

混合-交換圖 作成을 위한 새 알고리즘

(A New Algorithm for Drawing the Shuffle-Exchange Graph)

李 晟 雨*, 黃 好 正**

(Sung Woo Lee and Ho Jung Hwang)

要 約

VLSI 설계에서 混合-交換圖는 所要面積, 配線長, 交叉線數 등을 最小化 하는 레이아웃의 방법으로 이용된다.

HOEY와 LEISERSON은 N 개 節點의 混合-交換圖를 $O(N^2/\log N)$ 의 所要面積에 그리는데에 複素平面圖를 이용하는 방법을 제안하였다.^[1]

이 論文에서는 複素平面圖를 쓰지 않고, 10진수로 表示한 混合線 관계의 節點들의 표를 만들고, 이 圖表를 가지고 더 効率的인 混合-交換圖를 構成하는데 필요한 그 構造의 性質을 찾아 간추려 증명하고, 이것에 준하여 직접 혼합-교환도를 그리는 새 알고리즘을 제안한다.

더 간결한 이 알고리즘에 따라 빠르게 처리될 수 있는 FORTRAN 프로그램을 작성하였다. 프로그램은 節點數를 입력으로 하여 목표한 수준의 最適化 혼합-교환도를 인쇄해 낸다.

Abstract

In case of VLSI design, the shuffle-exchange graph is useful for optimal layout.

HOEY and LEISERSON proposed the method of drawing a N -nodes shuffle-exchange graph on $O(N^2/\log N)$ layout area by using the complex plane digram. [2]

In this paper, a new algorithm for drawing the shuffle-exchange graph is proposed.

This algorithm is not by using the complex plane diagram, but the table of decimal represented nodes of shuffle-edge relations. And the structural properties for optimal layout of the graph are summarized and verified. By using this more simplified algorithm, a FORTRAN program which can be treated faster is written. Aimed near optimal shuffle-exchange graphs are printed out by giving inputs; the number of nodes.

I. 序 論

混合-交換圖는 N 개의 節點 $0, 1, \dots, N-1$ 을 混合線 (shuffle-edge) 과 交換線 (exchange-edge) 으로 이어 놓은 圖表이다.

혼합선은 이 節點 (node) 들을 k 비트의 2진수로 표현한다고 할 때, 한 節點 $w = a_{k-1} \dots a_0$ 와 w 의 各

*正會員, 東洋工業專門大學 電子工學科
(Dept. of Elec. Dong-yang Tech. College)

**正會員, 中央大學校 電子科
(Dept. of Elec. Eng., Jung-Ang Univ.)

接受日字: 1985年 9月 12日

비트들을 右循環 (또는 左순환) 시프트한 $w' = a_0 a_{k-1} \dots a_1$ (또는 $w' = a_{k-2} \dots a_0 a_{k-1}$) 으로 표시되는 일련의 절점들을 하나의 實線으로 이어 놓은 것이다. 또 交換線은 한 절점 $w = a_{k-1} \dots a_1 0$ 에 대하여 그 끝 비트인 0을 1로바꾼 $w' = a_{k-1} \dots a_1 1$ (또는 그 역)의 두 절점을 對稱으로 이어놓은 것이다.

이러한 혼합-교환도는 所要面積, 이음선의 총길이, 交叉數, 最大線長, 最大交叉數등을 가능한 한 最小로 하는 最適化 레이아웃을 위해 이용된다. 混合-交換圖의 절점과 이음線이 각각 프로세서와 신호전송선을 의미하는 것이라고 하면, 혼합-교환도는 매우 효율적인 병행처리 컴퓨터를 나타내는 것이라고 할 수 있다. 컴퓨터에서 대량의 데이터를 신속히 처리하기 위하여 그 흐름에 맞추어 단위 작업을 많은 數의 프로세서들로 병행처리케 한다는 것은 좋은 아이디어이며, 이때 프로세서들 간의 데이터의 需給, 交換, 절단속도, 신호들간의 간섭, 전력손실, 그리고 VLSI의 소요면적 최소화와 그 신뢰성등은 모두 중요하게 고려해야할 사항이 된다. 이러한 프로세서들의 집합은 특히, DFT (Discrete Fourier Transform), 분류(sort), 多項式의 계산, 매트릭스 積등을 병행처리하는데 이용된다.

HOEY와 LEISERSON은 N개 절점의 혼합-교환도를 $O(N^2/\log N)$ 의 소요면적에 그리는데 있어 복소평면도를 이용하는 방법을 제안하였다. 복소평면도는 k비트의 2진수로 표시되는 절점 $w = a_{k-1} \dots a_0$ 의 각각의 비트에 그 비트번째 k차 單位 原始根(k-th primitive root of unity) $\delta_k^i = e^{2\pi i/k}$ 를 곱해 줌으로써 얻어지는 點 $P(w) = a_{k-1} \delta_k^{k-1} + \dots + a_1 \delta_k + a_0$ 들을 하나 하나 복소평면 위에 나타낸 그림이다. $N = 2^k (k > 1)$ 인 자연수)개의 절점 $0, 1, \dots, 2^k - 1$ 들을 복소평면 위에 나타내면 다음과 같은 사실들이 밝혀진다.

[1] 복소평면도 상에서 혼합선 관계의 절점들은 원점에 대하여 對稱인 하나의 正多角形을 형성한다. 이들 한 무리의 절점들을 목걸이(Necklace)라 한다.

[2] 복소평면도 상에서 交換線 관계가 있는 두 절점은 반드시 한 수평선 상에서 단위길이로 이어진다. 교환선이 위치하는 수평선의 높이를 준위(level)라 한다.

복소평면도에 표시된 절점들이 갖는 이러한 두 성질은 이를 이용 최적화 혼합-교환도를 그리려는데 있어 매우 중요한 잇점들을 示唆한다. 혼합선 관계의 절점들이 하나의 목걸이를 형성한다는 것은 이들을 한쪽으로 모아 놓으면 짧은 선 길이로 이어질 수 있음을 알게하고, 또 교환선들이 한 준위의 수평선상에 있다는 것은 이들을 수평으로만 연결하여 선길기와 교차점 數를 최소로 할 수 있음을 의미해 주기 때문이다. 또

이들은 서로 相馳됨이 없이 동시에 만족된다.

이런 점들 때문에 이제까지의 論文들은 먼저 복소평면도를 그리고 이를 수직과 수평 트랙을 가진 4개의 平面 (Thompson's grid model)에 한 목걸이당 2개의 수직트랙을 써서 분포시켜 놓은 다음 한 준위에 여러개의 교환선들이 중첩되지 않도록 분리시키고 비어 있는 수평준위는 교환선으로 채우는 등의 방법으로 최적화 혼합-교환도를 그리고 있다.

이에 대하여 이 論文에서의 방법을 요약하면

- (1) 먼저, 목걸이를 형성하는 혼합선 관계의 절점들을 찾아 10진수로 표시된 절점들의 분포표를 만들고,
- (2) 각 목걸이내의 절점들을 左右측 트랙에 규칙에 따라 나누어 놓으며,
- (3) 각 목걸이의 배치 순서를 결정하고,
- (4) 목걸이 내의 절점들의 순환순서를 유지하면서 교환선들을 빼내어 혼합교환도를 만들어 나간다.

이러한 작업은 어떤 방법으로 절점이나 목걸이를 분류하고 배치하는 것이 最適化 그래프를 그리는데 더 효율적이냐 하는 것을 논리적으로 규명하고 그 성질에 따라 실행한다.

복소평면도가 혼합-교환도의 혼합선과 교환선이 갖는 특성을 數學的으로 解析한 것임에 비하여, 그것은 圖表에서 構造的性質로서 파악될 수도 있을 것인데 착안하였다. 또 複素平面圖는 初期配置를 위한 것이고 最適化를 위한 축소작업의 알고리즘은 初期配置된 圖表를 재분석해 찾지 않으면 안된다는 점에도 유의하였다.

세밀하게 분석된 과정은 모두 프로그램을 작성하는데 적용되었다.

II. 既存 重要 理論의 整理

1. 複素平面圖의 性質

[성질 1] 복소평면도 상에서 모든 혼합선은 原點에 대하여 對稱인 正多角形을 형성한다. 이를 목걸이라 한다.

$$\begin{aligned} (\text{증명}) \quad \delta_{kP}(a_{k-1} \dots a_0) &= a_{k-1} \delta_k^k + a_{k-2} \delta_k^{k-1} + \dots + a_1 \delta_k^2 + \\ & a_0 \delta_k = a_{k-1} \delta_k^{k-1} + \dots + a_0 \delta_k + a_{k-1} \\ &= P(a_{k-2} \dots a_0 a_{k-1}). \end{aligned}$$

여기서, $\delta_k^i = e^{2\pi i/k}$ {k: 2진비트수, i: i번째 비트 $0 \leq i < k$ }

[성질 2] 복소평면상에서 교환선들은 단위길이의 수평선분으로 이어진다.

(증명) $P(a_{k-1}, \dots, a_1, 0) + 1 = a_{k-1} \delta_k^{k-1} + \dots + a_1 \delta_k + 1$
 $= P(a_{k-1}, \dots, a_1) \square$

2. 레이아웃 面積關係

[정리 1] N개 節點의 혼합-교환도에는 $O(N^{1/2})$ 개의 불완전 목걸이와 $N/\log N \sim O(N^{1/2}/\log N)$ 개의 완전 목걸이가 존재한다.

* 완전 목걸이(Full Necklace): k(비트數)개 節點으로 구성된 목걸이.

* 불완전 목걸이(Degenerate Necklace): k개보다 적은 數의 節點들로 구성된 목걸이.

* 記號 $O: f(n) = O(g(n)) \leftrightarrow f(n) \leq Cg(n), n \geq n_0$ 를 만족하는 陽의 數 C, n_0 가 존재함.

(증명) 節點 N이 k비트의 2진수로 표현될 때 k가 어떤 素數 P_1 으로 나누어지고 P_1 개 집단으로 나뉘어진 k/P_1 개의 2진수들이 구조가 서로 같다면 이와 같은 構造의 k비트 2진數는 k/P_1 번 左순환 시프트했을 때 같은 節點이 된다. 따라서, 이 목걸이는 k/P_1 개의 節點들로 구성되는 불완전 목걸이가 된다. k/P_1 비트의 2진수는 $2^{k/P_1}$ 개 있고, 이들 각각에 대해 위의

0 1 0 : 0 1 0 : 0 1 0

그림 1. 어떤 節點의 2진수 표현 $k=9, P_1=3, k/P_1=3$ 구조는 0 1 0으로 같음

Fig. 1. A node of degenerate necklace.

논리가 적용되므로 $2^{k/P_1}$ 개의 불완전 목걸이의 節點들이 나온다. 또, 다른 P_2 란 素數에 대해서도 같은 현상이 나타나게 되므로 이들을 총합하면,

$$N_b = \sum_{P=2}^{P \leq k} 2^{k/P} \quad (1)$$

가 된다. 단, 素數 P_1, P_2, \dots 들에 대하여 각 비트가 모두 0이나 모두 1인 구조의 경우등은 중복 계산됨.

그러므로, 불완전 목걸이에 속하는 節點들의 총수는 最大,

$$N_b \leq O\left(\sum_{P=2}^{P \leq k} 2^{k/P}\right) \leq O(2^{k/2} + 2^{k/3} + 2^{k/5} + \dots)$$

$$\leq O(2^{k/2} \times 2) = O(N^{1/2} \times 2) \quad (2)$$

또는, $N_b = O(N^{1/2})$ 이다 (O의 정의에 따라).

한편, 완전 목걸이의 數 N_{kSF} 는

$$N_{kSF} = N/\log_2 N - O(N^{1/2})/\log_2 N \quad (3)$$

이들을 위한 수식 트랙의 數는

$$V_{trk} = 2N_{kSF} + O(N^{1/2}) = 2N/\log_2 N + O(N^{1/2}) \quad (4)$$

(1) $O(N^2/\log^{1/2} N)$ 面積 레이아웃

THOMPSON의 혼합교환도^{1,3,1)}는 $N=2^k$ 개의 節點들 數가 증가하는 順序로 일직선상에 놓는다(N개의 수

직트랙이 필요). 또 어떤 크기(*size: 節點의 2진수 표현에 들어 있는 1의 갯수, 예 01001의 크기는 2)의 모든 節點이 그 크기가 1만큼 다른 인접한 목걸이의 節點으로 교환선으로 연결되려면 이들이 겹치지 않게 하기 위해 節點수 만큼의 수평트랙이 필요하다. 크기 S인 節點의 數 B_S 는 kC_S 이고, 또

$$\max_{0 \leq S \leq k} B_S = B_{k/2} = kC_{k/2} = (2/\pi)^{1/2} (2^k/k^{1/2}) \quad (5)$$

이 값은 필요한 수평트랙의 數이므로 所要面積 A_{layout} 은,

$$A_{layout} = N \times \max_{0 \leq S \leq k} B_S = (2/\pi)^{1/2} (2^k/k^{1/2}) \cdot 2^k$$

$$= O(N^2/\log_2^{1/2} N) \quad (6)$$

(2) $O(N^2/\log N)$ 面積 레이아웃

수직트랙 $V_{track} = 2N/\log_2 N + O(N^{1/2})$

수평트랙 $H_{track} = N/2 + 2$

所要面積 $A_{layout} = V_{track} \times H_{track}$

$$= N^2/\log_2 N + O(N^{3/2}) \quad (7)$$

그림 2는 32節點 혼합-교환도를 이방법으로 레이아웃한 예이다.

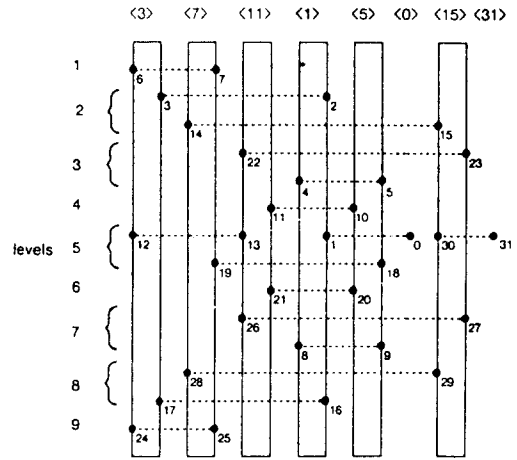


그림 2. $O(N^2/\log N)$ 면적 레이아웃

Fig. 2. $O(N^2/\log N)$ layout.

(3) $O(N^2/\log_2^{1/2} N)$ 면적 레이아웃

$$V_{track} = 2N/\log_2 N + O(N^{1/2})$$

$$H_{track} = (2/\pi)^{1/2} N/\log_2^{1/2} N + O(N/\log_2^{1/2} N)$$

$$A_{layout} = 2(2/\pi)^{1/2} N^2/\log_2^{1/2} N + O(N^2/\log_2^{1/2} N) \quad (8)$$

3. 節點의 2進數 表現의 構造

[성질 3] 基本節點과 그에 의하여 파생된 派生節點은 複素平面上에서 같은 準位에 존재한다.

*基本節點(Basis node); $a_{k-1} \dots a_0$ 인 절점에서 각 $i \leq k-1$ 에 대하여 $a_{k-i} = 0$, 또는 $a_i = 0$, 또는 둘다 0인 절점

*派生節點(generated node); 기본절점 $a_{k-1} \dots a_0$ 가 있을 때 만일 ① $1 \leq i \leq k-1$ 인 i 에 대하여 $a_{k-i} \neq a_i$ 일 때는 $b_{k-i} = a_{k-i}$, $b_i = a_i$ 이고, ② $1 \leq i \leq k-1$ 인 i 에 대하여 $a_{k-i} = a_i = 0$ 일 때는 $b_{k-i} = b_i$ 가 되는 절점 $b_{k-1} \dots b_0$ 를 기본절점 $a_{k-1} \dots a_0$ 에 의하여 파생된 절점이라 한다.

(증명) $u = (a_{k-1} \dots a_0)$ 가 $v = (b_{k-1} \dots b_0)$ 를 파생시켰다면, $P(v) - P(u) = (b_{k-1} - a_{k-1})\delta_k^{k-1} + \dots + (b_1 - a_1)\delta_k + (b_0 - a_0) = C_{k-1}\delta_k^{k-1} + \dots + C_1\delta_k + C_0$ (9)
여기서, 파생절점의 정의 중 ①의 경우는 $C_{k-1} = C_1 = 0$ ($\because b_{k-1} = a_{k-1}, b_1 = a_1$) ②의 경우는 $C_{k-1} = C_1 = 0$ or 1 ($\because a_{k-i} = a_i = 0$ 이면 $b_{k-i} = b_i$)로 항상 $C_{k-1} = C_1$ 이다. 또 δ_k^{k-1} 는 δ_k 에 대해 공액복소수이므로 $P(v) - P(u)$ 는 항상 實數이고 이것은 $P(u)$ 와 $P(v)$ 가 복소평면상에서 같은 준위에 있게 됨을 의미한다. □

[정리 2] 크기(size) γ 인 각 기본절점들은 B_s 개의 크기 S 인 절점들을 파생시킨다. 여기서, k 가 홀수일 때,

- ① $B_s = C(h - \gamma, i); S = \gamma + 2i$ 이고, $i \leq h - \gamma$ 일 때,
- ② $B_s = C(h - \gamma, i); S = \gamma + 2i + 1$ 이고, $i \leq h - \gamma$ 일 때,

또, k 가 짝수일 때는

- ③ $B_s = C(h - \gamma + 1, i); S = \gamma + 2i$ 이고, $i \leq h - \gamma + 1$ 일 때,
- ④ $B_s = 2C(h - \gamma, i); S = \gamma + 2i + 1$ 이고, $i \leq h - \gamma$ 일 때,

여기서, $h = k/2$ (k 가 짝수일 때)
 $= (k-1)/2$ (k 가 홀수일 때)

(증명) 생략. 각용어에 대한 예를 보임. 5비트로 표시되는 節點의 경우.

① 基本節點

$$\left. \begin{array}{l} 4\ 3\ 2\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} k-1=4, \text{와 } 1\text{비트, } a_4 = a_1 = 0, k-2 \\ = 3\text{과 } 2\text{비트, } a_3 = a_2 = 0 \\ a_4 \neq a_1, a_3 = a_2 = 0\text{인 경우} \end{array}$$

② 派生節點

① 기본절점 0 0 0 1 0에 의한 파생절점.

$$0\ 0\ 0\ 1\ 1 \left(\begin{array}{l} \text{정리2의 ②의 경우, } s=2, h=2, \\ \gamma=1, i=0, C(2-1,0)=1 \end{array} \right)$$

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0 \left(\text{①의 경우, } S=3, h=2, \gamma=1, i=1 \right)$$

$$0\ 1\ 1\ 1\ 1 \left(\text{②의 경우, } s=4, h=2, \gamma=1, i=1 \right)$$

② 기본절점 0 0 0 0 0에 의한 파생절점.

$$\begin{array}{l} 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \left(\begin{array}{l} \text{정리2의 ①의 경우, } s=2, h=2 \\ \gamma=0, i=1, C(2-0,1)=2 \end{array} \right) \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \left(\begin{array}{l} \text{정리2의 ①의 경우, } s=4, h=2, \\ \gamma=0, i=2, C(2,2)=1 \end{array} \right) \end{array}$$

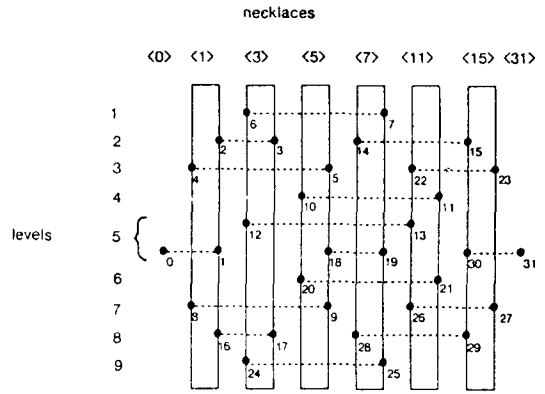


그림 3. 그림 2보다 개선된 혼합교환도
Fig. 3. An improved layout for 32-node shuffle-exchange graph.

Ⅲ. 實際의 레이아웃

실제의 레이아웃에서 複素平面圖를 이용하는 방법을 간단한 경우를 예로들어 설명한다.

1. 8 절점의 경우

(1) 複素平面圖

8 절점의 경우의 복소평면도는 그림 4와 같다.

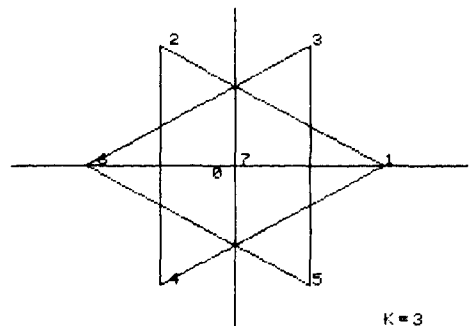


그림 4. 8 절점의 복소평면도
Fig. 4. 8Nodes complex plane diagram.

(2) 목걸이의 配列

복소평면도에 나타난 목걸이들을 기준절점 數順配列 (Ⅳ. 1. 용어정의 참조)을 한다(그림 5). 그림 5의 목

표 1. 複素平面圖의 각 點을 구하는 表

Table 1. Nodes on complex plane diagram.

목걸이	절점	2진표현	복소평면상의 좌표
불완전	0	0 0 0	原點, $0+j0$
완전	1	0 0 1	$\cos 0 + j\sin 0 = 1 + j0$
	2	0 1 0	$\cos 2\pi/3 + j\sin 2\pi/3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
완전	4	1 0 0	$\cos 4\pi/3 + j\sin 4\pi/3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
	3	0 1 1	$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{3} + j(\sin 0 + \sin 2\pi/3) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
완전	6	1 1 0	$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + j0$
	5	1 0 1	$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
불완전	7	1 1 1	$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$ (原點)

* $P(\omega) = a_k \delta_k^{-1} + \dots + a_1 \delta_k + a_0$ 에 의하여

걸이에서 左右 트랙을 바꿔준다(그림5')

교환선 0-1, 6-7, 4-5를 한 준위씩 올려 빈 준위를 채운다(그림6).

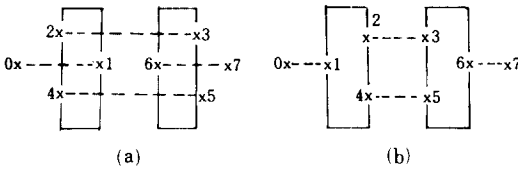


그림 5. Fig. 5.

그림 5'. Fig. 5'.

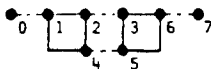


그림 6. 8 절점 혼합교환도

Fig. 6. a 2×6 layout for the 8 node sbuffle exchange graph.

2. 32 절점의 경우

- ① 복소평면도(그림 7)
- ② 각 목걸이를 網形의 트랙에 옮김(그림 8)
- ③ 목걸이의 배열순서를 바꾸고, 수평트랙에 교환선들이 겹치지 않게하며 밀도 있게 배치(그림2, 그림3). (이 경우 II장 3절 성질3, 정리 2의, 절점들의 2진수 구조분석을 바탕으로 함)
- ④ 목걸이의 좌, 우 트랙을 바꾸고 빈 수평트랙에 교환선을 채워올림(그림 9).
- ⑤ 불완전 목걸이가 있는 경우나 128 절점 이상의 대규모 혼합교환도의 경우는 한 목걸이에 속

한 절점들을 순환 이동시키면서 수평트랙 數를, 다른 완전 목걸이의 수직트랙 왼쪽 또는 아랫쪽에 불완전 목걸이를 함께 배치하여 수직트랙의 數를, 줄이는 등의 불규칙한 변형을 통해 最適化 혼합-교환도를 작성할 수 있으나 그 테크닉은 무수한 반복작업과 평가요소 비교를 통해서 이루어진다.

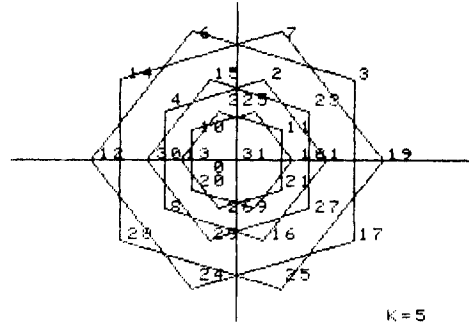


그림 7. 32 절점의 복소평면도

Fig. 7. The complex plane diagram for 32 nodes.

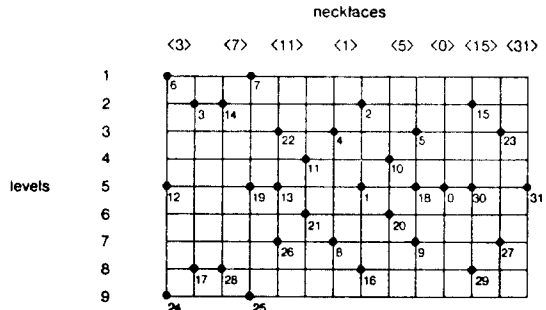


그림 8. 32절점 혼합-교환도의 혼합, 교환선의 망 Fig. 8. A level-necklace grid for the 32-node shuffle-exchange graph.

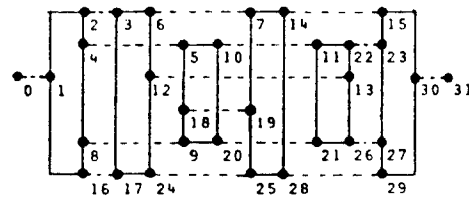


그림 9. 32절점 혼합교환도의 6×14 레이아웃 Fig. 9. A 6×14 layout for the 32-node shuffle-exchange graph.

IV. 提案하는 알고리즘

1. 用語定義

基準節點: 한 목걸이에서 가장 작은 數로 표현되는

첫 절점

從屬節點: 기준절점의 2진수표현을 左순환시프트하여 얻어진 2진수로 표현되는 절점

基準節點數順配列: 목걸이의 배열에서 기준절점의 數의 크기가 작은數에서 큰 數 順으로 左에서 右로 配列함.

크기(size) 順 配列: 각 목걸이의 절점들의 2진수 표현에서의 1의 갯수, 즉 크기가 작은 목걸이에서 큰 목걸이의 順으로 좌에서 우로 배열함.

혼합 配列: 평가요소의 개선을 위해 크기와 數順을 변형하여 더 유리한 방법으로 배열함(성질6 참조).

2. 節點들의 性質

[성질 1] 0을 제외한 모든 기준절점은 홀수이다.

(증명) 생략

[성질 2] 한 기준 절점이 파생시키는 종속절점들은 어떤 다른 목걸이의 기준 절점이나 종속절점이 될 수 없다.

(증명) 생략

[성질 3] 교환선 관계의 두 절점은 같은 목걸이에 소속하지 않으며, 항상 크기가 1만큼 다른 목걸이에 존재한다.

(증명) w와 w'가 교환선 관계라면 $w = a_{k-1} \dots a_1 a_0, w' = b_{k-1} \dots b_1 b_0$ 라고 표현할 때 반드시 $a_i = b_i (1 \leq i \leq k-1)$ 이고 $a_0 = \bar{b}_0$ 여야 한다. 따라서 이들은 크기가 다르므로 한 목걸이에 소속될 수 없고, 또 그 크기는 1만큼 다르다. □

[성질 4] 基準節點은 그 構造상 다음과 같은 성질을 가진다.

① 기준절점의 2진수 표현에서 얻어진 가장 긴 일련의 비트들은 최상위비트 쪽에 놓인다.

② 얻어진 0의 갯수가 같은 일련의 비트가 2 이상 있는 경우에는 그 오른쪽으로 얻어진 1의 갯수가 적은쪽이 상위 비트로 오게 된다.

(증명) 일련의 얻어진 0의 갯수가 가장 많은 비트들이 最上位 비트로 올때 그 數는 가장 작은 數가 된다(기준 절점의 정의) □

[성질 5] 목걸이의 기준절점數順配列, 크기 순 배열, 혼합배열의 어느 경우나 한 목걸이 내의 홀수 절점은 左트랙에 짝수절점은 右트랙에 많이 오도록 나누는 것이 유리하다.

(증명) 위의 목걸이의 배열방법은 모두 한 목걸이의 모든 홀수 절점은 그보다 크기가 1만큼 작은 목걸이에서 그의 교환선 관계의 짝을 찾고, 이런 목걸이는 항상 자신보다 왼쪽에 놓인다.(짝수 절점들은 그 역) 따

라서, 교환선 길이와 교차점 數를 줄이려면 절점들의 혼합선 순환순서를 지키는 범위 안에서 홀수 절점은 左측, 짝수 절점은 右측트랙에 놓는 것이 유리하다. □

[성질5'] 성질 5에 따라 한 목걸이에서의 절점들의 좌우 트랙의 配置는 그 목걸이의 기준절점의 2진수 표현의 構造를 조사하여,

① 상위비트의 얻어진 0들이 최하위비트로 左 순환 시프트하여 생긴 짝수 절점들은 右측 트랙에 놓는다.

② 다음에 0에 이어 얻어지는 1의 갯수와 그 다음으로 얻어지는 0의 갯수를 비교하여,

1의 갯수 < 0의 갯수 일 때는 이들이 최하위 비트로 左순환시프트하여 만드는 모든 짝수와 홀수 절점을 右측트랙에, 그 반대일 때는 그들 모두를 左측트랙에 놓는다. 또 서로 같을 때는 左右트랙 중 절점 數가 적게 놓인 쪽에 이들 모두를 놓는다.

③ 기준절점은 홀수 절점이므로 항상 左측트랙에 놓인다.

(증명) 이것은 성질 5에 따라 혼합선의 순환순서를 유지하면서 짝수 절점은 가능한 한 右측에, 홀수절점은 左측에 배치하기 위한 것이다. 얻어진 0은 이들이 최하위 비트로 시프트 되었을 때 짝수 절점이 되고 1들은 홀수절점이 되기 때문에 기준절점의 2진수 구조를 조사하면 그 목걸이의 절점들의 좌우 트랙 배치는 이 원칙에 따라 나눌 수 있다. □

예: 0 0 1 0 0 1 1 (19) 기준 절점 (左)	
0 1 0 0 1 1 0 (38) (右)	19-38
1 0 0 1 1 0 0 (76) (右)	73 76
0 0 1 1 0 0 1 (25) (右)	25
0 1 1 0 0 1 0 (50) (右)	50
1 1 0 0 1 0 0 (100) (右)	100
1 0 0 1 0 0 1 (73) (左)	

그림 10. 한목걸이의 절점들의 左右트랙 배치
Fig. 10. Selecting of left or right track for nodes of a necklace.

3. 트랙배열 순서에 대한 성질

[성질 6] 혼합배열: 목걸이의 배열 순서는 목걸이를 먼저 기준절점 數順배열을 한 뒤, 한 목걸이 X에 소속된 절점들의 교환선 관계의 짝들이 소속한 트랙 번호를 모두 조사하여,

① 이 목걸이 X는 그의 홀수 절점들의 짝인 짝수 절점이 소속한 가장 큰 트랙 번호보다 적어도 1만큼 큰 數의 트랙번호를 가져야 한다.

② 이 목걸이 X는 그 짝수 절점들의 짝인 홀수절점이 소속한 트랙 번호 중 가장 작은 數의 트랙 번호보

다 적어도 1만큼 작은 數의 트랙 번호를 가져야 한다.

③ 같은 크기의 여러 목걸이 중 ①과 ②의 조건을 만족한다면 ①의 조건을 만족시키는 가장 작은 트랙번호에 올 수 있는 목걸이는 그 위치에 놓는다.

④ 같은 크기의 목걸이 중 右측 트랙에 홀수 절점의 數가 많은 목걸이는 그렇지 않은 목걸이에 비하여 左측으로 오도록 교환 배치한다.

(증명) 이상의 배치방법은 교환선을 가능한한 밀도가 높게 놓이게 하고 교환선의 길이와 교차점의 수를 줄이기 위한 것이다. 성질의 ①, ②항은 성질5를 만족시키기 위한 것이다.

③항은 교환선을 위한 수평트랙을 더 효율적으로 이용하기 위한 것이다. 만일, 목걸이를 크기 순 배열을 하였다면 필요한 수평트랙의 數는 적어도,

$$HT = C(k, k/2) \times S' / k \text{ (개)} \quad (10)$$

있어야 한다. 여기서, $S' = k/2$ (k : 짝수때),

$$S' = (k+1)/2 \text{ (} k \text{: 홀수 때).}$$

$C(k, k/2)$ 는 $\max_{1 \leq s \leq k} B_s$ 이고, 이는 크기 S 인 절점들의 총 數이다. 이중 짝수절점이나 홀수절점 중 그 數가 많은 쪽을 한 절점 당 한 개 수평트랙으로 해결하면 그 數가 적은 쪽은 같은 수평트랙의 반대편 트랙을 이용하면 되므로 모든 절점들을 수용할 수 있게 된다. $\max B_s$ 만 해결하면 다른 B_s 는 그 절점數가 적으므로 $\max B_s$ 에 의해 확보된 수평트랙의 빈 부분을 차지하여 해결될 수 있다. 그런데, 혼합배열을 하여 어떤 크기의 목걸이가 그 크기보다 작은 목걸이의 左측으로 올 수도 있는 경우에는 그 목걸이의 절점의 일부는 짧은 교환선으로 이어지는 절점쌍들이 생기며, 남은 수평트랙은 같은 크기의 다른 목걸이의 절점 쌍들이 이용할 수도 있으므로 수평트랙을 더 밀도있게 사용할 수 있게 된다.

④ 같은 크기의 목걸이는 왼쪽으로 향할 교환선의 數와 오른쪽으로 갈 교환선의 數가 각각 서로 같다. 그러므로 그 위치는 어느 목걸이가 左 또는 右측에 오

4	5	6	10	12	13	11
⑤ 10	⑦ 14	⑨ 18	⑰ 38	⑳ 54	㉑ 42	㉒ 46
66	20	67	28	0	36	73
76	77	108	74	84	75	92
33	40	97	56	0	72	0
25	102	0	37	41	101	57
0	80	0	112	0	17	0
50	51	0	0	82	0	114
0	0	0	0	34	0	100
89	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	68	0	0
0	0	0	0	0	0	0

(-) (L)

그림11. 혼합배열의 예
Fig.11. an example of mixed array.

① 5와 9는 크기가 2인 기준절점

7은 크기가 3인 기준절점이나 5와 9사이에 위치하였다.

㉑ 19, 27, 21, 23(기준절점들)이 크기와 수순이 뒤섞여 있음(128 절점의 경우).

맨 윗줄 10, 12, 13, 11은 새로결정된 배열 번호 전 등가이다. 그러나 右측 트랙에 홀수 절점의 數가 많은 것이 左측으로 옴으로써 最大 선길이나 最大 交點 數가 줄 수 있다. □

V. 새 알고리즘에 따른 혼합-교환도

1. 32 절점의 경우

(1) 성질 1, 2를 바탕으로 기준절점을 左순환시프트하여 얻는 종속절점들을 성질 4와5, 5'에 따라 배치 표 2와 같은 10진수 표시의 목걸이의 표를 만듦.

표 2. Table 2.

0	0	1	2	3	6	5	10	7	14	11	22	15	30	31
0	0	0	4	17	12	18	20	19	28	21	13	23	0	0
0	0	0	8	0	24	3	0	25	0	0	26	27	0	0
0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	0	23	0	0	0

(2) 성질 6의 트랙번호 조사와 아울러 성질 6 ①, ②, ③, ④에 준하여 목걸이의 재배열 순서를 정하고(표 3 참조) 표 2을 재배열 표 2'를 만듦(표 2과 같은 형태)
(3) 표 2'에서 혼합선 순환 순서를 지키면서 교환선을 취해 그림12의 원형을 만듦.

표 3. Table 3.

0	0	0	4	9	4	11	6	13	8	13	10	15	14
0	0	0	4	12	9	11	7	13	8	6	12	0	0
0	0	0	0	9	4	0	6	0	0	13	12	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
0	2	2	4	4	4	5	7						
100	5	5	7	7	8	100							
0	3	3	0	0	0	0							
0	0	0	5	5	0	0							
0	0	0	0	0	7	0							
0	3	0	5	0	7	0							
2	3	4	6	5	7	0							

① 2-3, 6-7, 14-15를 취해 1번 수평트랙에 놓음.

② 10-11, 22-23(15가 처리 되지 않았을 때는 22-23은 취할 수 없음)을 취해 2번 수평트랙에 놓음. 처리된 절점들은 배열의 그 자리에 0을 넣음.

③ 2행의 4-5를 취함(2가 처리 되었는가 검사하고) 또, 4-5가 수평트랙 2번으로 올라 갈수 있는지 조사함.

④ 끝행까지 위 과정을 실행한 후 취해지지 않은 절점들을 위하여 위 과정을 반복함.

(5) 평가요소

그림 9 (기존 방법에 의한)의 경우와 비교하여, 所要面積, 총 配線長, 총 교차점 數는 같고, 최대선길이는 6에서 5로, 최대 교차점 數는 5에서 3으로 줄었다.

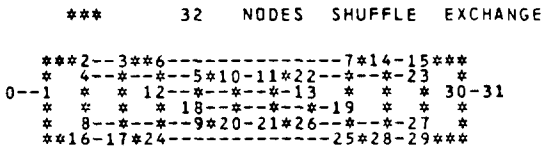


그림 12. 32절점 혼합교환도

표 3. 평가요소

Table 3. measures of interest.

LAYOUT AREA;	14	*	6
WIRE AREA ;	102		
MAXIMUM EDGE LENGTH ;		5	
CROSSING NUMBER ;	14		
MAXIMUM CROSSING NUMBER ;	3		

2. 기타의 경우(64, 128 절점 등)

이들 결과는 별첨자료로 제시하나 따로이 게재 설명하는 것은 생략한다.

불완전 목걸이가 있는 경우나 128 절점 이상의 대규모 혼합교환도의 경우는 기존의 방법에서와 같이 더 세밀하고, 불규칙하며 복잡한 테크닉에 의하여 最適化 혼합-교환도를 얻을 수 있다.

VI. 結 論

이 論文에서는 混合-交換圖를 그리는데 있어, 複素平面圖를 그려 初期配置를 하고 다시 절점들의 2진수

構造分析에 의거 표의 축소작업을 하는 기존의 방법을 쓰지 않고, 목걸이의 10진수 표를 작성하고, 이를 가지고 혼합교환도의 구조적 성질에 맞추어 직접 이를 만들어 나가는 알고리즘을 제안하였다.

기존의 방법은 복소평면도의 작성, 그것을 수평, 수직트랙에 옮기는 일, 2진수의 구조분석 결과를 축소화 작업에 적용하는 문제 등 매우 복잡한 과정을 거쳐야 하므로 프로그램의 작성도 매우 어렵고 또 처리시간도 길어질 수 밖에 없는 것에 비하여, 제안하는 알고리즘은 역시 세밀한 분석방법을 취하고 있으나 혼합-교환도의 구조적 성질을 찾는 일관성 있는 방법에 의하여 그래프를 작성하므로, 그 과정이 훨씬 간결하고 프로그램의 文의 數도 적으며(360文) 처리속도도 빠르다.

그러나 더 큰 규모의 혼합-교환도 작성을 위해서는 最適化된 그래프를 얻기 위해 더 세밀한 기교적인 테크닉의 개발이 계속 추구되어야 한다.

參 考 文 獻

[1] C.D. Thompson, "A Complexity Theory for VLSI." Ph.D paper, Carnegie-Mellon Univ., Aug. 1980.

[2] Hoey, Dan and Leiserson, Charles E., "A Layout for the Shuffle-Exchange Network." In Proc. 1980 International Conf. on Parallel Processing. IEEE Computer Society, Aug. 1980.

[3] F.T. Leighton, "Optimal Layouts for the Shuffle-Exchange Graph and Other Network," MIT Press, 1983.