論文 86－23－4－6

삼대각선행열의 행열식 고유값 및 역행열

(Determinant Eigenvalue and Inverse Matrix of a Tridiagonal Matrix)

李 斗 秀*

(Doo Soo Lee)

要 約

디지탈신호처리, 영상신호처리, 예측이론 및 수치해석등에 나타나는 삼대각선행열의 행열식, 고유값, 역행열의 계산에서 차분방정식과 Z변환을 적용시킴으로서 이들의 값을 해석적 방법으로 얻는다.

Abstract

A large set of linear equations which arise in many applications, such as in digital signal processing, image filtering, estimation theory, numerical analysis, etc. involve the problem of a tridiagonal matrix. In this paper, the determinant, eigenvalue and inverse matrix of a tridiagonal matrix are analytically evaluated.

Ⅰ. 序 論

선형연립방정식을 풀 경우, 행열을 이용하면 행열의 연산에서 얻을 수 있는 잇점을 충분히 활용함으로써 방정식의 해를 효율적으로 계산할 수 있게 된다.특히 연립방정식의 계수행열이 특수한 경우이면 문제는 한층 더 효율적으로 해결될 것이다. 계수행열이 삼대각선행열(tridiagonal matrix)인 문제는 여현 및 정현변환[1,4] (sine and cosine transform), 경계조건이 주어진 2계미분방정식에 대한 유한 요소법의 적용[3,5] 영상신호처리에 있어서 상관계수,[1] 시간함수인 데이터처리[2] 등에 자주 나타난다. 이들 문헌에 나타난 삼대각선행열의 행열식과 고유값을 계산하는 수단으로서는 순환 알고리즘을 이용[3,5] 하거나 완전대칭인 행열로서 대각요소가 2이고 다른 요소는 모두 －1인 경우[4]와 대각선요소가 1인 경우[1]에 대한 행열식과 고유값에 관한 결과가 발표되어 있다. 본 논문에서는 세개의 대각선요소가 각각 a, b, c로 표현되는 삼대각선행열의 행열식, 고유값 및 역행열을 해석적으로 유도함으로써 위의 응용분야의 문제를 해결하는데 활용되도록 한다.

*正會員, 漢陽大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Han Yang Univ.)

接受日字：1986年 5月 9日

Ⅱ. 행 열 식

삼대각선행열중에서 여기서 다루게 되는 행열은 다음과 같이 정의된다.

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \tag{1}$$

여기서 $a_{ij}=\begin{cases} a, & i-j=1 \\ b, & i=j \\ c, & j-i=1 \\ 0, & |i-j|>1 \end{cases}$

식(1)로 정의된 행열A의 행열식을 D라고 표시하며 특히 n×n행열이므로 D(n)이라고 하면

$$D(n)=\begin{vmatrix} b & c & o & o & o & \cdots \\ a & b & c & o & o & \cdots \\ o & a & b & c & o & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \tag{2}$$

이다. 참고문헌[1]에서는 식(2)의 특수한 경우로서 b=0, a=c=－1인 결과가 발표되어 있고, 참고문헌[3]에

는 $b=2, a=c=-1$인 결과가 발표되어 있고, 참고문헌[4]에는 $b=1, a=c=-\alpha$인 대칭행열에 대한 결과가 발표되어 있다. 끝의 예에서 α에 관계없이 하나의 식으로 표시되어 있지만 행열식은 α에 따라 세가지의형태로 분류되어야 한다.

식(2)의 값을 계산하기 위하여 먼저 Laplace 전개를 적용하면 행열식은 $D(n)$에 관한 2계차분방정식으로 표현된다.

식(2)에서

$n=1$ 이면 $D(1)=b$

$n=2$ 이면 $D(2)=\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix}=b^2-ac$

$n=3$ 이면 $D(3)=\begin{vmatrix} b & c & o \\ a & b & c \\ o & a & b \end{vmatrix}=b\,D(2)-ac\,D(1)$

을 얻으며 일반적으로 $D(n)$은

$$D(n)=b\,D(n-1)-ac\;D(n-2) \tag{3}$$

으로 표현된다. 식(3)은 2계차분방정식이므로 두개의 경계조건이 필요하다. 이들의 경계조건으로서는 다음을 얻는다.

$$D(0)=1$$
$$D(1)=b \tag{4}$$

식(3)을 푸는데 Z변환을 적용하기 위하여

$$D(z)\equiv Z[D(n)] \tag{5}$$

이라고 놓는다. 경계조건(4)를 만족하는 식(3)은 다음과 같이 정리된다.

$$D(z)=\frac{z^2}{z^2-bz+ac} \tag{6}$$

식(6)을 역변환함으로써 식(2)의 행열식을 얻는다. 식(6)을 역변환하려면 먼저 인수분해를 해야 하는데, 분모의 판별식에 따라 다음의 세가지로 인수분해 되며 이에 따라 식(2)의 행열식도 세가지의 형태로 구분된다.

1. $b^2>4ac$인 경우

식(6)의 분모를 인수분해하기 위하여 파라미터α와 θ를 다음과 같이 정의한다.

$$ac=e^{-2\alpha}$$
$$b=2\sqrt{ac}\,\cosh\theta \tag{7}$$

식(7)을 식(6)에 대입하면,

$$D(z)=\frac{z^2}{z^2-2e^{-\alpha}\cosh\theta z+e^{-2\alpha}} \tag{8}$$

을 얻으며 이를 역변환하면 $D(n)$은 다음과 같다 (부록 1).

$$D(n)=(ac)^{\frac{n}{2}}\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta} \tag{9}$$

이와같이 식(9)로 표현되는 $D(n)$은 식(1)로 정의된 $n\times n$행열에서 $b^2>4ac$인 경우에 대한 행열식이다.

2. $b^2<4abc$인 경우

이 경우에 대한 식(6)의 분모는 복소수로 인수분해된다. 두개의 파라미터 α와 θ를 다음과 같이 정의한다

$$ac=e^{-2\alpha}$$
$$b=2\sqrt{ac}\,\cos\theta \tag{10}$$

식(10)을 식(6)에 적용하면

$$D(z)=\frac{z^2}{z^2-2\bar{e}^{\alpha}\cos\theta z+\bar{e}^{2\alpha}} \tag{11}$$

을 얻을 수 있으며 이의 역변환을 구하면

$$D(n)=\frac{a(ac)^{\frac{n}{2}}\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{12}$$

을 얻는다.

3. $b^2=4ac$인 경우

이 조건은 식(7) 또는 식(10)에서 $\theta=0$인 경우에 대응되므로 식(9) 또는 식(12)에서 분모와 분자가 동시에 0이 되어 부정형이다. 식(9) 또는 식(12)에 L'Hospital 정리[6]를 적용하면

$$D(n)=(n+1)\quad(ac)^{\frac{n}{2}} \tag{13}$$

을 얻는다.

Ⅲ. 고 유 값

식(1)의 고유값을 λ라고 표시하면

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-b & -c & o & o & \cdots\cdots \\ -a & \lambda-b & -c & o & \cdots\cdots \\ o & -a & \lambda-b & -c & \cdots\cdots \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}=0 \tag{14}$$

이다. 식(14)의 행열식은 식(2)의 행열식 $D(n)$에서 대각선요소가 b대신 $\lambda-b$가 대치되어 있는 것이므로 식(14)의 계산은 식(2)의 값으로부터 구할 수 있다. 행열식의 계산에서와 같이 식(14)에 Laplace전개를 적용하면 다음식을 얻는다.

$$D(n)=(\lambda-b)\quad D(n-1)+ac\;D(n-2) \tag{15}$$

식(15)의 해를 구하기 위해서는 세가지의 경우가 고려될 수 있다.

첫째경우로써 $(\lambda-b)^2>4ac$이면

$$ac=\bar{e}^{2\alpha}$$
$$\lambda-b=2\sqrt{ac}\,\cos\theta \tag{16}$$

로 놓는다. 식(2)와 식(16)을 식(14)에 적용하면

$$(ac)^{\frac{n}{2}}\;\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=0 \tag{17}$$

을 얻는다. 식(17)을 만족하는 θ는

$$\theta=\frac{m}{n+1}\pi,\quad m=1,2,\cdots n \tag{18}$$

이므로 식(1)로 정의되는 삼대각선행열의 고유값은 식(16)과 식(18)로 부터

$$\lambda_m = b + \sqrt{ac}\ \cos\frac{m}{n+1}\pi,\ m=1,2,\cdots n \qquad (19)$$

로 표현된다.

둘째의 경우로서 식(15)에서 $(\lambda-b)^2=4ac$ 이면, 식(13)으로 부터 식(14)의 행열식은

$$D(n)=(n+1)\ \ (ac)^{\frac{n}{2}} \qquad (20)$$

이며

$$(n+1)\ \ (ac)^{\frac{n}{2}}=0 \qquad (21)$$

을 만족시키는 것은

$$a=0 \qquad (22)$$

또는 $c=0$

이다. 이와같이 $a=0$ 또는 $c=0$인 경우의 고유값은 식(19)로 부터도 똑같은 결과를 얻을 수 있다.

세째의 경우로서 $(\lambda-b)^2<4ac$인 경우에는, 역시

$ac=e^{-2a}$

$$\lambda-b=2\sqrt{ac}\ \cosh\theta \qquad (23)$$

로 놓을 수 있으며 · 식(9)의 결과를 식(14)에 적용하여 다음식을 얻는다.

$$(ac)^{\frac{n}{2}}\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}=0 \qquad (24)$$

식(24)를 만족하는 경우는 $\theta=0$ 이거나 $a=c=0$인 경우이다. 이들은 역시 둘째의 경우와 같은 것으로서 식(19)의 결과로 부터 동일한 고유값을 얻게 된다.

이와 같은 식(1)로 정의되는 삼대각선행렬의 고유값은 식(19)와 같이 하나의 식으로 표현된다.

Ⅳ. 역 행 열

앞의 결과에서 알 수 있듯이 식(1)로 정의되는 삼대각선행렬A의 고유값은 실수로 표현되기 때문에 역행열이 존재한다.

역행열을

$$A^{-1}=[p_{ij}] \qquad (25)$$

라고 놓으면

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \qquad (26)$$

이다. 식(1)과 식(25)를 식(26)에 넣어서 전개하여 i행 j열 요소를 쓰면

$$ap_{i-1,j}+bp_{i,j}+cp_{i+1,j}=e_{ij} \qquad (27)$$

을 얻는다. 여기서

$$e_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \qquad (28)$$

이다. 식(27)의 특성방정식은

$$a+bz+cz^2=0 \qquad (29)$$

이다. 식(27) 또는 식(29)에서

$$b^2>4ac \qquad (30)$$

이라고 가정한다. 이 경우에는 식(7)을 식(29)에 적용함으로써 식(29)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$z_1, z_2=-\frac{e^{-\alpha}}{c}e^{\theta},\ -\frac{e^{-\alpha}}{c}e^{-\theta} \qquad (31)$$

그러므로 식(27)에서 $i<j$인 경우에 대한 해는

$$p_{ij}=A_1\left(-\frac{e^{-\alpha}}{c}\right)^i e^{i\theta}+A_2\left(-\frac{e^{-\alpha}}{c}\right)^i e^{-i\theta},\ i<j \qquad (32)$$

으로 표현되고, $i>j$인 경우에 대한 해는

$$p_{ij}=B_1\left(-\frac{e^{-\alpha}}{c}\right)^i e^{i\theta}+B_2\left(-\frac{e^{-\alpha}}{c}\right)^i e^{-i\theta},\ \ i>j \qquad (33)$$

으로 표현된다.

식(27)에서 $i=1$ 즉 첫째행에 대해 고려하면

$$p_{0j}=0 \qquad (34)$$

이어야 한다. 식(34)를 식(32)에 적용하고 $A=A_1$이라고 놓으면 식(32)는 다음과 같이 정리된다.

$$p_{ij}=A\left(-\frac{1}{c}\right)^i\ (2\sinh\theta)\cdot e^{-\alpha}D(i-1),\ \ i<j \qquad (35)$$

식(33)을 제일 끝행, 즉 $i=n$인 경우에 적용하면

$$p_{n+1,j}=0 \qquad (36)$$

이어야 한다. 식(36)을 식(33)에 적용하고 $B=B_1$이 라고 놓으면 식(33)은 다음과 같이 정리된다.

$$p_{ij}=(-1)\ B\left(-\frac{1}{c}\right)^i\cdot e^{(n-2i)\alpha}\cdot e^{(n+1)\theta}$$
$$\cdot(2\sinh\theta)\ D(n-i),\ \ i>j \qquad (38)$$

또한 식(35)와 식(38)은 $i=j$에서 동일한 요소를 나타내므로, 식(35)와 식(38)에서 i대신 j로 대치하여 서로 같다고 놓으면 다음식을 얻는다.

$$A\ \ D(j-1)+B\,e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j+1)\alpha}\ \ D(n-j)=0 \qquad (39)$$

이와 더불어 $i=j$에서는 식(28)에서 $e_{jj}=1$이므로 이를 식(27)에 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$A\,D(j)+B\cdot e^{(n+1)\theta}\cdot e^{(n-2j-1)\alpha}D(n-j-1)=\frac{(-c)^j e^{\alpha}}{2\sinh\theta} \qquad (40)$$

식(39)와 식(40)으로 부터 A와 B를 계산하면 다음과 같다〔부록2〕.

$$A=\frac{(-c)^i e^{\alpha}}{2\sinh\theta}\cdot\frac{D(n-j)}{D(n)} \qquad (42)$$

$$B=\frac{(-1)\ (-c)^j e^{-(n+1)\theta}e^{-(n-2j)\alpha}}{2\sinh\theta}\cdot\frac{D(j-1)}{D(n)} \qquad (43)$$

식(42)는 식(35)에, 식(43)은 식(38)에 대입하여 역행열의 요소를 계산하면 다음과 같다.

$i\leq j$인 요소 P_{ij}는,

$$p_{ij}=(-c)^{j-i}\frac{D(i-1)\ D(n-j)}{D(n)} \qquad (44)$$

이고, $i\geq j$인 요소 P_{ij}는

$$p_{ij}=(-a)^{i-j}\frac{D(j-1)\ D(n-i)}{D(n)} \qquad (45)$$

로 표시된다.

식(44)와 식(45)는 식(30)의 가정아래에서 얻은 결과식이만, 이들은 행열식으로 표현되어 있는 것으로서 $b^2\leq 4ac$

인 경우에 대해서도 성립되는 식이다. 이러한 결과들을 표 1에 표시해 놓았다.

〔예제〕 여기서 얻은 결과의 유용성을 보기 위하여 다음과 같은 행열의 역행을 계산한다.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

이러한 문제는 참고문헌[1]과 [5]에 자주 나타나는 것으로서 고유값의 계산에만 23회의 반복알고리즘을 적용하여 3자리의 유효숫자까지 정확히 얻었다. 이 문제의 역행열을 구하기 위하여 앞에서 얻은 결과를 적용한다.

$n=5,\ b=2,\ a=c=-1$ 이므로 식(3)과 식(4)로 부터

$D(0)=1$

$D(1)=2$

$D(2)=3$

$D(3)=4$

$D(4)=5$

$D(5)=6$

를 얻는다. 식(44)와 식(45)로 부터 역행열을 쓰면, 다음과 같다.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & \frac{D(i-1)\,D(5-j)}{D(5)} \\ \frac{D(j-1)\,D(5-i)}{D(5)} & \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{D(5)}\begin{bmatrix} D(0)D(4) & D(0)D(3) & D(0)D(2) & D(0)D(1) & D(0)D(0) \\ D(0)D(4) & D(1)D(3) & D(1)D(2) & D(1)D(1) & D(1)D(0) \\ D(0)D(2) & D(1)D(2) & D(2)D(2) & D(2)D(1) & D(2)D(0) \\ D(0)D(1) & D(1)D(1) & D(2)D(1) & D(3)D(1) & D(3)D(0) \\ D(0)D(0) & D(1)D(0) & D(2)D(0) & D(3)D(0) & D(4)D(0) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1\times5 & 1\times4 & 1\times3 & 1\times2 & 1\times1 \\ 1\times4 & 2\times4 & 2\times3 & 2\times2 & 2\times1 \\ 1\times3 & 2\times3 & 3\times3 & 3\times2 & 3\times1 \\ 1\times2 & 2\times2 & 3\times2 & 4\times2 & 4\times1 \\ 1\times1 & 2\times1 & 3\times1 & 4\times1 & 5\times1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

이와 같이 삼대각선행열의 역행열을 해석적으로 정확하게 계산할 수 있다.

V. 結 論

삼대각선행열에 관해 발표되어 있는 결과들은 $a=c$ 이고 $b^2<4ac$인 경우의 행열식과 고유값에 관한 결과들이었지만 여기서는 $a\neq c$이고, $b^2<4ac$인 경우뿐만 아니라 $b^2\geq 4ac$인 경우에 대해서도 행열식과 고유값은 물론 역행열에 관한 결과식을, 차분방정식의 해법을 적용함으로써 해석적으로 구하였다. 세대각선 요소의 크기에 따라 행열식을 표현하는 식은 다르지만 고유값과 역행열을 표현하는 식은 각각 하나의 식으로 표현됨을 보였다. 이들은 수치해석이나 디지탈 신호처리에 있어서 삼대각선행열의 문제를 순환알고리즘을 적용하는 대신 해석적으로 해결할 수 있게 할 것이다.

표 1

	$b^2>4ac$	$b^2=4ac$	$b^2<4ac$
D(n)	$(\sqrt{ac})^n\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}$ 여기서 $\cosh\theta\equiv\frac{b}{2\sqrt{ac}}$	$(n+1)(\sqrt{ac})^n$	$(\sqrt{ac})^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ 여기서 $\cos\theta\equiv\frac{b}{2\sqrt{ac}}$
λ_m	$b+2\sqrt{ac}\cos\frac{m}{n+1}\pi,\ m=1,2,\cdots n$		
A^{-1}	$P_{ij}=\begin{cases}(-c)^{j-i}\frac{D(i-1)\,D(n-j)}{D(n)}, & i\leq j\\ (-a)^{i-j}\frac{D(j-1)\,D(n-i)}{D(n)}, & i\geq j\end{cases}$		

부 록 1

$$D(z)=\frac{z^2}{z^2-2e^{-\alpha}\cosh\theta z+e^{-2\alpha}}$$

$$=\frac{z^2}{z^2-e^{-\alpha}(e^{\theta}+e^{-\theta})z+e^{-2\alpha}}$$

$$=\frac{z^2}{(z-e^{-\alpha}e^{\theta})\,(z-e^{-\alpha}e^{-\theta})}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\theta}}\cdot\frac{z}{z-e^{-\alpha}e^{\theta}}+\frac{1}{1-e^{2\theta}}\frac{z}{z-e^{-\alpha}e^{-\theta}}$$

위의 식을 역변환하면

$$D(n)=\frac{1}{1-e^{-2\theta}}(e^{-\alpha}e^{\theta})^n+\frac{1}{1-e^{2\theta}}(e^{-\alpha}e^{-\theta})^n$$

$$=\frac{e^{-\alpha n}e^{n\theta}}{e^{-\theta}(e^{\theta}-e^{-\theta})}+\frac{e^{-\alpha n}e^{-n\theta}}{e^{\theta}(e^{-\theta}-e^{\theta})}$$

$$=\frac{e^{-n\alpha}}{e^{\theta}-e^{-\theta}}(e^{(n+1)\theta}-e^{-(n+1)\theta})$$

$$=e^{-n\alpha}\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}$$

$$=(\sqrt{ac})^n\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}$$

부 록 2

식(39)와 식(40)을 다시 쓰면,

$$A\,D(j-1)+B\,e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j+1)\alpha}D(n-j)=0$$

$$A\,D(j)+B\,e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j-1)\alpha}D(n-j-1)=\frac{(-c)^j e^{\alpha}}{2\sinh\theta}$$

위의 두 식에 crammer공식을 적용한다.

먼저

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} D(j) & e^{(n+1)\theta}\,e^{(n-2j-1)\alpha}\,D(n-j-1)\\ D(j-1) & e^{(n+1)\theta}\,e^{(n-2j+1)\alpha}\,D(n-j)\end{vmatrix}$$

$$=e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j)\alpha}[e^{\alpha}D(j)\ D(n-j)-e^{-\alpha}D(j-1)\ D(n-j-1)] \qquad (2-1)$$

식(2-1)에서 괄호안을 정리하면 다음과 같다.

$$e^{\alpha}D(j)\,D(n-j)-e^{-\alpha}D(j-1)\ D(n-j-1)$$

$$=e^{\alpha}e^{-\alpha j}\frac{\sinh(j+1)\theta}{\sinh\theta}\,e^{-\alpha(n-j)}\frac{\sinh(n-j+1)\theta}{\sinh\theta}$$

$$-e^{-\alpha}e^{-\alpha(j-1)}\frac{\sinh j\theta}{\sinh\theta}\,e^{-\alpha(n-j-1)}\frac{\sinh(n-j)\theta}{\sinh\theta}$$

$$=\frac{e^{-\alpha(n-1)}}{\sinh^2\theta}[\sinh(j+1)\theta\ \sinh(n-j+1)\theta-\sinh j\theta\ \sinh(n-j)\theta]$$

$$=\frac{e^{-\alpha(n-1)}}{4\sinh^2\theta}[e^{(n+2)\theta}+e^{-(n+2)\theta}-e^{n\theta}-e^{-n\theta}]$$

$$=\frac{e^{-\alpha(n-1)}}{4\sinh^2\theta}[e^{n\theta}(e^{2\theta}-1)+e^{-n\theta}(e^{-2\theta}-1)]$$

$$=\frac{e^{-\alpha(n-1)}}{4\sinh^2\theta}[e^{n\theta}e^{\theta}(e^{\theta}-e^{-\theta})+e^{-n\theta}\cdot e^{-\theta}(e^{-\theta}-e^{\theta})]$$

$$=\frac{e^{-\alpha(n-1)}}{4\sinh^2\theta}(e^{\theta}-e^{-\theta})\ (e^{(n+1)\theta}-e^{-(n+1)\theta})$$

$$=\frac{e^{-\alpha(n-1)}}{\sinh^2\theta}\cdot\sinh\theta\ \sinh(n+1)\theta$$

$$=e^{-\alpha(n-1)}\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}$$

$$=e^{\alpha}\,D(n) \qquad (2-2)$$

식 (2-2)를 식(2-1)에 넣으면

$$\Delta=e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j+1)\alpha}D(n) \qquad (2-3)$$

그러므로

$$A=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{(-c)^j e^{\alpha}}{2\cdot\sinh\theta} & e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j-1)\alpha}D(n-j-1)\\ 0 & e^{(n+1)\theta}e^{(n-2j+1)\alpha}D(n-j)\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$=\frac{(-c)^j e^{\alpha}D(n-j)}{2\sinh\theta\,D(n)}$$

이고,

$$B=\frac{\begin{vmatrix}D(j) & \dfrac{(-c)^j e^{\alpha}}{2\sinh\theta}\\ D(j-1) & 0\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$=\frac{(-1)\ (-c)^j\ D(j-1)}{2\cdot\sinh\theta\cdot e^{(n+1)\theta}\cdot e^{(n-2j)\alpha}\ D(n)}$$

參 考 文 献

[1] A. Jain and E. Angel, "Image restoration, modelling, and reduction of dimensionality," *IEEE Trans on Computers,* vol. C-23, no. 5, pp. 470-476, May 1974.

[2] O.D. Anderson, *Time Series Analysis and Forecasting,* Butterworths, pp. 31-42, 1976.

[3] J. Norcedal and M.L. Averton, *Numerical Methods for Solving Inverse Eigenvalue Problems,* Proc. of the International Workshop, Caracas, pp. 212-216, June 1982.

[4] L.H. Links and J. Biemond, "On the non-separability of image models," *IEEE Trans on PAMI,* vol. PAMI-1, no. 4, pp. 409-411, Oct., 1979.

[5] A. Jennings, *Matrix Computation for Engineers and Scientists,* John Wiley, Chapter 10, 1977.

[6] James, Advanced Calculus, *Wadsworth,* Chapter 2, 1967.

[7] D.K. Faddeev and V.N. Faddeva, *Computational Methods of Linear Algebra,* Freeman, Chapter 1, 1963.