) \cdot E_{01,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{10} \cdot e_{10,P}(m_j, n_j) \cdot E_{10,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{11} \cdot e_{11,P}(m_j, n_j) \cdot E_{11,P-1}(m_j, n_j)] \end{aligned} \right. \quad (28)$$

1次元 lattice 필터에서는 適應 lattice μ 알고리즘이 適應 lattice 알고리즘에 비해 收斂速度가 크다는 사실이 알려져 있다.^[7] 2次元 適應 lattice μ 알고리즘을 誘導하기 위하여 2次元 適應 lattice 알고리즘에 μ 알고리즘을 適用하여 보자.

식 (18)와 식 (25)에서 J_P 는 K_P 의 2次式으로 표시되고 K_P 는 μ 의 1次式으로 표시되므로 J_P 는 μ 의 2次式으로 표시된다. 따라서 steepest descent 방법을 適用하여 平均自乘誤差 J_P 를 最小化하는 방향으로 μ 를 변화시키면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$K_P(m_{j+1}, n_{j+1}) = K_P(m_j, n_j) + \mu_P(m_j, n_j) [-\nabla_P(m_j, n_j)] \quad (29)$$

$$\mu_P(m_j, n_j) = \mu_P(m_{j-1}, n_{j-1}) + \rho [-\nabla_P'(m_j, n_j)] \quad (30)$$

여기서

$$\nabla_P(m_j, n_j) = \frac{\partial J_P}{\partial K_P(m_j, n_j)} \quad (31)$$

$$\nabla_P'(m_j, n_j) = \frac{\partial J_P}{\partial \mu_P(m_{j-1}, n_{j-1})} \quad (32)$$

이고 ρ 는 μ 값에 대한 適應利得이다.

식 (32)의 $\nabla_P'(m_j, n_j)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \nabla_P'(m_j, n_j) &= \frac{\partial J_P}{\partial \mu_P(m_{j-1}, n_{j-1})} \\ &= \left[\frac{\partial J_P}{\partial K_P(m_j, n_j)} \right]^T \cdot \frac{\partial K_P(m_j, n_j)}{\partial \mu_P(m_{j-1}, n_{j-1})} \\ &= \nabla_P(m_j, n_j)^T \cdot [-\nabla_P(m_{j-1}, n_{j-1})] \end{aligned} \quad (33)$$

식 (34)를 식 (31)에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$K_P(m_{j+1}, n_{j+1}) = K_P(m_j, n_j) + \mu_P(m_j, n_j) [-\nabla_P(m_j, n_j)] \quad (34)$$

$$\mu_P(m_j, n_j) = \mu_P(m_{j-1}, n_{j-1}) + \rho \cdot \nabla_P^T(m_j, n_j) \cdot \nabla_P(m_{j-1}, n_{j-1}) \quad (35)$$

위식에서 알고리즘 I 과 마찬가지로 $\nabla_P(m_j, n_j)$ 를 $\hat{\nabla}_P(m_j, n_j)$ 으로 近似化하면 알고리즘 II 가 된다.

Algorithm II

$$\left\{ \begin{aligned} K_P(m_{j+1}, n_{j+1}) &= K_P(m_j, n_j) + \mu_P(m_j, n_j) [-\hat{\nabla}_P(m_j, n_j)] \quad (36) \\ \mu_P(m_j, n_j) &= \mu_P(m_{j-1}, n_{j-1}) + \rho \cdot \hat{\nabla}_P^T(m_j, n_j) \cdot \hat{\nabla}_P(m_{j-1}, n_{j-1}) \quad (37) \\ \hat{\nabla}_P(m_j, n_j) &= 2[\alpha_{00} \cdot e_{00,P}(m_j, n_j) \cdot E_{00,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{01} \cdot e_{01,P}(m_j, n_j) \cdot E_{01,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{10} \cdot e_{10,P}(m_j, n_j) \cdot E_{10,P-1}(m_j, n_j) \\ &\quad + \alpha_{11} \cdot e_{11,P}(m_j, n_j) \cdot E_{11,P-1}(m_j, n_j)] \end{aligned} \right. \quad (38)$$

알고리즘 II에서 $\rho=0$ 이면 알고리즘 I 과 같게 된다.

2. 二次元 適應 Lattice 알고리즘의 收斂特性 解析
 알고리즘 I 의 收斂特性을 解析하여 보자. 二次元 適應 lattice 알고리즘인 알고리즘 I 은 1次元 LMS 알고리즘과 유사하기 때문에 Widrow 등에 의하여 행해진 LMS 알고리즘의 收斂特性 解析방법을 그대로 適用할 수 있다.¹⁾

식 (18) 와 식 (24) 에 의하여 平均自乘誤差 J_P 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J_P = J_{P, \min} + (K_P - K_P^*)^T \cdot R_P \cdot (K_P - K_P^*) \quad (39)$$

따라서 기울기(gradient) ∇_P 는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\nabla_P = 2 \cdot R_P \cdot (K_P - K_P^*) \quad (40)$$

여기서 $K_P - K_P^* = L_P$ 라 놓으면 식 (25) 은 다음과 같이 된다.

$$K_P(m_{j+1}, n_{j+1}) - K_P^* = K_P(m_j, n_j) - K_P^* + \mu [-\nabla_P(m_j, n_j)] \quad (41)$$

$$L_P(m_{j+1}, n_{j+1}) = [I - 2\mu \cdot R_P] \cdot L_P(m_j, n_j) \quad (42)$$

誤差의 相關行列(correlation matrix) R_P 는 대칭(symmetric) 이고 positive definite 이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_P = Q_P \cdot \Lambda_P \cdot Q_P^{-1} = Q_P \cdot \Lambda_P \cdot Q_P^T \quad (43)$$

여기서 Q_P 는 行列 R_P 의 orthonormal modal 行列이고, Λ_P 는 對角要素(diagonal element) 가 行列 R_P 의固有值(eigen value) 인 對角行列이다.

$$\Lambda_P = \text{diag}[\lambda_{P,1}, \lambda_{P,2}, \lambda_{P,3}] \quad (44)$$

行列 Q_P 를 이용하여 새로운 벡터 L_P' 를 다음과 같이 정의한다.

$$L_P' = Q_P^{-1} \cdot L_P \quad L_P = Q_P \cdot L_P' \quad (45)$$

식 (46) 의 변환에 의하여 다음 식의 성립한다.

$$K_P' = Q_P^{-1} \cdot K_P \quad K_P = Q_P \cdot K_P' \quad (46)$$

$$J_P = J_{P, \min} + L_P'^T \cdot R_P \cdot L_P' = J_{P, \min} + L_P'^T \cdot \Lambda_P \cdot L_P' \quad (47)$$

$$L_P'(m_{j+1}, n_{j+1}) = [I - 2\mu \Lambda_P] \cdot L_P'(m_j, n_j) \quad (48)$$

이제 反射係數벡터 K_P 가 最適反射係數 벡터 K_P^* 로 收斂하기 위한 조건을 구해 보자.

식 (48) 에서 $L_P'(m_j, n_j)$ 가 0으로 收斂하면 $L_P(m_j, n_j)$ 가 0으로 收斂하게 되고 $K_P(m_j, n_j)$ 는 K_P^* 로 收斂하게 된다. 식 (48) 를 보면 벡터 $L_P'(m_j, n_j)$ 의 각 要素가 서로 結合되어 있지 않으므로 i 번째 行만 생각하

여 보면 식 (49)는 다음과 같이 된다.

$$l_{P,i}'(m_{j+1}, n_{j+1}) = (1 - 2\mu \lambda_{P,i}) \cdot l_{P,i}'(m_j, n_j) = \gamma_{P,i} \cdot l_{P,i}'(m_j, n_j) \quad (49)$$

여기서 $l_{P,i}'$ 는 벡터 L_P 의 i 번째 要素이다.

식 (49) 에서 $l_{P,i}(m_j, n_j)$ 가 0으로 收斂하기 위한 조건은 다음과 같이 구해진다.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{P,i}} \quad (50)$$

따라서 反射係數벡터 $K_P(m_j, n_j)$ 가 最適反射係數 벡터 K_P^* 로 收斂하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (51)$$

여기서 λ_{\max} 는 行列 R_P 의 固有值중에서 최대값이다. 이제 i 번째 行에서 反射係數가 收斂할 때의 時定數를 구해 보자.

식 (49) 은 等比數列의 형태이며 等比數列을 나타내는데에는 일반적으로 指數函數가 사용된다. 만일 반복주기(iteration cycle)를 단위시간(unit time)으로 잡고 收斂速度가 작다고 가정하면 時定數 $\tau_{P,i}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \tau_{P,i} &= 1 - 2\mu \lambda_{P,i} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\tau_{P,i}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\tau_{P,i}} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\tau_{P,i} = \frac{1}{2\mu \cdot \lambda_{P,i}} \quad (53)$$

또 平均自乘誤差 J_P 의 learning curve의 時定數는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \tau_{P,i, mse} &= \frac{1}{2} \cdot \tau_{P,i} \\ &= \frac{1}{4\mu \cdot \lambda_{P,i}} \end{aligned} \quad (54)$$

앞에서 설명한 바와 같이 二次元 適應 lattice 알고리즘은 1次元 LMS 알고리즘과 유사하기 때문에 二次元 適應 lattice μ 알고리즘은 1次元 LMS μ 알고리즘과 유사하다. 따라서 1次元 LMS μ 알고리즘이 종래의 LMS 알고리즘에 비하여 收斂速度가 증가한다는 사실이 알려져 있기 때문에¹⁾ 二次元 適應 lattice μ 알고리즘이 二次元 適應 lattice 알고리즘에 비하여 收斂速度가 증가함을 기대할 수 있다.

IV. 컴퓨터 시뮬레이션 結課 및 檢討

시뮬레이션에 사용된 人力信號 $y(m, n)$ 은 크기가

64×64인信號로서 다음과 같은 2次元 all pole 필터 $1/A(z_1, z_2)$ 에 白色 Gaussian 雜音を 통과시킨 후 分散이 1이 되도록 定規化(normalize)하여 얻는다.

$$A(z_1, z_2) = 1 - 0.7z_1^{-1} - 0.5z_2^{-1} + 0.3z_1^{-1} \cdot z_2^{-1} \quad (55)$$

이렇게 얻은 2次元 데이터는 모두 수평방향으로 走査하면서 10회의 시뮬레이션을 실시한 다음 平均을 취하였다.

$\alpha_{00} = 1, \alpha_{01} = \alpha_{10} = \alpha_{11} = 0$ 일때 식 (24)에 의하여 구한 最適反射係數의 平均値는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{01,1}^* &= -0.68863 & K_{01,2}^* &= 0.00227 \\ K_{10,1}^* &= -0.49039 & K_{10,2}^* &= 0.00430 \\ K_{11,1}^* &= 0.28805 & K_{11,2}^* &= 0.00809 \end{aligned}$$

最適反射係數를 보면 전달함수 $A(z_1, z_2)$ 가 z_1^{-1}, z_2^{-1} 에 대하여 1次函數이기 때문에 2次段 이상의 反射係數가 거의 0에 가까움을 알 수 있다. 이것은 1次元 lattice 필터에서도 볼 수 있는 현상으로 反射係數를

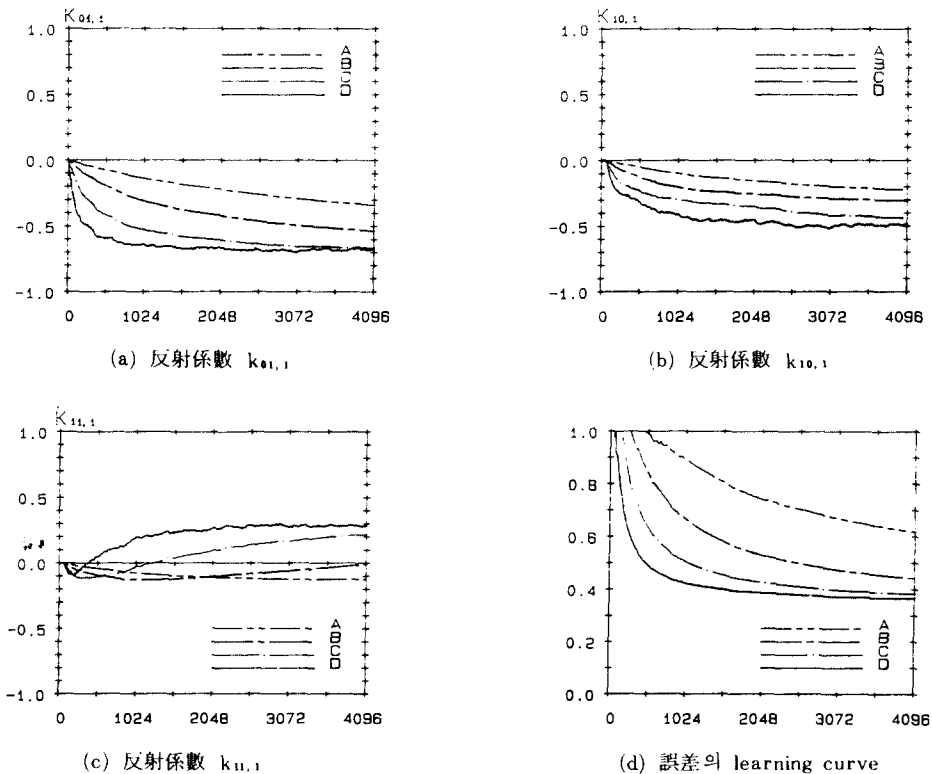
구함으로써 最適次數를 쉽게 결정할 수 있다.

그림 3은 알고리즘 I에서 μ 값을 0.0001, 0.0003, 0.001, 0.003으로 변화시켰을 때의 反射係數와 誤差의 learning curve를 나타낸 것이다. μ 값이 커짐에 따라 反射係數가 最適反射係數에 빨리 收斂하나 收斂特性이 약간 불안정함을 알 수 있다.

그림 4는 알고리즘 II에서 $\mu = 0.0001$ 일때 ρ 값을 $10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$ 으로 각각 변화시켰을 때의 反射係數와 誤差의 learning curve를 나타낸 것이다. 알고리즘 II에서 $\rho = 0$ 이면 알고리즘 I과 같게 되며 ρ 값이 커질수록 反射係數의 收斂速度가 커짐을 알 수 있다.

그림 5도 알고리즘 II에서 $\mu = 0.001$ 일때 ρ 값을 0.0, $10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$ 으로 각각 변화시켰을 때의 反射係數와 誤差의 learning curve를 나타낸 것으로 ρ 값이 커짐에 따라 反射係數의 收斂速度가 커짐을 알 수 있다.

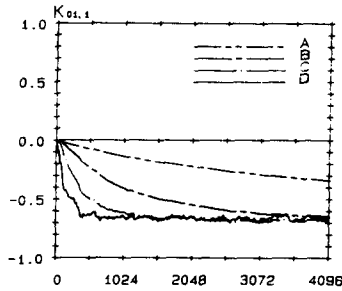
그림 4와 그림 5를 비교하여 보면 알고리즘 I에서 μ 값이 작을때(收斂速度가 작을 때) 알고리즘 II에서 收



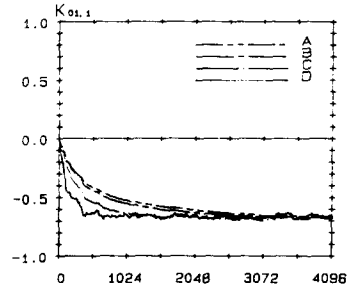
A : $\mu = 0.0001$, B : $\mu = 0.0003$, C : $\mu = 0.001$, D : $\mu = 0.003$

그림 3. 알고리즘 I에서의 反射係數와 誤差의 learning curve

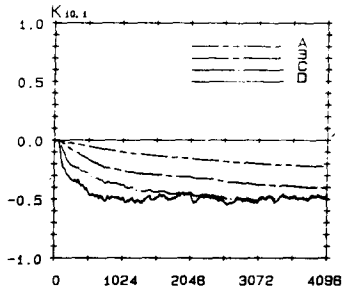
Fig. 3. Reflection coefficients and learning curve in algorithm I.



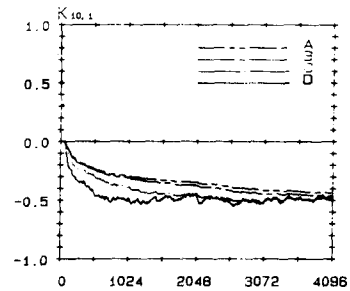
(a) 反射係數 $k_{01,1}$



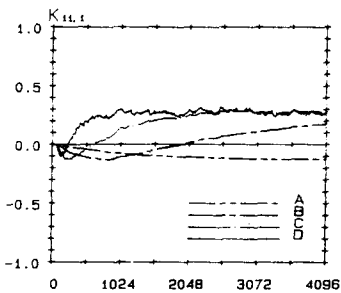
(a) 反射係數 $k_{01,1}$



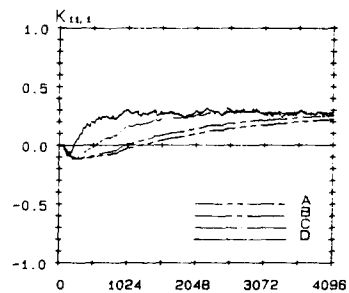
(b) 反射係數 $k_{10,1}$



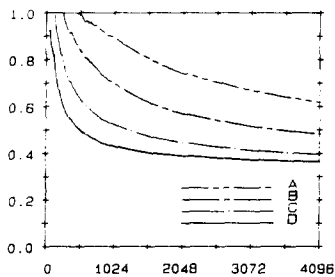
(b) 反射係數 $k_{10,1}$



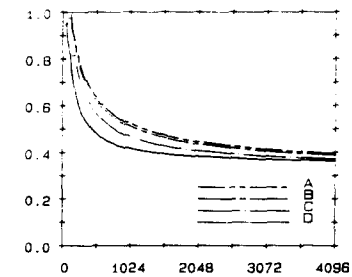
(c) 反射係數 $k_{11,1}$



(c) 反射係數 $k_{11,1}$



(d) 誤差의 learning curve



(d) 誤差의 learning curve

$\mu(0) = 0.0001$
 A : $\rho = 0.0$, B : $\rho = 10^{-7}$, C : $\rho = 10^{-6}$, D : $\rho = 10^{-5}$
 그림 4. 알고리즘 II에서의 反射係數와 誤差의 learning curve

Fig. 4. Reflection coefficients and learning curve in algorithm II.

$\mu(0) = 0.001$
 A : $\rho = 0.0$, B : $\rho = 10^{-7}$, C : $\rho = 10^{-6}$, D : $\rho = 10^{-5}$
 그림 5. 알고리즘 II에서의 反射係數와 誤差의 learning curve

Fig. 5. Reflection coefficients and learning curve in algorithm II.

收速度가 상대적으로 커짐을 알 수 있다. (이러한 현상은 1次元 適應 lattice μ 알고리즘에서도 나타난다.)⁷⁾

일반적으로 2次元의 경우에는 1次元에 비하여 反射係數의 收斂特性이 불안정하게 되므로 μ 값을 작게 하여 收斂速度가 작게 되는데 이럴때 알고리즘 II 를 사용하면 알고리즘 I 에 비하여 상대적으로 큰 收斂速度를 얻을 수 있다.

V. 結 論

Parker와 Kayran이 提案한 2次元 lattice 필터에 gradient search 기법을 適用하여 反射係數를 循環적으로 구할 수 있는 새로운 2次元 適應 lattice 알고리즘을 提示하였으며 이 알고리즘의 收斂特性을 解析하였다.

또 이 알고리즘에 μ 알고리즘을 適用하여 收斂速度가 더 큰 2次元 適應 lattice μ 알고리즘을 誘導하였으며, μ 값이 작을 때 이 알고리즘의 收斂速度가 상대적으로 증가함을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

일반적으로 2次元의 경우에는 1次元에 비하여 反射係數의 收斂特性이 상당히 불안하기 때문에 μ 값을 작게 하는데 이럴때 2次元 適應 lattice μ 알고리즘을 사용하면 反射係數의 收斂速度를 크게 할 수 있다.

參 考 文 獻

- [1] J.I. Makhoul and L.K. Cosell, "Adaptive lattice analysis of speech", *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-29, no. 3, pp. 654-685, Jun. 1981.
- [2] L.J. Griffith, "An adaptive lattice structure for noise-cancelling applications", *Proc. IEEE Conf. ASSP*, (Tulsa, OK), pp. 87-90, Apr. 1978.
- [3] T.M. Marzetta, "Two-dimensional linear prediction: Auto correlation arrays, minimum-phase error filters, and reflection coefficients arrays", *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-28, pp. 725-733, Dec. 1980.
- [4] S.R. Parker and A.H. Kayran, "Lattice parameter autoregressive modeling of two-dimensional fields-Part I: The quarter-plane case", *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-32, no. 4, Aug. 1984
- [5] J. Makhoul, "Stable and efficient lattice methods for linear prediction", *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-25, no. 5, pp. 423-428, Oct. 1977.
- [6] C.D. Gibson and S. Haykin, "Learning characteristics of adaptive lattice filtering algorithms", *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-28, no. 6, pp. 681-691, Dec. 1980.
- [7] 백홍기, 이종각, "적용 Lattice 필터의 수렴특성 개선에 관한 연구", 전자공학회지, 제22권, 제 6 호, pp. 76-82, 11월. 1985년.
- [8] 신윤기, 김춘성, 신재호, 이종각, "LMS 알고리즘의 2차원 적용 필터에의 응용에 관한 연구", 전자공학회지, 제21권, 제 2 호, pp. 29-35, 3월. 1984년.
- [9] 신윤기, 이종각, "LMS 적용 필터 설계를 위한 고속수렴 알고리즘에 관한 연구", 전자공학회지, 제19권, 제 5 호, pp. 13-19, 10월. 1982년.
- [10] B. Widrow, J.M. McCool, M.G. Larimore and C.R. Johnson, "Stationary and non stationary learning characteristics of the LMS adaptive filter", *Proc. IEEE*, vol. 64, no. 8, pp. 1151-1162, Aug., 1976.