

浮遊體 運動解析을 위한 部分行列 利用方法

金 東 俊* · 尹 吉 秀**

An Application of the Matrix Partitioning for the Motion Analysis of Floating Bodies

Dong-Joon Kim · Gil-Su Yoon

〈 目 次 〉

1. 序 論	4·3 系統圖
2. 2次元 流體力	5. 結果 및 考察
3. 運動方程式	5·1 Maeda 方法 프로그램의 境遇
4. 複素數行列	5·2 Frank 方法 프로그램의 境遇
4·1 部分行列法	6. 結 論
4·2 Choleski 分解方法	參考文獻

Abstract

A matrix partitioning method is proposed for the 2-D motion analysis of floating bodies.

For the numerical solution, the boundary of a floating body is approximated with a series of line segments and the governing integral equation is transformed into a system of linear equations.

A new solution procedure of resulting linear equations with complex coefficients is formulated and programmed using a matrix partitioning scheme and the Choleski decomposition.

From the case study, it is found that the proposed method is efficient in the motion analysis of floating bodies, especially in the calculation of hydrodynamic coefficients. Also, it requires smaller memory size and less computing time compared with conventional methods.

* 정회원, 대한조선공사 설계실

** 부산수산대학 해양공학과

1. 序 論

海上에 떠있는 浮遊構造物의 運動性能을 구하기 위해서는 2次元 流體力 係數들을 먼저 구한 뒤에 그 係數들을 포함하는 6自由度 連成運動方程式을 풀어야 하는데 [1, 3, 5, 6], 이 두 과정은 모두 複素數를 포함한 一連의 線型方程式을 푸는 문제로 귀착된다.

현재 널리 사용되고 있는 浮遊體 運動解析을 위한 계산프로그램에서는 위의 두 과정 모두 Gauss 소거법이 사용되고 있으며 [2, 3], 특히 2次元 流體力 係數들을 구하는 과정에서 複素數 行列의 크기 때문에 많을수록 좋은 계산점의 수효가 제한받게 된다.

본 연구에서는 複素數를 포함한 線型聯立方程式의 새로운 해법을 제시하고 이를 浮遊體 運動解析 프로그램에 응용하는 방법을 모색하고자 한다.

2. 2次元 流體力

浮遊體 運動解析 과정중에서 가장 중요한 부분은 2次元 流體力을 계산하는 부분으로서, 이것은 속도포텐셜 개념으로부터 구해진다. 浮遊體의 길이 L 이 波長 λ 에 비해 무시할 수 없을 정도로 큰 경우 ($L/\lambda > 1/5$), 전체의 속도포텐셜 ϕ 는 入射波의 속도포텐셜 ϕ_i 와 교란된 回折波의 속도포텐셜 ϕ_s 의 합으로 구성된다.

$$\phi = \phi_i + \phi_s \dots\dots\dots(1)$$

이때 물체에 의해 교란된 回折波의 속도포텐셜은 Green 정리에 의해 물속에 잠긴 表面 S 상에 분포된 脈動소스들의 포텐셜로 표현된다.

$$\phi_s = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) ds \dots\dots\dots(2)$$

여기서 G 는 Green 함수를 나타내며, f 는 소스의 密度를 나타낸다.

(x, y, z) 는 포텐셜을 계산하려는 점의 위치를 나타내며, (ξ, η, ζ) 는 소스가 놓인 위치를 나타낸다.

식(2)에 잠수면 S 상의 유체입자의 법선속도성분이 零이라는 운동역학적인 경계조건을 적용하면, 다음의 적분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} -2\pi f(x, y, z) + \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) ds \\ + 4\pi \frac{\partial}{\partial n} \phi_i(x, y, z) = 0 \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

식(3)은 단위의 法線 벡터가 \vec{n} 인 S 상의 모든점 (x, y, z) 에서 소스밀도 f 를 가지는 것을 나타내고 있다.

경계조건이 특별한 경우를 제외하고는 식(3)의 解析的 解를 구하는 것은 불가능하므로 數值解를 구하는 것이 보통이다.

식(3)을 수치적으로 풀기 위해서 경계면 S' 를 근사한 다각형으로 표현하고, 그 다각형 상에서 식(3)을 적용하면 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial G_{jk}}{\partial n} f_k + 4\pi \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial n} = 0 \quad (j=1, 2, 3 \dots n) \dots \dots \dots (4)$$

여기서 첫 항의 k 는 다각형 점 전체에 대한 합을 나타내며, $\partial G_{jk}/\partial n$ 은 점 j 에 미치는 여타의 전체 점들의 Green 함수의 법선방향 변화율을 나타낸다.

f_k 는 구하려는 소스포텐셜의 밀도를 의미하며, $\partial \phi_{ij}/\partial n$ 은 j 점에서의 입사파 포텐셜의 법선방향 변화율을 나타낸다.

식(4)의 각 항에 대한 계산은 상당히 복잡하지만 일단 계산이 되었다고 하면, 결국 각 항의 형태는 복소수로 표시되므로,

$$\frac{\partial G_{jk}}{\partial n} = [C] + i[D] \dots \dots \dots (4a)$$

$$f_k = \vec{p} + i\vec{q} \dots \dots \dots (4b)$$

$$4\pi \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial n} = \vec{v} + i\vec{w} \dots \dots \dots (4c)$$

의 꼴로 쓸 수 있다.

따라서 식(4)는 다음과 같이 표현된다.

$$([C] + i[D])(\vec{p} + i\vec{q}) = \vec{v} + i\vec{w} \dots \dots \dots (5)$$

3. 運動方程式

浮遊構造物의 6자유도 운동성분들은 다음 6개의 미분방정식의 해 S_j 로 정의된다[1, 6].

$$\sum B_{ij} S_j = F_i \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \dots \dots \dots (6)$$

여기서 B_{ij} 는 線型微分演算子로서,

$$B_{ij} = (\Delta + a_{ij}) \frac{d^2}{dt^2} + b_{ij} \frac{d}{dt} + c_{ij} \dots \dots \dots (7)$$

$$\Delta = \text{diag} [m_1, m_2, \dots, m_6] \dots \dots \dots (8)$$

로 표시되는데, Δ 는 대각선행렬로서 m_i 는 물체의 질량 또는 관성모우멘트를 나타낸다.

a_{ij} , b_{ij} 와 c_{ij} 는 각각 j 방향의 운동에 기인한 i 방향의 附加質量, 減衰係數 및 스프링상수이다.

波形이 $\zeta(t) = \zeta_0 \sin \omega t$ 와 같은 調和函數로 표시될 때, 파의 강제력과 물체의 변위는 다음과 같이 표시된다.

$$F_i = F_{a_i} e^{i(\omega t + c_i)} = \vec{s} + i\vec{t} \dots\dots\dots (9)$$

$$S_j = S_{a_j} e^{i(\omega t + \epsilon_j)} = \vec{u} + i\vec{v} \dots\dots\dots (10)$$

微小振幅波 이론이 적용될 경우, 모든 힘들은 波高의 線型函數이므로 波에 기인한 운동 성능함수 S_i 는 RAO(反應振幅演算子) $Y_{ij} = S_{a_j} / \zeta_o$ 와 位相角 ϵ_j 에 의해서 정의된다.

식(7)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} B_{ij} &= (\Delta + a_{ij})(i\omega)^2 + b_{ij}(i\omega) + c_{ij} \\ &= c_{ij} - (\Delta + a_{ij})\omega^2 + ib_{ij}\omega \\ &= [E] + i[F] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

가 된다.

식(9), (10)과 (11)을 식(6)에 대입하면 운동방정식은 결국 다음의 복소수행렬의 연산문제라 귀착된다.

$$([E] + i[F])(\vec{s} + i\vec{t}) = \vec{u} + i\vec{v} \dots\dots\dots (12)$$

4. 複素數行列 方程式의 解法

앞에서 살펴본 바와 같이 浮遊體의 운동방정식을 수치해석하는 과정 중에서 複素數를 포함한 行列의 演算過程이 차지하는 비중은 상당히 크다고 할 수 있다.

주어진 일련의 線型방정식을 단순히 逆行列이나 Gauss 소거법을 사용함으로써 解를 구할 수도 있지만, 逆行列을 계산하기 위하여 필요한 기억공간은 계산하고자 하는 行列의 크기의 두배가 필요하며, Gauss 소거법은 계산할 때마다 원래의 行列이 변형되므로 演算시간도 따라서 커진다.

따라서 종래의 逆行列이나 Gauss 소거법에 의한 線型방정식의 解를 구하려면 演算에 필요한 기억공간이나 계산시간이 상당히 커진다.

우선 演算에 필요한 기억공간은 다음의 部分行列 演算過程을 통하여 거의 1/4로 줄일 수 있다[5, 7].

4.1 部分行列法

식(5)와 (12)는

$$([A] + i[B])(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2) = \vec{F}_1 + i\vec{F}_2 \dots\dots\dots (13)$$

의 형태를 가지므로, 식(13)을 實數와 虛數부분으로 나누면,

$$[A]\vec{X}_1 - [B]\vec{X}_2 = \vec{F}_1 \dots\dots\dots (14)$$

$$[B]\vec{X}_1 + [A]\vec{X}_2 = \vec{F}_2 \dots\dots\dots (15)$$

으로 표현되는데, 식(14), (15)를 하나의 行列演算으로 표시하면,

$$\begin{pmatrix} [A] & -[B] \\ [B] & [A] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

이 된다.

Gauss 소거법은 식(16)에 대해서 수행되어야 하는 반면에, 部分行列 分解法을 사용하여 식(15)를 \vec{X}_2 에 대해서 풀면,

$$\vec{X}_2 = [A]^{-1}(\vec{F}_2 - [B]\vec{X}_1) \dots\dots\dots(17)$$

이 되고, 다시 식(17)을 식(14)에 대입하여 정리하면,

$$([B][A]^{-1}[B] + [A])\vec{X}_1 = \vec{F}_1 + [B][A]^{-1}\vec{F}_2 \dots\dots\dots(18)$$

이 된다.

식(16)에 직접 Gauss 소거법을 사용하는 경우와 식(17) 및 (18)에서와 같은 부분행렬법을 사용할 때의 연산횟수 및 기억공간의 크기를 비교해 보면, 우선 부분행렬법을 사용하였을 경우는 식(16)의 행렬크기에 대해 1/4의 크기를 가지는 행렬의 연산을 두번하게 된다.

이것은 $[A]^{-1}$ 의 계산과 $[BA^{-1}B + A]^{-1}$ 를 의미한다. 그러나 Gauss 소거법의 경우는 식(16)의 전체행렬연산이 한번 이루어져야 하기 때문에 부분행렬법에 비해 불리하다.

기억공간에 있어서도 식(16)의 경우에 비해 부분행렬법을 사용하면 약 1/2정도로 줄일 수 있게 된다. 특히 부분행렬법에서 역행렬을 계산하는 대신 Choleski의 分解方法을 사용하게 되면, 단 1회의 행렬분해로써 여러 경우의 右項벡터 \vec{F} 의 경우 \vec{X} 를 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다.

4·2 Choleski 分解方法

Choleski 방법은 임의의 正則行列 $[A]$ 가 下三角行列 $[L]$ 과 上三角行列 $[U]$ 의 곱으로 표현될 수 있다는 사실을 이용하여 線型聯立方程式을 푸는 직접방법으로서 해석과정은 다음과 같다[7].

주어진 $(n \times n)$ 연립방정식이

$$[A]\vec{X} = \vec{b} \dots\dots\dots(19)$$

이라면, $[A]$ 는 下三角行列 $[L]$ 와 上三角行列 $[U]$ 의 곱의 형태인 $[L][U]$ 로 분해될 수 있으므로, 식(19)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[L][U]\vec{X} = \vec{b} \dots\dots\dots(20)$$

여기서

$$[U]\vec{X} = \vec{z} \dots\dots\dots(21)$$

로 놓으면, 식(20)은 다음과 같이 표현된다.

$$[L]\vec{Z} = \vec{b} \dots \dots \dots (22)$$

식(22)에서 $[L]$ 은 下三角行列이므로 Z_1 에서 Z_n 까지 순차적으로 계산되며, 이렇게 계산된 \vec{Z} 를 식(21)에 대입하고 $\vec{\lambda}$ 에 대해서 풀면, $[U]$ 가 上三角行列이므로 X_n 에서 X_1 까지 역순으로 구해진다.

여기서 유일한 분해인

$$[A] = [L][U] \dots \dots \dots (23)$$

를 만족하는 $[L]$ 과 $[U]$ 의 구성요소들은 다음의 반복식으로 결정된다.

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \quad i \geq j \dots \dots \dots (24)$$

$$u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}) / l_{ii} \quad i < j \dots \dots \dots (25)$$

$$u_{ii} = 1.$$

관련침자들 i, j 에 대해, 이들 구성요소들은 다음의 순서로 계산된다.

$$l_{i1}, u_{1j}; l_{i2}, u_{2j}; l_{i3}, u_{3j}; \dots ;$$

$$l_{i, n-1}, u_{n-1, i}; l_{nn}, u_{nn}$$

여기서

$$l_{i1} = 0 \quad (i=2, 3, 4, \dots, n)$$

$$u_{nn} = 1$$

이다.

4.3 系統圖

식(18)에 포함되어 있는 $[A]^{-1}\vec{F}_1$ 항과 $[A]^{-1}[B]$ 항들은 식(17)에 그대로 사용될 수 있다.

여기서 $[A]^{-1}$ 는 $[A]$ 의 역행렬을 뜻하나 실제의 계산에서는 $[A]$ 를 $[L][U]$ 분해한 후 우항벡터만을 \vec{F}_2 , $[B]$ 로 바꾸어가며 계산한다.

$[BA^{-1}B + A]^{-1}$ 에 대해서도 마찬가지이다.

이상에서 논의된 부분행렬법과 Choleski 분해법을 사용하여 複素數 線型聯立方程式의 해석과정을 Fig. 1의 제통도에 나타내었다.

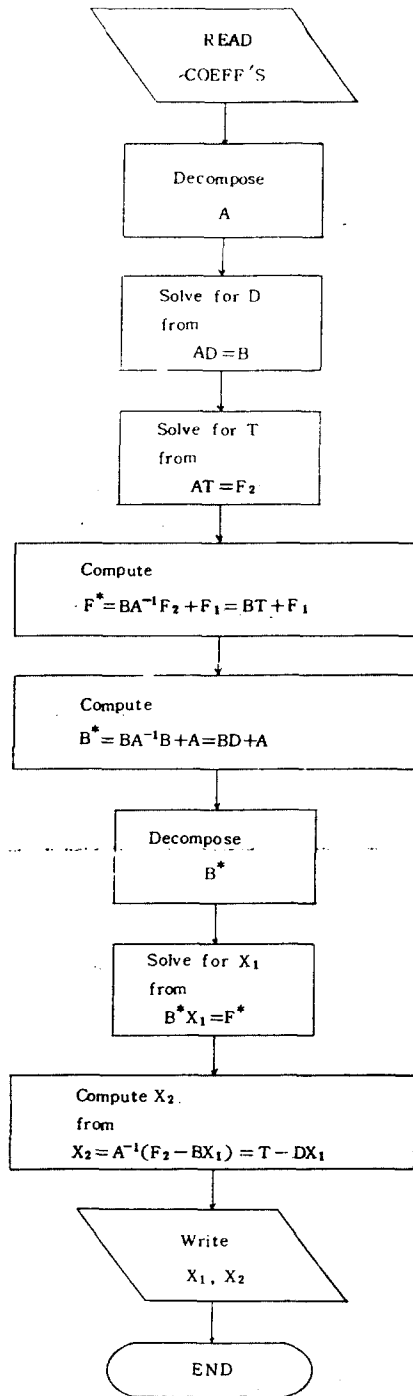


Fig. 1 Block diagram for a complex linear equation solver.

5. 結果 및 考察

본 계산과정은 複素數를 포함한 線形聯立方程式을 푸는 과정으로 요구되는 기억공간을 部分行列을 이용함으로써 줄였으며, Choleski의 직접해법을 사용함으로써 연산에 필요한 계산시간을 단축시켰다. 본 계산과정을 현재 널리 사용되고 있는 2-D 流體力 계산프로그램인 Maeda 방법 프로그램과 Frank 방법 프로그램에 각각 적용시켜 원래의 것과 비교하여 보았다.

5.1 Maeda 방법 프로그램의 경우

최대 50개의 계산점까지 계산할 수 있는 프로그램에 요하는 변수배열의 크기를 원래의 Gauss 소거법과 본 방법을 사용할 때 차이점을 비교하였다.

또한 계산시간을 비교하기 위하여 19개의 계산점에 heave, sway, roll의 3모드를 2진동수에 대해서 계산하여 보았다(Table 1).

Table 1 Comparison of dimension and CPU time (Maeda)

	Gauss elimination method	Proposed method	reduction ratio
Max. required dimension	60 KB	50 KB	17%
CPU time	1.01 sec	0.79 sec	21%

5.2 Frank 방법 프로그램의 경우

최대 45개의 계산점까지 계산할 수 있는 프로그램에 요하는 변수배열의 크기를 원래의 Gauss 소거법과 본 방법을 사용할 경우에 대해 비교하였다.

또한 두 방법에 요하는 계산시간을 비교하기 위하여 10개의 계산점에, heave 1가지 모드를 2진동수에 대해 계산한 결과는 Table 2와 같다.

Table 2 Comparison of dimension and CPU time (Frank)

	Gauss elimination method	Proposed method	reduction ratio
Max. required dimension	105.3 KB	56.7 KB	46%
CPU time	0.31 sec	0.22 sec	29%

이상에서와 같이 Maeda 방법 프로그램과 Frank 방법 프로그램에서 두 경우 모두 원래의

Gauss 소거법을 사용하는 경우보다 본 방법을 사용하는 경우가 기억공간이나 계산시간이 현저하게 감소되는 것을 알 수 있다.

본 방법을 적용하였을 경우, 기억공간의 감소비가 Maeda 방법, 프로그램보다 Frank 방법 프로그램이 더 큰 것은 Maeda 방법 프로그램에서는 실수계수만을 가진 線型聯立方程式의 해법이므로 본 방법의 감소효과는 순전히 LU 분해에 의한 Choleski의 직접해법 감소효과뿐이나, Frank 방법 프로그램에서는 부분행렬법의 감소효과까지를 포함하기 때문이며, 따라서 계산시간의 감소비도 Frank 방법쪽이 더 크다.

여기서는 비교적 계산점의 갯수에 대한 필요성이 적은 2차원 유체력 계산과정에 국한하였으나, 각 단면의 상관관계까지를 고려하는 3차원 유체력 계산과정에서는 요구되는 계산점들의 갯수가 커질 것이므로 본 방법을 적용할 경우 기억공간이나 계산시간의 감소효과는 더욱 커질 것이다.

6자유도 連成運動方程式의 해법에서는 요구되는 기억공간의 크기가 크지 않으므로 별로 의미가 없는 것 같으나, Hooft의 방법에 비하면 훨씬 간단하여진 것을 알 수 있다[1].

본 계산에 이용된 전산기는 IBM 3083이었으며, 본 계산과정은 複素數가 정의되지 않는 개인용 전산기에서도 이용가능하다.

6. 結 論

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 複素數를 포함하는 線型聯立方程式의 해법의 한 방법으로써 部分行列과 Choleski의 직접해법을 이용한 새로운 프로그램을 작성하였다.
2. 본 계산방법은 Gauss 소거법과 비교할 때 기억공간이나 계산시간이 적게 요구된다.
3. 본 계산방법을 Maeda 방법 프로그램에 적용한 결과 기억공간이 17%, 계산시간이 21%의 감소가 있었다.
4. 본 계산방법을 Frank 방법 프로그램에 적용한 결과 기억공간이 46%, 계산시간이 29%의 감소가 있었다.
5. 6자유도 連成運動方程式의 해법이 간단해졌다.
6. 複素數가 정의되지 않는 개인용 전산기에서도 본 계산방법을 이용하여, 複素數를 포함한 線型聯立方程式을 풀 수 있다.

參 考 文 獻

- 1) Hooft, J. P. : "A Mathematical Method of Determining Hydrodynamically Induced Forces on a Semi-Submersible", Trans. SNAME, 1971, 28~70.
- 2) Bedel, J. W. and C. M. Lee : "Numerical Calculation of the Added Mass and Damping Coefficients of Cylinders Oscillating in or below a Free Surface", NSRDC report 3551, 1971, 26~40.
- 3) 前田久明 : "任意船型에 對한 波에 의한 強制力", 東京大學 船舶工學科 博士論文, 1968, 64~70.
- 4) Kuo, S. : "Computer Applications of Numerical Methods", Addison-Wesley, 1972, 189~203.
- 5) Hogben, N. and R. G. Standing : "Wave Loads on Large Bodies", Proc. Int. Symp. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, 1974, 258~277.
- 6) Sarpkaya, T. and M. Isaacson : "Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures", Van Nostrand Reinhold, 1981, 381~472.
- 7) Rao, S. S. : "The Finite Element Method in Engineering", Pergamon, 1982, 38~51