周期的으로 Slot가 있는 導波管 輻射系의 電磁界解析

(Field Analysis of Periodically Slotted Waveguide Structures Excited by an Aperiodic Source)

金 榮 祖*

(Young Cho Kim)

要 約

任意數의 slot가 等間隔으로 配置되어 있는 周期的裝置에 line source를 加했을 때의 電磁界를 解析하였다. 特性方程式은 각 slot에서의 電界에 관한 聯立積分方程式이 되며 sampling technigue을 適用하므로써 Green函數行列을 包含한 行列方程式으로 變換된다. 級數形으로 얻어지는 解는 收斂速度가 빠른 最終形으로 變換된다. 理論에 의한 計算結果는 實驗結果와 全般的으로 一致한다.

Abstract

A field ploblem of a grounded dielectric slab covered by a conducting plane with periodically spaced arbitrary number of slots excited by an aperiodic source is analyzed. The problem is formulated in terms of simultaneous integral equations for unknown electric fields at each slot. A sampling technique is introduced to reduce the system equations to a matrix equation equation involving Green's function matrix. The solution obtained in the form of infinite series is transformed, into a more rapidly convergent one in its final stage. Theoretical results agree closesly with the experimental results.

I. 序 論

電子 beam裝置의 출현 이후에 또 高性能飛行體에 flush antenna의 필요성이 증가함에 따라서 周期的構造를갖은 각종 電磁裝置가 널리 사용되어 왔다. 그럼에도 불구하고 周期的裝置에 非周期的 source를 가했을 때의 電磁界에 대한 解析的研究結果는 별로 보고된 바가 없는바 이는 관련된 數學的問題가 복잡하기 때문이다.

근자에 sigelmann과 Ishimaru[1,2]는 일종의 平均法인 이른바 "sampling technique"을 도입하였으며 slot 數가 無限히 많은 周期的裝置에 磁氣的 line source를 가했을 경우에 대해서 이 방법을 적용하는데 성공하였다.

本 論文에서는 "sampling technique"을 擴張하여 같은 裝置에 있어서 그들이 연구했든 것보다 더욱 일반적인 경우 즉 任意數의 slot가 있는 경우에도 적용할 수 있도록 하였다.

II. 問題의 公式化

1. 周期的으로 slot가 있는 導波管輻射系

그림 1과 같은 平行板導波管을 생각한다. 한쪽 導體板에는 M개의 slot이 等間隔으로 배치되어 있으므로 이 장치

*正會員, 漢陽大學校 電子工學科 (Dept. of Elec. Eng., Han Yan Univ.)

接受日字：1986年 1月 24日

는 導波管mode를 발생시킬 뿐만아니라 slot를 통해서 輻射도 할 수 있다.

세기K인 磁氣的 line source가 y방향으로 놓여있으므로 발생되는 電磁界는 二次元的이며 y방향의 磁界 Hy에 의해서 완전히 결정된다. K가 導波管내의 한점(x_0, z_0)에 있을 때 time factor $e^{j\omega t}$에 대하여 Hy는

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)H_y=0,\quad x\geq 0\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+k_2^2\right)H_y=-j\omega\varepsilon_2K\delta(x-x_0)\delta(z-z_0),\quad -q\leq x\leq 0\\ k_1^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_1,\quad k_2^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_2\end{array}\right\} \tag{1}$$

및 境界條件

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}=0,\quad x=0 \text{ 및 } x=-q\text{의 導體面} \tag{2}$$

에 의해서 결정된다. (1)과 (2)식은 Neuman의 境界値問題를 구성한다.

2. 積分方程式에 의한 公式化

(1)식은 slot面상의 電界의 접선성분에 대한 積分方程式으로 변환시킬 수 있다.

二次元Green의 定理에 의하면

$$\int_s\left[\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right]ds=\int_c\left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]dl \tag{3}$$

여기서 n은 領域S의 境界線c의 外向法線임.

領域 I $(x\geq 0)$ 및 II $(-q\leq x\leq 0)$에서 Green函數 $G^1(x,z/x',z')$ 및 $G^2(x,z/x',z')$는 각각 다음식들로 정의된다.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)G^1(x,z/x',z')=-\delta(x-x')\delta(z-z'),\quad x\geq 0\\ \dfrac{\partial G^1}{\partial x'}=0,\quad x=0\end{array}\right\} \tag{4}$$

및

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+k_2^2\right)G^2(x,z/x',z')=-\delta(x-x')\delta(z-z'),\quad -q\leq x\leq 0\\ \dfrac{\partial G^2}{\partial x'}=0,\quad x=0 \text{ 및 } x=-q\end{array}\right\} \tag{5}$$

領域 I 에서 $\phi=H_y$ 및 $\psi=G^1$, 領域 II 에서 $\phi=H_y$ 및 $\psi=G^2$라 놓으면 (3), (4)식으로부터

$$H_y(x,z)=-\int G^1(x,z/0,z')\frac{\partial H_y}{\partial x'}(0,z')dz',\quad x\geq 0 \tag{6}$$

(3), (5)식으로부터

$$H_y(x,z)=j\omega\varepsilon_2KG^2(x,z/x_0,z_0)+\int G^2(x,z/0z')\frac{\partial H_y}{\partial x'}(0,z')dz',\quad -q\leq x\leq 0 \tag{7}$$

한편 Maxwell方程式으로부터

$$E_z(x,z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}(x,z) \tag{8}$$

(6), (7)식에서 (7)식의 제 1 항은 primary wave이고 나머지 항들은 slot aperture上에 誘導된 電界 E_z로 인한 scattered wave들 이므로,

$$H_{yp2}(x,z)=j\omega\varepsilon_2KG^2(x,z/x_0,z_0) \tag{9}$$

$$H_{ys2}(x,z)=j\omega\varepsilon_2\int G^2(x,z/0,z')E_z(0,z')dz' \tag{10}$$

$$H_{ys1}(x,z)=-j\omega\varepsilon_1\int_{-\infty}^{\infty}G^1(x,z/0,z')E_z(0,z')dz' \tag{11}$$

라 놓면 slot에서의 磁界의 連續性때문에 $x=0$에서 (6), (7)식은 값이 같아야 한다. 따라서

$$H_{yp2}(0,z)=-j\omega\int G(0,z/0,z')E_z(0,z')dz' \tag{12}$$

여기서 $G(0, z/0, z') = \varepsilon_1 G^{(1)}(0, z/0, z') + \varepsilon_2 G^{(2)}(0, z/0, z')$ (13)

편의상 (12)식을 다음과 같이 쓰면

$$H(0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(0, z/0, z')\, E_z(0, z')\, dz' \tag{14}$$

여기서 $H(0, z) = -\dfrac{1}{j\omega} H_{yP2}(0, z)$ (15)

(12), (14)식은 각 slot aperture에서만 성립되므로 m번째 slot상의 위치를 $\overline{m-1}\,l+z$, $|z|<d/2$라 놓면 (14)식은

$$H(0, \overline{m-1}\,l+z) = \sum_{n=1}^{M} \int_{-d/2}^{d/2} G(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z')\, E_z(0, \overline{n-1}\,l+z')\, dz', \quad m=1, 2, \cdots, M \tag{16}$$

여기서

$$G(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z') = \varepsilon_1 G^{(1)}(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z') + \varepsilon_2 G^{(2)}(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z') \tag{17}$$

(16)식은 $x=0$上의 未知電界E_z에 대한 聯立積分方程式을 구성한다. 이 형체의 積分方程式은 아직 취급되지 않았으므로 sampling technique [1,2] 을 적용하여 이를 풀고자 한다.

3. 行列에 의한 近似方程式

(16)식을 m번째 slot상에서 平均하면

$$\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} H(0, \overline{m-1}\,l+z)\,dz = \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{M}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} G(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z')\, E_z(0, \overline{n-1}\,l+z')\,dz'dz \tag{18}$$

slot폭이 좁아서 $d/l << 1$ 일 때는 E_z의 값은 slot폭내에서 거의 일정하므로

$$E_z(0, \overline{n-1}\,l+z') \fallingdotseq E_z(0, \overline{n-1}\,l), \quad |z'| < \frac{d}{2} \tag{19}$$

따라서 (18)식은

$$\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} H(0, \overline{m-1}\,l+z)\,dz = \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{M} E_z(0, \overline{n-1}\,l)\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} G(0, \overline{m-1}\,l+z\,|\,0, \overline{n-1}\,l+z')\,dz'dz \tag{20}$$

일반적으로 self-adjoint微分方程式의 Green函數는 source point와 observation point의 對稱函數이다.[3] $G(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z')$는 (17)식에 표시한 바와같이 二次元 Green函數의 一次結合이므로 2점 $(\overline{m-1}\,l+z)$과 $(\overline{n-1}\,l+z')$간의 거리에만 관계된다. 따라서

$$G(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z') = G(0, \overline{n-1}\,l+z/0, \overline{m-1}\,l+z') = G(|\overline{m-n}\,l+z-z'|) \tag{21}$$

편의상 다음의 平均量들을 정의한다.

$$H_m = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} H(0, \overline{m-1}\,l+z)\,dz \tag{22}$$

$$V_n = \int_{-d/2}^{d/2} E_z(0, \overline{n-1}\,l+z')\,dz' \fallingdotseq E_z(0, \overline{n-1}\,l)\,d \tag{23}$$

$$G_{m,n} = G_{n,m} = \frac{1}{d^2}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} G(0, \overline{m-1}\,l+z/0, \overline{n-1}\,l+z')\,dz'dz \tag{24}$$

Green函數는 거의 모든 점에서 連續이므로 좁은 slot폭내에서 거의 일정하여 $m\neq n$인 모든 m, n에 대하여

$$G(|\overline{m-n}\,l+z-z'|) \fallingdotseq G(|\overline{m-n}\,l|), \quad m\neq n \tag{25}$$

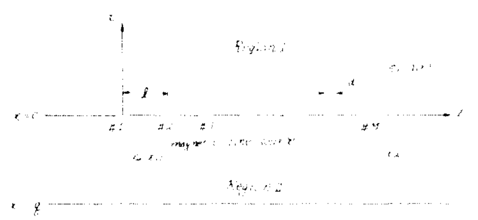


그림 1. M個의 slot가 等間隔으로 配置되어 있는 導波管輻射系

Fig. 1. Waveguide structure with M equally spaced slots.

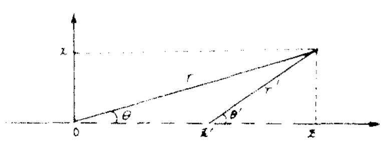


그림 2. 座標系

Fig. 2. Coordinate system.

따라서

$$G_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{d^2}\displaystyle\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2}G(|z-z'|)\,dz'dz, & m=n \qquad (26)\\ G(|m-n|l), & m\neq n \qquad (27)\end{cases}$$

(22), (23) 및 (26)식을 사용하면 (21)식은 近似的으로

$$H_m=\sum_{n=1}^{M}G_{m,n}V_n,\quad m=1,2,\cdots M \tag{28}$$

또는 matrix 형으로

$$[H]=[G][V] \tag{29}$$

여기서

$$[H]=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\\vdots\\H_M\end{bmatrix},\quad [V]=\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\\vdots\\V_M\end{bmatrix} \tag{30}$$

및

$$[G]=\begin{bmatrix}G_{1,1} & G_{1,2}\cdots\cdots & G_{1,M}\\ G_{2,1} & G_{2,2}\cdots\cdots & G_{2,M}\\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\\ G_{M,1} & G_{M,2} & G_{M,M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_0 & G_1\cdots\cdots & G_{M-1}\\ G_1 & G_0\cdots\cdots & G_{M-2}\\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\\ G_{M-1} & G_{M-2} & G_0\end{bmatrix} \tag{31}$$

최후의 표현식에서는 Green函數가 source점과 observation점간의 거리에만 관계된다는 사실을 강조하기 위하여

$$G_{|m-n|}=G_{m,n}=G_{n,m} \tag{32}$$

란 관계식을 사용하였다.

(29)식은 M元聯立函數方程式으로 그 解를 구하려면 Green函數行列 [G]의 逆行列을 알아야 하나 그전에 [G]의 각 要素의 表現式을 구해야 한다.

4. Green函數行列의 基本要素

1) Green函數

Green函數 $G^{(1)}(x,z/x',z')$는 (4)식으로 정의되며 電氣影像法을 적용하면 그 解는 다음과 같다.[4]

$$G^{(1)}(x,z/x',z')=\frac{j}{4}\{H_0^{(2)}[k_1\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}]+H_0^{(2)}[k_1\sqrt{(x+x')^2+(z-z')^2}]\} \tag{33}$$

여기서 $H_0^{(2)}$는 第二種 Hankel函數이다. Green函數 $G^{(2)}(x,z/x',z')$의 정의식은 (5)식으로 그 解는[4]

$$G^{(2)}(x,z/x',z')=\frac{j}{4}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(x-2i\underline{q}-x')^2+(z-z')^2}]+H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(x-2i\underline{q}+x')^2+(z-z')^2}]\} \tag{34}$$

따라서 2점이 각각 m번 및 n번째 slot내에서 지정되었을 때에 (33), (34)식은 각각

$$G^{(1)}(0,\overline{m-1}\,l+z/0,\overline{n-1}\,l+z')=\frac{j}{2}H_0^{(2)}[k_1|\overline{m-n}\,l+z-z'|] \tag{35}$$

$$G^{(2)}(0,\overline{m-1}\,l+z/0,\overline{n-1}\,l+z')=\frac{j}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(2i\underline{q})^2+(\overline{m-n}\,l+z-z')^2}] \tag{36}$$

單一添字方式인 (32)식을 채택하면 윗식들은 (26), (27)식에 의하여 각각

$$G_m^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{j}{2}H_0^{(2)}[mlk_1], & m\neq 0 \qquad (37)\\ \dfrac{j}{2d^2}\displaystyle\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2}H_0^{(2)}[k_1|z-z'|]\,dz'dz, & m=0 \qquad (38)\end{cases}$$

$$G_m^{(2)}=\begin{cases}\dfrac{j}{2}\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(2i\underline{q})^2+(ml)^2}], & m\neq 0 \qquad (39)\\ \dfrac{j}{2d^2}\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2}H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(2i\underline{q})^2+(z-z')^2}]\,dz'dz, & m=0 \qquad (40)\end{cases}$$

한편 (17)식으로부터

$$G_m = \varepsilon_1 G_m^{(1)} + \varepsilon_2 G_m^{(2)} \tag{41}$$

2) 非對角線要素

(37), (39), (41)식은 $m \neq 0$ 때의 Green函數를 표시하나 (39)식의 級數는 收斂速度가 빠르지 않다. 부록M1에서는 observation점이 source로 부터 遠距離에 있을 때 즉 $m \neq 0$일때에 대하여 Poisson sum 公式을 이용하므로써 收斂速度를 높이는 문제를 다루었다.

$x = 0$, $x' = 0$ 및 $z + z' = m$일 때 부록M1의 公式(M1－14)로부터

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[k_2 \sqrt{(2iq)^2 + (ml)^2} \right] = \frac{e^{-jmlk_2}}{k_2 q} + j\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{ml}{2}\pi\sqrt{i^2 - \left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}}{\sqrt{i^2 - \left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} \tag{42}$$

$k_2 q/\pi = 2q/\lambda_2$의 값이 1에 접근하지 않는 한 이 級數의 收斂速度는 빠르지 않다.

(42)식의 각항은 i의 값이 커짐에 따라 $f(i) = \exp(-ml\pi i/2)/i$에 접근하며 이때 $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$를 closed form으로 구할 수 있다면 $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$를 加減하므로써 원 級數의 收斂速度를 개선할 수 있다. 公式[5]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = \ln\frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \tag{43}$$

에서 $x = e^{-\frac{ml}{q}\pi} < 1$라 놓면

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{ml}{q}\pi i}}{i} = -\ln\left(1 - e^{-\frac{ml}{q}\pi}\right) \tag{44}$$

(42)식의 右邊에 (44)식을 加減해주면

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[k_2 \sqrt{(2iq)^2 + (ml)^2} \right] = \frac{e^{-jmlk_2}}{k_2 q} + j\frac{2}{\pi} \left[-\ln\left(1 - e^{-\frac{ml}{q}\pi}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\frac{ml}{q}\pi\sqrt{i^2 - \left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}}{\sqrt{i^2 - \left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{e^{-\frac{ml}{q}\pi i}}{i} \right\} \right] \tag{45}$$

이 級數는 (42)식의 것보다 빠르게 收斂한다.

(45), (39), (37)식을 (41)식에 대입하면

$$G_m = \frac{\varepsilon_1}{\pi} \left[j\frac{\pi}{2} H_0^{(2)}[mlk_1] + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left[\ln\left(1 - e^{-\frac{ml}{q}\pi}\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{ml}{q}\pi\sqrt{i^2 - \left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}}{\sqrt{i^2 - \left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{e^{-\frac{ml}{q}\pi i}}{i} \right) + j\frac{\pi e^{-jmlk_2}}{2k_2 q} \right] \right] \qquad m \neq 0 \tag{46}$$

여기서 $A_m = \frac{ml}{q}\pi$, $B = \frac{k^2 q}{\pi}$ (47)

라 놓면 (46)식은

$$G_m = \frac{\varepsilon_1}{\pi} \left[j\frac{\pi}{2} H_0^{(2)}[mlk_1] + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left[\ln(1 - e^{-A_m}) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-A_m\sqrt{i^2 - B^2}}}{\sqrt{i^2 - B^2}} - \frac{e^{-A_m i}}{i} \right) + j\frac{e^{-jA_m B}}{2B} \right] \right], \quad m \neq 0 \tag{48}$$

3) 對角線要素

$m = 0$일 때는 (19)식의 가정은 성립되지 않는다. 실제로 Green函數는 $m = 0$에서 特異點을 갖고 있으므로 (26)식에 기초를 둔 (38), (40)식을 이용하여 G_0의 값을 구해야만 한다.

Schelkunoff의 식[6]

$$\frac{1}{d^2}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} K_0[jk_1|z-z'|]\,dz'dz = \ln\frac{2\pi}{k_1 d} - 0.222 - j\frac{\pi}{2},\quad k_1 d << 1 \tag{49}$$

에서 變形 Bessel函數 K_0에 관한 關係式[7] $H_0(z) = (2j/\pi)K_0(jz)$를 사용하면 (49)식으로부터

$$\frac{1}{d^2}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_1|z-z'|]\,dz'dz = \frac{2j}{\pi}\left[\ln\frac{2\pi}{k_1 d} - 0.222 - j\frac{\pi}{2}\right],\quad k_1 d << 1 \tag{50}$$

또는

$$\frac{1}{d^2}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_1|z-z'|]\,dz'dz = j\frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{2}{k_1\gamma d} + 1.5 - j\frac{\pi}{2}\right],\quad k_1 d << 1 \tag{51}$$

여기서 Euler定數 $C = 0.577215665$에 대하여

$$\gamma = e^C = 1.781072 \tag{52}$$

(51)식을 (38)식에 대입하면

$$G_0^1 = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{k_1\gamma d}{2} - 1.5 + j\frac{\pi}{2}\right) \tag{53}$$

한편 (40)식으로부터

$$G_0^2 = \frac{j}{2d^2}\left[\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_2|z-z'|]\,dz'dz + 2\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(2iq)^2+(z-z')^2}]\,dz'dz\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{k_2\gamma d}{2} - 1.5\right) + j0.5 + \frac{j}{d^2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(2iq)^2+(z-z')^2}]\,dz'dz \tag{54}$$

한 slot내에서 $2iq \le \sqrt{(2iq)^2+(z-z')^2} \le \sqrt{(2iq)^2+d^2}$ 이므로 slot폭이 좁아 $2q >> d$일 때는

$$H_0^{(2)}[k_2\sqrt{(2iq)^2+(z-z')^2}] \doteq H_0^{(2)}[2iqk_2] \tag{55}$$

따라서 $$G_0^2 = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{k_1\gamma d}{2} - 1.5\right) + j0.5 + j\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk_2] \tag{56}$$

(44)식에서 $m=0$이라 놓면

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk_2] = \frac{1}{k_2 q} + j\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}$$

또는

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk_2] = j\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{q}{\pi}\right)^2}}$$

이 級數는 서서히 收斂하므로 부록M2에서는 이를 收斂速度가 빠른 級數로 변화시켰다. 그 결과식(M2-10)는

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk_2] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2k_2 q} - 0.5\pi + j\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + \ln\frac{k_2\gamma q}{2\pi}\right\}\right] \tag{57}$$

(57)식을 (56)식에 대입하면

$$G_0^2 = \frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{k_2\gamma d}{2} - 1.5 + j0.5\pi + j\left(\frac{\pi}{2k_2 q} - 0.5\pi\right) - \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + \ln\frac{k_2\gamma q}{\pi}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{\pi d}{2} - 1.5 - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + j\frac{\pi}{2k_2 q}\right] \tag{58}$$

(53), (58)식을 (41)식에 대입하면

$$G_0 = \frac{\varepsilon_1}{\pi}\left[\ln\frac{k_1\gamma d}{2} - 1.5 + j\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left\{\ln\frac{\pi d}{q} - 1.5 - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + j\frac{\pi}{2k_2 q}\right\}\right] \tag{59}$$

또는

$$G_0 = \frac{\varepsilon_1}{\pi}\left\{\ln\frac{k_1\gamma d}{2} - 1.5 + j\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left\{\ln\frac{\pi d}{q} - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-B^2}} - \frac{1}{i}\right) + j\frac{1}{2B}\right\}\right\} \tag{60}$$

Ⅲ. 導波管系 表面의 電磁界分布

1. 導波管내의 電磁界

1) Primary Wave

각 slot에서의 primary wave의 磁界를 안다면 導波管系表面의 電界도 알 수 있다. 여기서 primary wave 란 source로부터의 直接波를 의미하며 그 磁界는 (1)식과 境界條件式(2)에 따른다.

導波管系내의 primary wave의 磁界는 Green函數에 비례하므로 (34)식을 (9)식에 대입하면

$$H_{yp2}(x,z) = -\frac{\omega\varepsilon_2 K}{4}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{H_0^{(2)}\left[k_2\sqrt{(x-2iq-x_0)^2+(z-z_0)^2}\right] + H_0^{(2)}\left[k_2\sqrt{(x-2iq+x_0)^2+(z-z_0)^2}\right]\right\} \tag{61}$$

부록M 1의 公式(1-14)를 사용하면

$$H_{yp2}(x,z) = -\frac{\omega\varepsilon_2 K}{4}\left\{2\frac{e^{-jk_2|z-z_0|}}{k_2 q} + j\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{|z-z_0|}{q}\pi\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}\left[\cos\left(\frac{x-x_0}{q}\pi i\right) + \cos\left(\frac{x+x_0}{q}\pi i\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{\omega\varepsilon_2 K}{\pi}\left\{\frac{e^{-jk_2|z-z_0|}}{2k_2 q/\pi} + j\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{x\pi i}{q}\cos\frac{x_0\pi i}{q}\frac{e^{-\frac{|z-z_0|}{q}\pi\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}}\right\} \tag{62}$$

여기서 $A = \frac{|z-z_0|}{q}\pi, \quad B = \frac{k_2 q}{\pi}$ (63)

이라 놓면 (61)식은

$$H_{yp2}(x,z) = j\frac{\omega\varepsilon_2 K}{4}\left\{j\frac{e^{-jAB}}{2B} - \sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{x\pi i}{q}\cos\frac{x_0\pi i}{q}\frac{e^{-A\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}}\right\} \tag{64}$$

2) Source가 下部導體板面에 있을때

이때는 $x_0 = -q$ 이므로 (64)식은

$$H_{yp2}(x,z) = j\frac{\omega\varepsilon_2 K}{\pi}\left\{j\frac{e^{-jAB}}{2B} - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{e^{-A\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}}\cos\frac{x\pi i}{q}\right\} \tag{65}$$

公式[8] $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{z^i}{i} = -\ln(1+z), \quad |z|<1$ (66)

에 있어서 $z = e^{-A} < 1$ 라 놓면

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{e^{-Ai}}{i} = -\ln(1+e^{-A}) \tag{67}$$

(65)식에서 (67)식을 加減하면

$$H_{yp2}(x,z) = j\frac{\omega\varepsilon_2 K}{\pi}\left\{\ln(1+e^{-A}) - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{e^{-A\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}}\cos\frac{x\pi i}{q} - \frac{e^{-Ai}}{i}\right) + j\frac{e^{-jAB}}{2B}\right\} \tag{68}$$

(68)식은 (64)식보다 收斂速度가 빠르다.

3) Source가 上部導體板面에 있을때

이 때는 $x_0 = 0$ 이므로 (64)식은

$$H_{yp2}(x,z) = j\frac{\omega\varepsilon_2 K}{\pi}\left[j\frac{e^{-jAB}}{2B} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-A\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}}\cos\frac{x\pi i}{q}\right] \tag{69}$$

(44)식과 유사한 級數를 加減해주면 (69)식은 다음과 같은 收斂速度가 빠른 식으로 변환할 수 있다.

$$H_{yP2}(x,y) = j\frac{\omega\varepsilon_2 K}{\pi}\left[\ln(1-e^{-A}) - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-A\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}}\cos\frac{x\pi i}{q} - \frac{e^{-Ai}}{i}\right) + j\frac{e^{-jAB}}{2B}\right],\quad A\neq 0 \tag{70}$$

2. 導波管輻射系面上에서의 primary wave의 磁界分布

m번째 slot에서의 平均磁界는 (22)식으로 정의되어 있다. 여기에 (15)식을 대입하면

$$H_m = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} H(0, \overline{m-1}\,l+z)\,dz = j\frac{1}{\omega d}\int_{-d/2}^{d/2} H_{yP2}(0, \overline{m-1}\,l+z)\,dz \tag{71}$$

H_{yP2}가 slot區間$(-d/2, d/2)$ 내에 特異點을 갖지않을 경우에는 H_m의 表現式은 더욱 간단히

$$H_m = j\frac{1}{\omega} H_{yP2}(0, \overline{m-1}\,l) \tag{72}$$

source가 下部導體板面에 있을 경우에는 H_{yP2}는 (68)식으로 주어지므로

$$H_m = -\frac{\varepsilon_2 K}{\pi}\left[\ln(1+e^{-A_m}) - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{e^{-A_m\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}} - \frac{e^{-A_m i}}{i}\right) + j\frac{e^{-jA_m B}}{2B}\right] \tag{73}$$

여기서 $A_m = A(z=\overline{m-1}\,\ell) = \frac{|\overline{m-1} - z_0|}{q}\pi$ (74)

source가 上部導體板面에 있을 경우에는 H_{yP2}는 (70)식으로 주어지므로

$$H_m = -\frac{\varepsilon_2 K}{\pi}\left[\ln(1-e^{-A_m}) - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-A_m\sqrt{i^2-B^2}}}{\sqrt{i^2-B^2}} - \frac{e^{-A_m i}}{i}\right) + j\frac{e^{-jA_m B}}{2B}\right],\quad A_m\neq 0 \tag{75}$$

$A_m = 0$일 때는 점 $\overline{m-1}\,\ell = z_0$에 있는 特異點 때문에 (75)식은 H_m의 정확한 값을 나타낼 수 없다. 이 난점을 극복하기 위해서는 원래의 式인 (61)과 (71)으로 되돌아가야 한다.

이 경우에는 $x_0 = 0$, $z_0 = \overline{m-1}\,\ell$ 이므로 (61)식은

$$H_{yP2}(x,z) = -\frac{\omega\varepsilon_2 K}{2}\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}\left[k_2\sqrt{(x-2iq)^2+(z-\overline{m-1}\,\ell)^2}\right] \tag{76}$$

(71)식은

$$H_m = \frac{\varepsilon_2 K}{2jd}\left[\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_2|z|]\,dz + 2\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}\left[k_2\sqrt{(2iq)^2+z^2}\right]dz\right] \tag{77}$$

slot폭이 좁을때는 제 2 積分의 被積分函數는 slot aperture 내에서 거의 일정하므로

$$H_m = -j\frac{\varepsilon_2 K}{2d}\left[\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_2|z|]\,dz + 2d\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk_2]\right] \tag{78}$$

제 1 항의 積分은 $k_2 d \ll 1$란 조건하에 부록M3에서 행했으며 그 결과식 (M3-8)은

$$\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k_2|z|]\,dz = 1 + \frac{2}{\pi}\left(1-\ln\frac{k_2\gamma d}{4}\right) \tag{79}$$

한편 제 2 항의 級數는 이미 (57)식에서 收斂速度가 빠른 級數로 변화했다.

(79), (57)식을 (78)식에 대입하면

$$H_m = -j\frac{\varepsilon_2 K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + j\left(1-\ln\frac{k_2\gamma d}{4}\right) + \frac{\pi}{2k_2 q} - 0.5\pi\cdot j\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{k_2 q}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + \ln\frac{k_2\gamma q}{2\pi}\right\}\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon_2 K}{\pi}\left[\ln\frac{\pi d}{2q} - 1 - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(k_2\frac{q}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + j\frac{\pi}{2k_2 q}\right],\quad A_m = 0 \tag{80}$$

또는 $H_m = -\frac{\varepsilon_2 K}{\pi}\left[\ln\frac{\pi d}{2q} - 1 - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i_2-B^2}} - \frac{1}{i}\right) + j\frac{1}{2B}\right],\quad A_m = 0$ (81)

3. 導波管輻射系面上에서의 電界分布

Primary wave의 磁界와 Green函數의 값을 알았으므로 電界分布는 聯立積分方程式(16)을 풀면 구할 수 있다. 이는 行列表現에 있어서 (29)식을 slot에 걸리는 電壓行列[V]에 대해서 푸는것과 같다. 따라서 Green函數行列의 逆行列$[G]^{-1}$을 도입하면

$$[V]=[G]^{-1}[H] \tag{82}$$

한편 電界와 n번째 slot에서의 電壓간에는 (23)식의 관계가 성립되므로

$$[E]=\left[\frac{V}{d}\right] \tag{83}$$

高階複素行列의 逆行列을 구하기란 階位가 높아짐에 따라 電子計算機로서도 어려운 문제로 남아 있다. 이 문제는 뒤에서 다루기로 한다.

IV. 輻射特性

1. 輻射界와 輻射特性

導波管輻射系面上의 電界分布를 알았으므로 이 輻射系밖의 領域 I 내 임의점에서의 輻射界는 (11)식으로부터 구할 수 있다. 즉

$$H(x,z)=-j\omega\varepsilon_1\sum_{m=1}^{M}\int_{m번째\ slot面上}G^{(1)}(x,z/0,z')E_z(0,z')dz' \tag{84}$$

座標系의 原點을 그림 2 에서와 같이 1 번째 slot의 中心과 일치시켰을 때 (33)식은

$$G^{(1)}(x,z/0,z')=\frac{j}{2}H_0^{(2)}\left[k_1\sqrt{x^2+(z-z')^2}\right]=\frac{j}{2}H_0^{(2)}\left[k_1\sqrt{r^2-2z'r\cos\theta+z'^2}\right] \tag{85}$$

여기서 $r=\sqrt{x^2+z^2},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{x}{z}$ (86)

輻射界를 구하기 위하여 Born의 一次近似法[9]을 사용키로 한다. 遠距離點에서는

$$\sqrt{r^2-2z'r\cos\theta+z'^2}\fallingdotseq r-z'\cos\theta \tag{87}$$

이므로 Hankel函數에 대해서는 漸近公式[10]을 사용할 수 있다. 따라서 (85)식은

$$G^{(1)}(x,z/0,z')\fallingdotseq\frac{j}{2}H_0^{(2)}[k_1(r-z'\cos\theta)]\sim\frac{j}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi k_1(r-z'\cos\theta)}}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-jk_1(r-z'\cos\theta)}$$

$$\fallingdotseq\frac{e^{j\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2\pi k_1 r}}e^{-jk_1 r}e^{jk_1 z'\cos\theta} \tag{88}$$

slot폭이 좁을 때는 slot폭내에서 電界는 거의 일정하므로 (88)식을 (84)식에 대입하면

$$H(r,\theta)=-j\omega\varepsilon_1\frac{e^{j\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2\pi k_1 r}}e^{-jk_1 r}\sum_{m=1}^{M}\int_{m번째\ slot面上}e^{jk_1 z'\cos\theta}dz' \tag{89}$$

m번째 slot面上에서의 이 積分을 쉽게 하기위하여 變數z'를 새變數 $\overline{m-1}\,\ell+z'$로 변환하되 電界를 slot에 걸리는 電壓으로 표시하면 (89)식은

$$H(r,\theta)=\frac{\omega\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi k_1 r}}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-jk_1 r}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{V_m}{d}\right)e^{jk_1\overline{m-1}\,\ell\cos\theta}\int_{-d/2}^{d/2}e^{jk_1 z'\cos\theta}dz' \tag{90}$$

$\int_{-d/2}^{d/2}e^{jk_1 z'\cos\theta}dz'=\frac{2}{k_1\cos\theta}\sin\left(\frac{k_1 d}{2}\cos\theta\right)$ 이므로

$$H(r,\theta)=\frac{\omega\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi k_1 r}}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-jk_1 r}\frac{\sin\left(\frac{k_1 d}{2}\cos\theta\right)}{\frac{k_1 d}{2}\cos\theta}\sum_{m=1}^{M}V_m e^{jk_1\overline{m-1}\,\ell\cos\theta} \tag{91}$$

輻射電力pattern은 아래의 利得函數 $G(\theta)$를 方位角θ에 대해서 圖表示하여 얻을 수 있다.

$$G(\theta)=20\log_{10}\frac{H(r,\theta)}{\max[H(r,\theta)]}\Bigg|_{r=\mathrm{const.}} \tag{92}$$

2. 輻射 conductance와 系入力 conductance

1) 系入力conductance

source로부터 유출되는 全實效電力은 Poynting vector를 source 주위의 曲面S에 대해서 面積分한것의 實數

部로 얻어진다. S를 2部分으로 분할하되 모든 slot aperture로 구성된 面을 S_r, 導波管의 斷面을 S_w라하면 S_r은 輻射에너지를, S_w는 導波管에 따라 傳送되는 에너지를 통과시킨다. 따라서 y방향에 대한 單位幅當의 全實效電力 W는

$$W=\frac{1}{2}\mathrm{Real}\int_s|\dot{E}||\dot{H}^*|ds=\frac{1}{2}\mathrm{Real}\left[Z_r\int_{sr}|\vec{H}||\vec{H}^*|dz+Z_w\int_{sw}|\vec{H}||\vec{H}^*|dx\right]=W_r+W_w \tag{93}$$

여기서
$$\left.\begin{aligned} W_r&=\frac{Z_r}{2}\mathrm{Real}\int_{sr}|\dot{H}||\dot{H}^*|dz=\frac{Z_r}{2}\int|\vec{H}|^2dz\\ W_w&=\frac{Z_w}{2}\mathrm{Real}\int_{sw}|\dot{H}||\dot{H}^*|dx=\frac{Z_w}{2}\int_{sw}|\vec{H}|^2dx\\ &Z_r,\ Z_w=\text{적당히 정의된 wave impedance}\end{aligned}\right| \tag{100}$$

그리고, S, S_r 및 S_w는 각각 單位幅에 대해서 생각하였음.

세기K인 磁氣的 line source가 그림 4에서와 같이 導波管管壁上의 aperture에 의해서 발생한 경우를 생각해 보자.

feeder aperture폭이 좁을때는

$$E_z=\frac{V}{b} \tag{101}$$

여기서 V는 aperture에 걸리는 電壓, b는 aperture폭을 표시한다.

equivalent principle[11]에 의하면 導波管내에서 같은 크기의 電界를 발생하는 等價磁氣流表面密度 $\vec{M}_s$는

$$\dot{M}_s=\dot{E}\times\vec{n}$$

導波管壁에 의한 影像效果를 고려하면서 feeder aperture上의 磁氣流表面密度를 생각해 보면 이는 y방향에 있으며 크기는

$$M_y=2\frac{V}{b} \tag{102}$$

이 磁氣流를 세기가 $dk=M_ydz$인 磁氣流 filament의 連續分布로 간주한다면 y방향의 單位幅當 source의 moment는

$$kb=\int_{\text{aperture面上}}z\,dk=\int_0^b z\,M_ydz=\int_0^b z\left(\frac{2V}{b}\right)dz=Vb$$

$$\therefore\ K=V \tag{103}$$

그러므로 feeding point에서 본 單位幅當의 系入力conductance는

$$G=\frac{2W}{V^2}=\frac{2W}{K_2}=G_r+G_w \tag{104}$$

여기서
$$G_r=\frac{2W_r}{K^2}=\frac{Z_r}{K^2}\int_{\text{slot面上}}|\dot{H}|^2dz=\text{輻射 conductance} \tag{105}$$

$$G_w=\frac{2W_w}{K^2}=\frac{Z_w}{K^2}\int_{-q}^{0}|\dot{H}|^2dx=\text{導波管特性conductance} \tag{106}$$

2) 輻射conductance

自由空間내에서는 Z_r은 intrinsic impedance η_0와 같으므로

$$Z_r=\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \tag{105}$$

輻射界는 (91)식에 표시되어있다. 導波管輻射系의 表面上에서 $\theta=0$이므로 m번째 slot에서의 磁界는

$$H_m(r,\theta)\,|_{\theta=0}=H(\overline{m-1}\,\ell+z',\ 0)=\frac{\omega\varepsilon_1 e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-jk_1\overline{m-1}\,\ell}}{\sqrt{2\pi k_1(\overline{m-1}\,\ell+z')}}\frac{\sin\left(\frac{k_1d}{2}\right)}{\frac{k_1d}{2}}\sum_{m=1}^{M}V_me^{jk_1(\overline{m-1}\,\ell+z')} \tag{106}$$

따라서 單位幅當의 輻射conductance는

$$G_r=\frac{\eta_0}{K^2}\sum_{m=1}^{M}\int_{-d/2}^{d/2}|H_m|^2dz'$$

$$=\frac{\eta_0}{K^2}\frac{\omega^2\varepsilon_1^2}{2\pi k_1}\left[\frac{\sin\left(\frac{k_1d}{2}\right)}{\frac{k_1d}{2}}\right]^2\sum_{m=1}^{M}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{dz'}{\overline{m-1}\,\ell+z'}\,\mathrm{Real}\left[\sum_{m=1}^{M}V_m e^{jk_1\overline{m-1}\,\ell}\sum_{m=1}^{M}V_n^{*}e^{-jk_1\overline{n-1}\,\ell}\right]$$

$$=\frac{\eta_0}{K^2}\frac{\omega^2\varepsilon_1^2}{2\pi k_1}\left[\frac{\sin\left(\frac{k_1d}{2}\right)}{\frac{k_1d}{2}}\right]^2\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}|V_m|\cdot|V_n|\sum_{m=1}^{M}\ln\left(\frac{\overline{m-1}\,\ell+\frac{d}{2}}{\overline{m-1}\,\ell-\frac{d}{2}}\right) \tag{107}$$

또는

$$G_r=\frac{\varepsilon_1 f}{K^2}\left[\frac{\sin\left(\frac{k_1d}{2}\right)}{\frac{k_1d}{2}}\right]^2\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}|V_m|\cdot|V_n|\sum_{m=1}^{M}\ln\left(\frac{\overline{m-1}\,\ell+\frac{d}{2}}{\overline{m-1}\,\ell-\frac{d}{2}}\right) \tag{108}$$

3) 導波管特性conductance

導波管내에서 source로부터 충분히 떨어져 있는 점에서는 TM_n mode에 대한 wave impedance Z_w는 特性 impedance와 같으므로[13]

$$Z_w=\begin{cases}\eta_2\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f_c<f \quad (109)\\ j\eta_2\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f_c>f \quad (110)\end{cases}$$

여기서

$$f_c=\frac{n}{2q\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}}=\frac{nc}{2q\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}=\text{遮斷周波數} \tag{111}$$

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}=\frac{1}{c\varepsilon_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}=\text{領域 II 의 intrinsic impedance} \tag{112}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\cdots=\text{mode index} \tag{113}$$

일반적으로 單連結領域내에서는 TEM mode는 존재할 수 없으므로[14] 最低位의 TM mode는 TM_1이다. 그러나 우리의 2次元平行板導波管에서는 最低位 mode로서 TM_0 mode 즉 TEM mode가 존재할 수 있다.[15] (111) 및 (109)식에서 n=0라 놓면 遮斷周波數는 0이 되고 特性wave impedance는 媒體의 intrinsic impedance 와 같아짐을 알 수 있다.

導波管내의 磁界는 (68), (70)식에서 구하였으므로 單位幅當의 導波管特性conductance는 (106)식의 積分을 적당히 한 x의 위치에서 수행하면 된다. 즉

$$G_w=\frac{Z_w}{K^2}\int_{-q}^{0}|H_{yp2}|^2dx \tag{114}$$

또는

$$G_w=\frac{Z_w}{K^2}\frac{\omega^2\varepsilon_2^2K^2}{\pi^2}\int_{-q}^{0}|H|^2dx=\frac{4f^2\varepsilon_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{C}\int_{-q}^{0}|H|^2dx \tag{115}$$

여기서 H는 (68) 또는 (70)식의 괄호내의 量을 표시한다.

V. 電子計算機에 의한 數値計算

1. 電子計算機에 의한 數値計算

1) 개설

이론적으로 연구한 모든 필요한 量을 충분한 精度로 능률적으로 평가하고 圖表示할 수 있는 計算機program을 을 개발하였으며 곧 발표할 예정이다. 한개의 main program과 13개의 subprogram으로 구성되는 이 program들로부터 얻을 수 있는 것 중에는 다음量들이 있다.

基本Green函數들

Green函數行列과 그 逆行列

導波管輻射系表面上의 primary wave의 磁界 및 電界分布

輻射界의 세기 및 輻射pattern

TM_1 mode에 대한 導波管遮斷周波數 및 TEM mode에 대한 特性 conductance

輻射conductance 및 系入力 conductance

2) Hankel函數의 計算

Green函數行列의 非對角線要素들의 表現式에는 Hankel函數가 포함되어 있다. Bessel函數의 級數에 의한 定義式을 토대로 한 program은 引數가 크면 computer overflow를 일으킨다. Bessel函數에 관한 이용할 수 있는 대부분의 subroutine은 引數의 범위와 필요한 記憶容量에서 응용상에 제약을 받는다.

우리 문제의 Hankel函數의 引數는 source point와 observation point간의 거리에 比例하므로 그 범위는 극히 작은 값에서 극히 큰 값에 일으키기 때문에 기존 subroutine들의 적용범위를 벗어난다. 뿐만아니라 Hankel函數를 구하는 것은 전체 計算program의 극히 일부분에 불과하므로 이를 위해서 필요한 많은 memory unit를 할애할 수는 없다.

이 문제에 대한 해결법으로서는 polynomial approximation을 이용키로 하였다. 다음의 近似多項式들의 誤差는 10^{-7} 이하이다.[16]

$x \leq 3$ 에서는

$$J_0(x) = 1 - 2.2499997P + 1.2656208P^2 - 0.3163866P^3 + 0.044479P^4 - 0.0039444P^5 + 0.0002100P^6$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{2}{2}\right)J_0(x) + 0.36746691 + 0.60559366P - 0.74350384P^2 + 0.25300117P^3 - 0.04261214P^4 + 0.00427916P^5 - 0.00024846P^6$$

여기서 $P = \frac{x}{3}$

$3 \leq x \leq \infty$ 에서는

$$J_0(x) = \frac{f_0}{\sqrt{x}}\cos\theta_0$$

$$Y_0(x) = \frac{f_0}{\sqrt{x}}\sin\theta_0$$

여기서 $f_0 = 0.79788456 - 0.00000077Q - 0.00552740Q^2 - 0.00009512Q^3 + 0.00137237Q^4 - 0.00072805Q^5 + 0.00014476Q^6$

θ_0　　$Q = x - 0.78539816 - 0.04166397Q - 0.00003954Q^2 + 0.00262573Q^3 - 0.00054125Q^4 - 0.00029333Q^5 + 0.00013558Q^6$

$$Q = \frac{3}{x}$$

3) Green函數行列의 逆行列

실제문제에서 볼 수 있는 Green函數行列은 位階가 매우 높고 複素要素들로 구성되어 있으므로 逆行列을 구하는 데는 너무나 많은 arithmatic operation 과정에서 round off error가 축적되므로 逆行列에는 많은 誤差가 있기마련이다. 한편 對稱性이 존재할 경우에는 逆行列을 구하는 과정에서는 그 성질이 보존되도록 하는 것이 중요하다.

行列分割原理에 입각한 Wan의 program[17]을 수정보완한 우리의 program은 위조건들을 보다 만족하는 유일한 subprogram으로 생각된다.

n位의 行列 $|a|_n$에 있어서 左上部의 要素들로 구성된 i位의 小行列을 A_{11}이라 하자. 行列A_{11}에 原行列$|a|_n$의 $(i+1)$번째의 行과 列의 要素들을 追加하여 만든 augmented matrix$|a|_{i+1}$은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$|a|_{i+1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

여기서 A_{11}은 (i, i)位의 小行列 즉

$$A_{11}=[a]_{i-1}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\cdots\cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\cdots\cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots\cdots\cdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2}\cdots\cdots & a_{i,i} \end{vmatrix}$$

A_{12}는 column matrix 즉

$$A_{12}=\begin{vmatrix} a_{1,i+1} \\ a_{2,i+1} \\ \vdots \\ a_{i,i+1} \end{vmatrix}$$

A_{21}은 row matrix 즉

$A_{21}=[a_{i+1,1}\ a_{i+1,2}\cdots a_{i+1,i}]$

A_{22}는 단순한 數 즉

$A_{22}=[a_{i+1,i+1}]$.

지금 A_{11}의 逆行列을 알고 있다고 가정하여 이를 A_{11}^{-1}라 하자. 여기서 위 行列 $[a]_{i+1}$을 2位의 行列로 간주하면 그 逆行列은 Gauss-Jordan의 消去法[18] 으로 쉽게 구할 수 있다. 특히 $i=1$일때는 小行列 $[a]_1$의 逆行列을 구하는 것은 너무나 自明한 일이다. 이상에서 설명한 계산과정을 $i=1$에서 $i=n$까지 계속 밟음으로서 결국 逆行列을 완전히 구할 수 있다.

2. 理論結果에 대한 검토

그림 4와 같은 實驗裝置의 輻射pattern을 그림 3에 表示하였으며 Sigelmann과 Ishimaru[1]의 實驗値는 實線으로, 本論文의 理論式結果는 點線으로 比較表示하였다. (그림에는 參考로 slot數가 無限일 때의 Sigelmann 等의 計算結果도 破線으로 倂記하였음)

理論과 實驗結果는 전반적으로 일치하나 부분적인 약간의 차이는 다음 원인들에 기착한다고 생각된다.

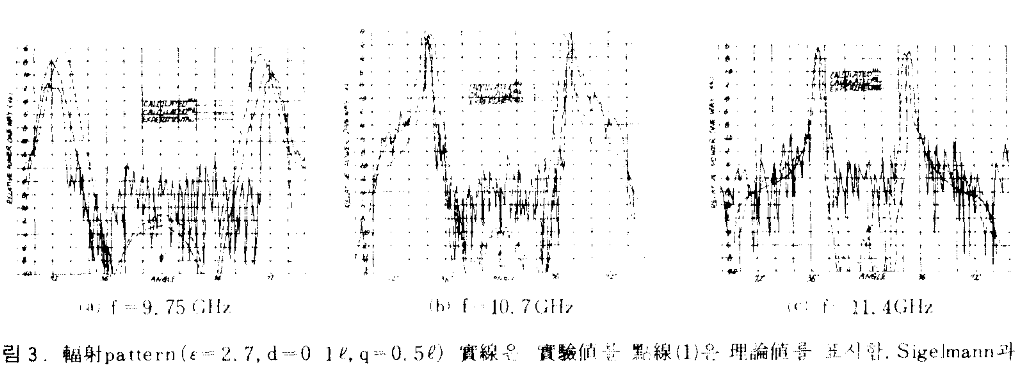
1) 참고문헌[1] 에서 지적한대로 Sigelmann等의 실험장치의 각부분의 치수가 그림 4에 주어진 값과 차이가 났을지도 모르며 ploystyrene slab의 比誘電率도 實測하지 않고 表에 나와있는 2.7이란 값을 사용하였다는 점.

2) 이 장치는 그 양단을 特性 impedance로 終端시키지 않았으므로 反射波에 의한 交亂이 일어났을 수도 있다.

이 輻射系의 전반적 특성중 주목되는 점을 요약해보면

1) end plate가 없을때는 双峯特性을 나타내는 것이 보통이며 周波數가 증가함에 따라 双峯간의 角距離는 감소한다.

2) 어떤 最小値以上의 범위에서는 slot의 數는 最大輻射方向에 큰 영향을 주지 못한다. 이로부터 最大輻射方向은 주로 source에 가까운 slot들에 의해서 좌우됨을 알 수 있다.



(a) f=9.75GHz　(b) f=10.7GHz　(c) f=11.4GHz

그림 3. 輻射pattern ($\varepsilon=2.7$, $d=0.1\ell$, $q=0.5\ell$) 實線은 實驗値를 點線(1)은 理論値를 표시함. Sigelmann과 Iskimaru의 計算結果는 破線(2)으로 표시하였음 Ishimaru

Fig. 3. Radiation pattern ($\varepsilon=2.7$, $d=0.1\ell$, $q=0.5\ell$) Solid line shows experimental result and dotted line(1) fheoretical pattern. Amother one calculated by Sigelmann and Ishimaru is also shown by broken line(2).

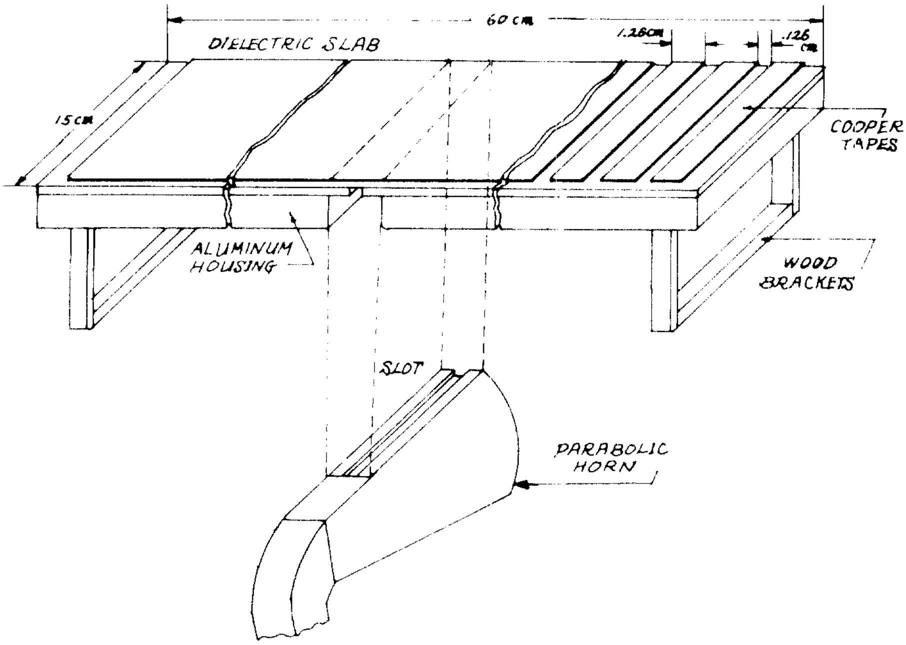


그림 4. 實驗裝置
Fig. 4. Experimental setup.

3) 下部導體板面에서 feed하면 双峯간의 minor lobe들의 크기가 증가하는 경향이 있다.

4) end plate가 있는 경우에는 反射波가 발생하여 管내의 合成界의 세기는 증가하는 경향이 있으나 管밖의 輻射pattern은 대단히 복잡하여 예측을 불허한다.

Ⅵ. 結　　論

多數의 slot가 等間隔으로 배치되어 있는 周期的裝置에 line source를 가했을 때의 輻射電磁界를 解析하였다. Slot가 無限히 많은 경우에 대해서는 Sigelmann과 Ishimaru가 sampling technique를 도입하므로써 解析하는데 성공하였는바 本論文에서는 그들의 방법을 擴張하여 더욱 일반적인 경우 즉 任意數의 slot가 있는 경우에 적용하였으며 이 경우의 電磁界 및 輻射特性等을 誘導하고 必要한 computer program을 개발하였다. 輻射 pattern의 理論値는 實驗結果와 전반적으로 부합됨을 확인하였다.

附　　録 M-1

級數 $S = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}\left[k\sqrt{(x-2iq+x')^2+(z+z')^2}\right]$　　(M1-1)

는 더욱 편리한 형으로 변형할 수 있다. Poisson summation 公式[9]은

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\alpha i) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\sum_{p=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2p\pi}{\alpha}\right) \tag{M1-2}$$

여기서 $F(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jgx}dx$

이를 이용하여 級數(M1-1)을 새變數p領域의 級數로 변환하면

$$S=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k\sqrt{(x-2iq+x')^2+(z+z')^2}]e^{j2p\pi i}di \tag{M1-3}$$

여기서 $z+z'=q$, $x-2iq+x'=-y$ 라 놓으면 (M1-4)

$$S=\frac{1}{2q}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{x+x'}{q}p\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k\sqrt{y^2+p^2}]e^{j\frac{p\pi}{q}y}dy \tag{M1-5}$$

한편[7]

$$H_0^{(2)}(z)=\frac{2j}{\pi}K_0(jz) \tag{M1-6}$$

이므로 圓壔函數의 Fourier 變換公式[20]

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_0[\sigma\sqrt{(2\pi f)^2+\rho^2}]e^{j2\pi fg}df=\frac{e^{-|\rho|\sqrt{g^2-\sigma^2}}}{2\sqrt{g^2-\sigma^2}} \tag{M1-7}$$

을 Hankel函數로 고쳐쓰면

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[\sigma\sqrt{(2\pi f)^2+\rho^2}]e^{j2\pi fg}df=\frac{je^{-|\rho|\sqrt{g^2-\sigma^2}}}{\sqrt{g^2-\sigma^2}} \tag{M1-8}$$

여기서 $2\pi f=y$, $\sigma=k$, $g=\frac{p\pi}{q}$ 라 놓으면 (M1-9)

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k\sqrt{y^2+\rho^2}]e^{j\frac{p\pi}{2}y}dy=2j\frac{e^{-|\rho|\sqrt{\left(\frac{p\pi}{q}\right)^2-k^2}}}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{q}\right)^2-k^2}} \tag{M1-10}$$

식(M1-10)을 식(M1-5)에 대입하면

$$S=\frac{j}{q}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{x+x'}{q}p\pi}\frac{e^{-|\rho|\sqrt{\left(\frac{p\pi}{q}\right)^2-k^2}}}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{q}\right)^2-k^2}} \tag{M1-11}$$

ρ를 원래의 量$(z+z')$로 또 summation index p를 i로 고쳐쓰면

$$S=\frac{j}{q}\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{x+x'}{q}\pi i}\frac{e^{-|z+z'|\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2-k^2}}}{\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2-k^2}} \tag{M1-12}$$

또는

$$S=\frac{j}{q}\left\{\frac{e^{-jk|z+z'|}}{jk}+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{e^{j\frac{x+x'}{q}\pi i}+e^{-j\frac{x+x'}{q}\pi i}\right\}\frac{e^{-|z+z'|\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2-k^2}}}{\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2-k^2}}\right\}$$

$$=\frac{e^{-jk|z+z'|}}{kq}+j\frac{j}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x+x'}{q}\pi i\right)\frac{e^{-|z+z'|\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2-k^2}}}{\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2-k^2}} \tag{M1-13}$$

Cauchy의 判定法과 比較定理[21]에 의하여 級數(M1-13)의 收斂性을 곧 확인할 수 있다.
數値計算을 하기위해서는 이 결과를 아래와 같이 쓰는것이 편리하다.

$$S=\sum_{i=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}\left[k\sqrt{(x-2iq+x')^2+(z+z')^2}\right]$$

$$=\frac{e^{-jk|z+z'|}}{kq}+j\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x+x'}{q}\pi i\right)\frac{e^{-\frac{|z+z'|}{q}\sqrt{i^2-\left(\frac{kq}{\pi}\right)^2}}}{\sqrt{i^2-\left(\frac{kq}{\pi}\right)^2}} \qquad \text{(M1-14)}$$

附　　録 M-2

級數 $S=\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk]$ (M2-1)

를 생각하자. 일반적으로[22]

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_0(ix)\cos(ixt)=-\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{1}{\sqrt{x^2-(2\pi i+tx)^2}}+\frac{1}{x\sqrt{1-t^2}}+\sum_{i=1}^{n_2}\frac{1}{\sqrt{x^2-(2\pi i-tx)^2}} \qquad \text{(M2-2)}$$

및[23]

$$\sum_{i=1}^{\infty} Y_0(ix)\cos(ixt)=-\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)+\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{n_2}\frac{1}{i}\right\}$$

$$-\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi i+tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi i}\right\}-\sum_{i=n_2+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi i-tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi i}\right\} \qquad \text{(M2-3)}$$

여기서 $x>0$, $0\leq t<1$이며 (n_1+1) 및 (n_2+1)은 각각 조건

$$2\pi n_1<x(1-t)<2(n_1+1)\pi$$
$$2\pi n_2<x(1+t)<2(n_2+1)\pi \qquad \text{(M2-4)}$$

를 만족하는 자연수이며 $C=\ln\gamma=$ Euler 定數이다.

식(M2-4)에서 $t=0$라 놓면

$$2\pi n_1<x<2(n_1+1)\pi$$
$$2\pi n_2<x<2(n_2+1)\pi$$

여기서 $n_1=n_2=n$일 때를 생각하면

$$n<\frac{x}{2\pi}<n+1 \qquad \text{(M2-5)}$$

따라서

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_0(ix)=-\frac{1}{2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x^2-(2\pi i)^2}}+\frac{1}{x}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Y_0(ix)=-\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}-2\sum_{i=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi i)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi i}\right\} \qquad \text{(M2-7)}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}(ix)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{J_0(ix)-jY_0(ix)\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x^2-(2\pi i)^2}}+j\left\{\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}+2\sum_{i=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi i)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi i}\right\}\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+j\left\{\frac{1}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{4\pi}+2\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi i)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi i}\right\}\right\} \qquad \text{(M2-8)}$$

여기서 $x=2qk$라 놓면

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk]=\frac{1}{2kq}-0.5+j\left\{\frac{1}{\pi}\ln\frac{\gamma kq}{4\pi}+2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi i)^2-(2kx)^2}}-\frac{1}{2\pi i}\right)\right\} \qquad \text{(M2-9)}$$

數値計算을 하기위해서는 이 결과를 아래와 같이 쓰는것이 편리하다.

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} H_0^{(2)}[2iqk]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2kq} - 0.5\pi + j\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{i^2-\left(\frac{kq}{\pi}\right)^2}} - \frac{1}{i}\right) + \ln\frac{\gamma k q}{2\pi}\right\}\right] \qquad (M2-10)$$

附 録 M-3

積分 $I = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(2)}[k|z|]dz, \quad kd \ll 1$ (M3-1)

를 생각한다. 引數의 크기가 작을때는 Hankel函數의 級數展開式의 최초의 2項을 被積分函數의 近似式으로 사용할 수 있다. 즉

$$H_0^{(2)}[k|z|] \doteqdot 1 - j\frac{2}{\pi}\left\{\ln\frac{k|z|}{2} + C\right\} \qquad (M3-2)$$

여기서 $C = \text{Euler定數} = 0.5777215665$ (M3-3)

으로서 $\gamma = e^C = 1.781072$ (M3-4)

란 定數를 도입하면

$$I = \frac{1}{d}\left[d - j\frac{2}{\pi}\int_{-d/2}^{d/2}\ln\frac{k\gamma|z|}{2}dz\right] = 1 - j\frac{4}{\pi d}\int_0^{d/2}\ln\frac{k\gamma|z|}{2}dz \qquad (M3-5)$$

변수변환 $\frac{k\gamma z}{2} = x$

를 하면 右邊의 積分은 표준형

$$\frac{2}{k\gamma}\int_0^{\frac{k\gamma d}{4}}\ln x\,dx = \frac{2}{k\gamma}\{x\ln x - x\}_0^{\frac{k\gamma d}{4}} = \frac{d}{2}\left(\ln\frac{k\gamma d}{4} - 1\right) \qquad (M3-7)$$

이 되므로

$$I = 1 + j\frac{2}{\pi}\left(1 - \ln\frac{k\gamma d}{4}\right) \qquad (M3-8)$$

參 考 文 献

[1] Sigelmann R.A., *A Class of Periodic Structures Excited by Aperiodic Sources,* Ph.D. dissertation, Univ. of Washington, Seattle, Wash., 1963.
Sigelmann, R.A. and A. Ishimaru, A Class of Periodic Structures Excited by Aperiodic Sources, *AFCRL-63-351, Tech. Rept.* no. 77, Univ. of Washington, Seattle, Wash., 1963.

[2] Sigelmann, R.A., and A. Ishimaru, Radiation from Periodic Structures Excited by an Aperiodic Source, *IEEE Trans. Antenna and Propagation,* vol. AP-13, pp. 354-364, May 1965.
Sigelman, R.A., The Field along the Surface of a Grounded Dielectric Slab Covered by a Periodically Slotted Conducting Plane, *AFCRL-66-104, Tech. Rept.* no. 102, Univ. of Washington, Seattle, Wash., 1966.
Sigelmann, R.A., Surface Waves on a Grounded Dielectric Slab Covered by a Periodically Slotted Conducting Plane, *IEEE Trans. Antenna and Propagation,* vol. AP-15, pp. 672-676, Sept. 1967.

[3] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* vol I, Interscience Publications, pp.354, 1953.

[4] Morse, P.M., and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics,* vol. 1, McGraw-Hill

Book Co., New York, pp. 813, 1953.

[5] Gradshteyn, I.S. and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products (Translated from the Russin by A. Jeffrey)*, Academic Press, New York, 1965, pp. 44.

[6] Schelkunoff, S.A., *Electromagnetic Waves,* D. Van Nostrand Co., Inc., New York, pp. 55, 1943.

[7] Campbell, G.A. and R.M. Foster, *Fourier Integrals for Practical Applications,* D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 2nd ed., pp. 32, 1984.

[8] Mangulis, V., *Handbook of Series for Scientists and Engineers,* Academic Press, New York, pp. 73, 1965.

[9] Born, M. and E. Wolf, *Principles of Optics,* Pergamon Press, Oxford, 2nd ed., pp. 453, 1964.

[10] Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions,* Cambridge Univ. Press, pp. 198, 1922.

[11] Harrington, R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields,* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, pp. 100, 1960.

[12] Harrington, R.F., ibid., pp. 110.

[13] Jordan, E.C. and K.G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 2nd ed., pp. 199, 1968.

[14] Jones, D.S., *The Theory of Electromagnetism,* A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., New York, pp. 244, 1964.

[15] Jordan, E.C. and K.G. Balmain, ibid., pp. 187.

[16] Abramowitz, M. and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions,* National Bureau of Standards, AMS. 55, pp. 369, 1964.

[17] Wang, P.C., *Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics,* John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 344, 1966.

[18] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis,* McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 400, 1965.

[19] Morse, P.M. nd H. Feshbach, ibid., pp. 125.

[20] Campbell, G.A. and R.M. Foster, ibid., pp. 125.

[21] Hardy, G.H., *A Course of Pure Mathematics,* Cambridge Univ. Press, 10th ed., pp. 344 & pp. 355, 1955.

[22] Magnus, W., F. Oberhettinger, and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics,* Springer-Verlag New York Inc., 3rd ed., pp. 131, 1966.

[23] Gradshteyn, I.S. and I.M. Ryzhik, ibid., pp. 977.