

# Aggregation기법에 의한 시스템의 간소화 방법에 관한 연구

## (A Study on the System Reduction Method Using Aggregation Techenique)

朴 俊 烈\*, 崔 桂 根\*\*

(Joon Yeal Park and Keh Kun Choi)

### 要 約

본 연구에서는 선형시스템에서 자주 거론되는 시스템의 간소화에 관하여 언급하였다. 유지시켜야 할 극점은 dominancy 및 residue에 의하여 선정하였으며, 축소모델은 aggregation기법에 의하여 구하였는데 이 기법의 단점을 보완하기 위하여 controllablecanonical form의 eigenvector를 이용하여 aggregation행렬을 구하고, markov파라미터 뿐만아니라 time-moment를 동시에 고려하여 정상상태 응답의 오차를 제거하였다.

입출력행렬은 순환 aggregation행렬을 이용하여 처리하였고, eigenvalue가 중근인 경우까지 확장시켜도 잘 적용될 수 있음을 예제를 통하여 확인하였다.

### Abstract

In this paper a complexity reduction method in a linear system is studied. The poles to be retained are selected by the dominancy and the values of residues at respective poles. The reduced order model is obtained by the aggregation method, and the aggregation matrix is determined by the eigenvectors of a controllable canonical form. We consider the markov parameter and the time-moment at the same time, thereby getting rid of the steady-state errors. The input-output matrices are obtained using a chained aggregation matrix, and application of this method is illustrated by examples.

### I. 序 論

대부분의 물리계는 미분방정식으로 표시하는 경우가 많으나 실제로 시스템이 매우 복잡하여서 어떤 변수나 파라미터의 영향 및 결합상태를 해석하기가 용이하지

않다. 더구나 최적 제어이론을 적용시키는 경우 Riccati 방정식의 치수가 높고 계산방법이 매우 복잡하여 설계가 매우 곤란하다.

따라서 높은 차수의 시스템을 낮은 차수의 모델로 축소화하는 여러가지 기법이 제시되었다.<sup>1), 2)</sup>

Chen과 Shieh 및 Chuang, Shamash 등의 시스템의 전달함수를 연분수로 확장시켜서 축소모델을 구하는 방법을 제시하였고,<sup>3), 4)</sup> Bosley는 time-moment를 일치시켜서 축소모델을 구하는 time-moment기법을 제시하였는데<sup>5)</sup> 이 방법은 계산이 용이하고 정상 상태응답은 오차가 없으나 본래 시스템은 안정되었다고 하더라도

\*正會員, 弘益大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Hong Ik Univ.)

\*\*正會員, 서울大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)

接受日字: 1986年 1月 28日

축소모델은 불안정 할 수 있음이 밝혀졌다.<sup>13)</sup> 따라서 안정성을 유지시키기 위하여 eigenvalue를 유지시키고 몇개의 time-moment를 계산하여 출력응답을 일치시키는 방법이 제시되었는데 (Shamash<sup>13)</sup> 이 방법은 정상 상태응답은 잘 일치하나 원래의 시스템과 축소시스템의 state 사이의 관계가 외형적으로 표현되지 못하여 실질적인 이용이 용이하지 않다.<sup>17)</sup>

또한 유지시켜야 할 mode의 결정은 일반적으로 dominance만을 고려하고 있으나 시스템 zero가 dominant pole에 매우 가까이 존재할 경우에는 그 pole에서의 residue가 매우 작아서 시스템에 미치는 영향이 극히 적으므로 dominance뿐만 아니라 residue도 동시에 고려하여야 한다.

그런데 Aoki에 의하여 제시된 aggregation 기법에 의하여 차수를 축소시키면 state 사이의 관계가 외형적으로 표시되므로 축소모델은 최적제어 이론의 응용이나 해석에 도움이 될 수 있다.<sup>18)</sup> 시스템을 간소화시킬 때 축소모델은 본래시스템의 구조적 성질을 유지하여야 한다는 입장에서 보면 aggregation 기법이 적합하나 이 기법은 다음과 같은 단점이 있다.<sup>18)</sup>

1) 높은 차수의 시스템인 경우 aggregation 행렬의 계산량이 많다.

2) 어떤 입력에 대한 낮은 차수 모델의 정상상태응답이 본래 시스템과 다를 수 있다.

따라서 본 연구에서는 aggregation 행렬을 Vandermonde 행렬을 이용하여 용이하게 계산할 수 있도록 하고 순환 aggregation 행렬을 구하여 Markov 파라미터뿐 아니라 time-moment를 동시에 고려해서 입력력 행렬을 구하여 축소모델을 결정하였다.

또한 controllable-canonical form의 eigenvector를 사용하여 유지시켜야 할 eigenvalue가 중근인 경우까지 확장시켰다.<sup>11)</sup>

## II. 理 論

### 1. 가제어성 canonical form

어떤 선형시스템의 전달함수가 다음과 같다고 하자.

$$g(S) = \frac{b_1 S^{n-1} + b_2 S^{n-2} + \dots + b_{n-1} S + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n} \quad (1)$$

$g(S)$ 를  $S=0$ 을 중심으로 Laurent 급수 및 Taylor 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$g(S) = J_0 S^{-1} + J_1 S^{-2} + J_2 S^{-3} + \dots \quad (2)$$

$$g(S) = -J_{-1} S^0 - J_{-2} S^1 - J_{-3} S^2 - \dots \quad (3)$$

여기서  $J_0, J_1, \dots$ 은 Markov 파라미터,  $J_{-i}/(i-1)!$ ,  $i=1, 2, \dots$ 은 time-moment라 부른다.

또한 식 (1)을 상태공간에서의 controllable-canoni-

cal form으로 표시하면

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \quad X \in R^n \\ y &= CX \end{aligned} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$B = e_k$$

$$C^T = [J_{-k+1}, J_{-k+2}, \dots, J_{-k+n}]$$

또한 Markov 파라미터와 A, B, C 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$J_i = C^T A^i B, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

이제 시스템 (4)의 축소모델을 다음과 같다고 하자.

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= FZ + GU, \quad Z \in R^m, \quad m < n \\ \hat{y} &= HZ \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)은 시스템 (4)의 축소모델로서 다음과 같은 선형관계가 성립한다.

$$Z = KX \quad (7)$$

K는 aggregation 행렬로서 다음 조건을 만족시킨다.

$$FK = KA$$

$$G = KB$$

$$HK = C \quad (8)$$

### 2. Aggregation 행렬의 계산

실제시스템의 canonical-form vector를  $P_i$ , 축소모델의 canonical-form vector를  $M_i$ 라고 하면 행렬 F와 A는 similarity 변환에 의하여 jordan-form  $Q_F$  및  $Q_A$ 로 표시할 수 있다.

$$Q_A = PAP^{-1} \quad (9)$$

$$Q_F = MFM^{-1} \quad (10)$$

$$\text{단, } P = [P_1, \dots, P_n]$$

$$M = [M_1, \dots, M_m]$$

만일 실제시스템의 eigenvalue가 모두 다르다면 P 및 M을 Vandermonde 행렬이라 부른다.<sup>11)</sup>

식 (8), (9), (10)에서

$$FK = M^{-1} Q_F M K = KA = KP^{-1} Q_A P$$

$$Q_F M K P^{-1} = M K P^{-1} Q_A$$

$M K P^{-1} = R$ 이라고 하면

$$Q_F R = R Q_A \quad (11)$$

식 (11)은 R이  $m \times n$  행렬로서 각 열이 유지시켜야 할

eigenvalue에 따라 1 혹은 0을 포함하는 행렬이면 식 (11)은 만족한다.

그러므로 aggregation행렬 K는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$K = M^{-1}RP \tag{12}$$

3. 행렬 F 및 입출력 행렬의 계산

행렬 A의 eigenvalue에서 dominance 혹은 residue의 크기에 따라 유지시켜야 할 eigenvalue Q를 결정하여 다음과 같은 다항식을 결정한다.

$$\prod_1^m (S - Q_i) = S^m + f_1 S^{m-1} + \dots + f_{m-1} S + f_m$$

그러면 식 (9), (10), (11), (12)에 의하여 행렬 F는 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -f_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -f_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -f_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

실제시스템과 유사한 축소모델을 구하기 위해서는 Markov 파라미터와 time-moment를 동시에 정합(matching)시켜야 한다. 우선 Markov 파라미터를 정합시키려면  $\{J_i, i=0, 1, 2, \dots, m\} \subset \{J_j, j=0, 1, 2, \dots, n\}$  이어야 한다.

$$\text{그러면 } G = KB \tag{14}$$

$$H = [J_0, J_1, \dots, J_m] \tag{15}$$

다음으로 time-moment  $J_{-i}, i=1, 2, \dots$ 는 다음과 같이 정합시킬 수 있다.

$K(i) = KA^i, G(i) = K(i)B$ 라고 하자. 그러면

$$K(0) = K$$

$$K(1) = KA = FK(0)$$

$$K(2) = KA = FKA = FFK = FK(1)$$

$$K(3) = KA = FK(2)$$

⋮

따라서 순환방정식으로 표시하면

$$K(i) = FK(i-1) \tag{16}$$

$$G(i) = K(i)B \tag{17}$$

또한 markov 파라미터의 정의에 의하면

$$\begin{aligned} J_i &= CA^i B = HKA^i B = HK(i)B \\ &= HFK(i-1)B \\ &= HF^i K(0)B \\ &= HF^i G(0) \end{aligned}$$

따라서 축소모델에서도 Markov 파라미터의 정의  $J_i = HF^i G$ 가 성립한다.

III. 예 제

1. Distinct eigenvalue를 갖는 경우

$$g(S) = \frac{S+4}{(S+1)(S+3)(S+7)(S+10)} \text{라고 하자.}$$

그러면

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -210 \\ 1 & 0 & 0 & -331 \\ 0 & 1 & 0 & -141 \\ 0 & 0 & 1 & -21 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$g(S)$ 를 Laurent 및 Taylor 급수로 전개하면

$$J_0 = J_1 = 0, J_2 = 1, J_3 = -17$$

$$J_{-1} = -0.01905, J_{-2} = 0.02526, J_{-3} = -0.01715$$

전달함수를 부분분수로 전개하면

$$g(S) = \frac{0.02778}{S+1} - \frac{0.01786}{S+3} - \frac{0.04167}{S+7} + \frac{0.03175}{S+10}$$

이 경우는 시스템 pole  $S = -3$ 이 zero  $S = -4$ 에 가깝기 존재하므로  $S = -3$ 에서의 residue가 작다.

따라서 dominance 및 residue를 감안하여  $S = -1$ 과  $S = -7$ 을 유지시키면 축소모델의 행렬 F는 다음과 같이 된다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

따라서 Vandermonde 행렬은

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 49 & -343 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -10 & 100 & -1000 \end{bmatrix}$$

그러므로

$$K(0) = K = M^{-1}RP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 56 \\ 0 & 1 & -8 & 57 \end{bmatrix}$$

$$G(0) = K(0)B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$J_0$  및  $J_1$ 이 모두 0이므로 Markov 파라미터 및 time-moment 정합을 시켜서  $H(1) = [J_{-1}, J_0]$ 를 취하면

$$K(1) = FK = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 56 & -399 \\ 1 & -8 & 57 & -400 \end{bmatrix}$$

$$G(1) = K(1)B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H(1) = [-0.01905, 0]$$

따라서

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$y1 = [-0.01905, 0] Z$$

또  $H(2) = [J_{-2}, J_{-1}]$ 을 취하면

$$K(2) = FK(1) = \begin{bmatrix} -7 & 56 & -399 & 2793 \\ -8 & 57 & -400 & 2801 \end{bmatrix}$$

$$G(2) = \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$H(2) = [0.02526, -0.01905]$$

따라서

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \end{bmatrix} U$$

$$y2 = [0.02526, -0.01905] Z$$

$y1$  및  $y2$ 의 단위계단응답은 그림 1 과 같다.

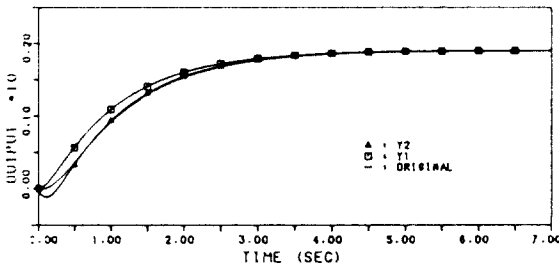


그림 1. Pole과 zero가 가까이 존재할 경우  
Fig. 1. When the zero locates near the dominant pole.

2. Complex dominant pole의 경우

$$g(S) = \frac{S^2 + 11S + 44}{(S^2 + 2S + 2)(S + 5)(S + 6)}$$
 라고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & 0 & -82 \\ 0 & 1 & 0 & -54 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_0 = 1, J_1 = -2, J_2 = -16, J_3 = 295$$

$$J_{-1} = -1, J_{-2} = 0.63, J_{-3} = -0.149$$

이 경우는 시스템 zero가 dominant pole과 가까이 존재하지 않으므로 복소극점을 유지시키면

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad K(0) = K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G(0) = KB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Markov 파라미터  $J_0$  및  $J_1$ 을 정합시키면

$$H(0) = [J_0, J_1] = [1, -2]$$

이 모델의 단위계단응답  $y1$ 은 그림 2 와 같다.

또 time-moment  $J_{-1}$  및 markov 파라미터  $J_0$ 를 정합시키면

$$H(1) = [J_{-1}, J_0] = [-1, 1]$$

$$G(1) = K(1)B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이 모델의 단위계단응답  $y2$ 은 그림 2 와 같다.

Time-moment  $J_{-2}$  및  $J_{-1}$ 를 정합시키면

$$H(2) = [J_{-2}, J_{-1}] = [0.63, -1]$$

$$G(2) = K(2)B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

이 경우의 단위계단응답  $y3$ 은 그림 2 와 같다.

그림 2에서 보는 바와 같이 Markov 파라미터만을 정합시킬 경우 정상상태응답의 오차를 초래할 수 있다.

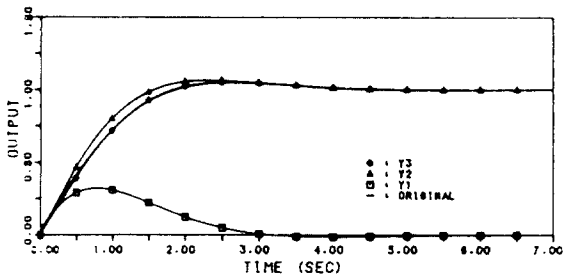


그림 2. Dominant pole만을 선택한 경우  
Fig. 2. The case of choosing dominant poles only.

3. Dominant pole이 중근인 경우

$$g(S) = \frac{S^2 + 6S + 8}{(S + 1)^2 (S + 3)(S + 5)}$$
 라고 하자.

그러면

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & -38 \\ 0 & 1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_0 = 0, J_1 = 1, J_2 = -4, J_3 = 16$$

$$J_{-1} = -0.5333, J_{-2} = 0.9511, J_{-3} = -3.4978$$

중근을 유지시키면

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$K=M^{-1}RP=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -5 & 25 & -125 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}=K(0)$$

$$G(0)=K(0)B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

따라서 Markov 파라미터를 정합시키면

$$H(0)=[J_0, J_1]=[0, 1]$$

이 경우의 단위계단응답 y1은 그림 3 과 같다.

또 time-moment J<sub>-1</sub> 및 Markov 파라미터 J<sub>0</sub>를 정합시키면

$$K(1)=FK(0)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$G(1)=K(1)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H(1)=[J_{-1}, J_0]=[-0.5333, 0]$$

이 경우의 단위계단응답 y2은 그림 3 과 같다.

또 Time-moment J<sub>-2</sub> 및 J<sub>-1</sub>을 정합시키면

$$K(2)=FK(1)=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G(2)=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$H(2)=[J_{-2}, J_{-1}]=[0.9511, -0.5333]$$

이 경우의 단위계단응답 y3은 그림 3 과 같다.

그림 3 에서 보는 바와 같이 markov 파라미터만을 고려하였을 경우 정상상태응답에 오차가 발생하였고, time-moment만을 고려하였을 경우 과도응답에 오차가 발생하였음을 알 수 있다.

IV. 結 論

본 연구에서는 유지시켜야 할 mode의 선택을 dominance 및 residue에 의하여 결정하였으며 Aggregation 행렬은 vandermonde행렬과 가제어성 canonical form의 eigenvector에 의하여 구하였다. 이 방법은 (n-1) × (n-1) 행렬의 역행렬을 구하는 대신 m×m(m<n) 행렬의 역행렬을 구함으로써 계산량이 다른 방법들에 비하여 훨씬 줄어 들었다. 또한 입력력 행렬을 순환 aggregation 행렬에 의하여 구함으로써 Markov 파라미터 뿐만 아니라 time-moment를 동시에 고려할 수 있으므로 정상상태응답의 오차를 제거할 수 있음을 예제를 통하여 확인하였다.

參 考 文 獻

- [1] C.F. Chen & L.S. Shieh, "A Novel Approach to Linear Model Simplification" *Int. J. Cont.* vol. 8, pp.561-570, 1968.
- [2] S.C. Chuang, "Application of Continued Fraction Method for Modelling Transfor Functions to give More Accurate Initial Transient Response" *Electron. Lett.* vol. 6, pp.861-863, 1970.
- [3] Y. Shamash, "Model Reduction using Routh Stability and the Pade Approximation Technique" *Int. J. Cont.* vol. 21, No. 3, pp.475-485, 1975.
- [4] D. Bovin & D. Mellichamp "A Unified Derivation and Critical Review of Model Approaches to Model Reduction" *Int. J. Cont.* vol. 35, pp.829-848, 1982.
- [5] C. Kwong "Optimal Chained Aggregation for Reduced Order Modelling" *Int. J. Cont.* vol.35, pp. 965-982, 1982.
- [6] M.J. Bosley & F.P. Lees "A Survey of Simple Transfer Function Derivations from High-Order State-Variable Models" *Automatica*, vol. 8, pp. 765-776, 1972.
- [7] J. Siret, G. Michalesco & P. Bertrand "Representation of Linear Dynamical Systems by Aggregated Models" *Int. J. Cont.* vol. 26, pp. 121-128, 1977.
- [8] J. Hickin & N. Sinha, "Canonical Forms for Aggregated Models" *Int. J. Cont.* vol. 27, pp. 473-483, 1978.
- [9] M. Aoki "Control of Large Scale Dynamical System by Aggregation" *IEEE Trans.* AC-13, no. 3, pp. 246-253, 1968.
- [10] Kailath, "Linear Systems" Prentice-Hall, 1980. \*

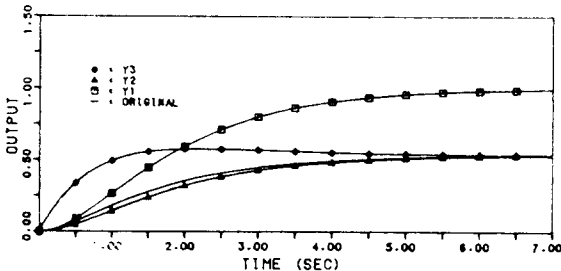


그림 3. Dominant pole이 중근인 경우  
Fig. 3. Thye case of double dominant poles.