

비틀림을 받는 四角柱의 應力解析

金 東炫*, 池 中照*, 尹 甲英**

Stress Analysis of Rectangular Bar under Torsion

Dong-Hyun Kim*, Joong-Jo Ji*, Kab-Young Yoon**

ABSTRACT

In this study, the stress distribution of rectangular bar under torsion, when warping of both ends is free or constrained, is investigated. Method of separation of variable and Fourier Series are used for the theoretical analysis, and 3dimensional photoelastic stress-freezing method for experimental analysis.

The main results are as follows;

- 1) In the case of warping-constrained rectangular bar, the normal stresses are negligible because they are less than 0.5% of the shear stresses. The maximum normal stress is placed on the point of $y=0.61b$ when $b/a=1$ and it gradually moves to the corner $y=b$ when the value of b/a is increased.
- 2) According to increase of the value of b/a , on the crosssection, the maximum shear stress is placed on the middle point of the long side ($x=\pm a, y=0$) when warping of both ends is free but the middle of the short side ($x=0, y=\pm b$) when warping is constrained.

The stress distribution is straight line when warping is constrained, namely, the stress distribution is proportional to the distance from the axis of centroid, but parabolic when warping is free.

- 3) The values of the combined stress of warping-constrained bar, if the influence of the loaded point is neglected, are generally smaller than those of warping-free.

* 한양대학교 대학원 (정회원)

** 한양대학교 공과대학 기계설계학과 교수 (정회원)

Nomenclature

E : Modulus of elasticity in tension and compression (kg/mm)	a, b : Half length of the side on the cross section (mm)
G : Modulus of elasticity in shear (Kg/mm)	θ : Angle of twist per unit length
J : Polar moment of inertia of the cross section (mm)	σ_{max} : Combined stress (Kg/mm)
K : Constant of normal stress	σ_z : Normal stress (Kg/mm)
K_1-K_7 : Constants of shear stress	ϕ : Warping function
T : Torque (kg-mm)	

I. 緒 論

構造物에서 많이 사용되는 비틀림을 받는 矩形斷面の 棒 (Rectangular Bar) 에 있어서 現在까지 正確한 理論과 이것을 뒷받침할 수 있는 實驗的 解析이 發表되지 않았다.

Box girder 에 對해서는 V.Kristek 와 ¹⁾ B. Richmond, ³⁾ 奥村敏惠, 坂井藤 ⁴⁾ 등에 依한 理論的 해석연구가 되어 있기는 하나 實驗的인 뒷받침이 없었고 더우기 中實棒에 關해서는 간단한 材料力學的 近似解로서 순수 비틀림에 對한 것만이 나와 있을 뿐이다. ^{5,7,8,9)} 또한 St. Venant ⁶⁾ 는 비틀림을 받는 三角形, 橢圓 및 四角形의 斷面을 가진 棒에 對해서 Warping 을 지적하고 있으나 모두 兩端自由에서이고 Warping 을 拘束한 경우의 應力分布에 對해서는 언급하고 있지 않다.

한편, S. Timoshenko 는 한쪽 端을 固定하고 他端은 自由롭게 한 상태에서 비틀림을 加한 것에 對해 理論的으로 解析하였으나, ²⁾ 實際로 사용되는 兩端의 Warping 을 拘束한 棒에 있어서 是 理論的 및 實驗的 解析이 全無한 상태이고 더구나 實驗上의 어려움으로 因해서 더욱 研究가 부진하다.

本 研究에 있어서는 兩端이 自由로서 Warping 이 發生하는 경우와 兩端의 Warping 을 拘束한 경우에 對하여 理論解析을 하여 兩者를 比較檢討하고 이를 뒷받침하기 위해 光彈性實驗을 行하였다. 一般性을 기하기 위해서 斷面의 形狀을 變化시켰고, Warping 이 發生하는 兩端自由에서의 비틀림과 Warping 을 拘束한 棒에 對

해 變數分離法과 Fourier 급수를 利用하여 理論的인 解析을 하였으며, 實驗的으로는 三次元 光彈性 應力凍結法을 使用하여 各 棒의 外部 및 內部の 應力狀態까지도 解析하였다.

II. 理論的 應力解析^(2, 6)

1. Warping Function $\phi(X, y)$

Fig.1 과 같은 斷面의 모서리에 Torque T 가 作用하는 경우를 생각해 새로운 函數 ϕ_1 을 도입하여 Warping Function ϕ 를 나타내면,

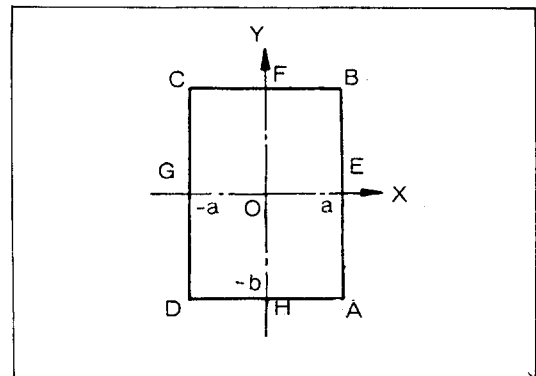


Fig. 1 Cross Section of the Bar

$$\phi = xy - \phi_1 \text{ (일반단면에서 Warping Function) } \dots\dots (1)$$

式(1)은 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ 을 만족하므로 구하는

Warping Function ϕ 는

$$\phi = xy - \phi_1 = xy - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{aK_n^3 \cos hKn b} \cdot$$

$$\sin K_n x \cdot \sinh K_n y \dots\dots\dots (2)$$

2. 極慣性 모우먼트

1) 兩端自由인 경우

$T = G\theta \iint_R (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \frac{\partial \phi}{\partial y}) dx \cdot dy$ 로 부터 $n=3$ 이상에서는 J 의 값에 거의 영향을 주지 않을 정도로 微小하므로 3째항까지만 전개한 식에 b/a 를 변화시키면서 구한 K_1 의 값을 Table 1에 나타내었다.

Table 1. Values of Constant K_1

b/a	1.0	1.2	1.5	2.0	5.0	10.0
K_1	2,243	2,656	3,130	3,657	4,459	4,995

2) Warping을 拘束한 경우

경계조건이 Warping을 拘束함으로 해서 棒의 전체길이에서 斷面의 형상이 초기와 같이 유지되며, X軸 및 Y軸에 대한 회전을 拘束하고 Z軸을 中心으로한 비틀림 角 θ 만을 허용하였으므로 따라서,

$$J = \iint_R (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x}) d \times d y = \frac{8}{3} ab (a^2 + b^2) \dots\dots\dots (3)$$

3. 剪斷應力

1) 兩端自由인 경우

① 剪斷應力 分布

Fig.2에서와 같이 OE 및 OF를 10 등분하여 $x = (i/10)a, y = (j/10)b$ 를 τ_{yz}, τ_{xz} 에 대입하면,

$$\tau_{yz} = \frac{Ta}{J} \cdot K_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Ta}{J} \cdot K_3 \dots\dots\dots (5)$$

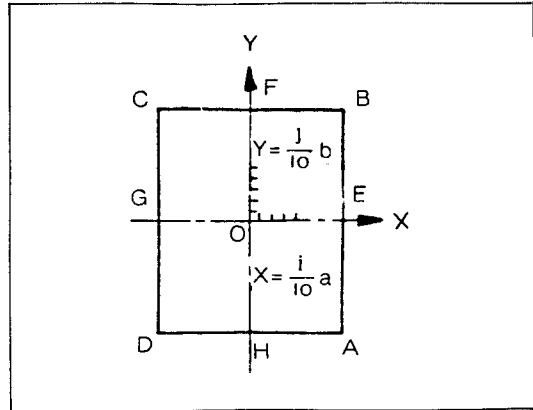


Fig. 2 Cross section of the Bar

式(4)와 (5)에서 K_2 및 K_3 를 3째항까지 전개하고 $b/a = 1, 1.5, 20$ 그리고 $i = 1$ 에서 10까지, 각각의 i 에 대해 j 를 0에서 10까지 등분하여 구한 k_2 의 값과 $j = 1$ 에서 10까지 각각의 j 에 대해서 $i = 0$ 에서 10까지 등분하여 구한 K_3 의 값을 Table 2,3에 각각 나타내었다.

Table 2. Values of Constant K_2

b/a	i \ j	0	2	4	6	8	10
1	2	0.203	0.194	0.168	0.127	0.078	0
	4	0.423	0.406	0.353	0.205	0.146	0
	8	0.984	0.952	0.854	0.676	0.392	0
	10	1.307	1.308	1.259	1.045	0.605	0
1.5	2	0.306	0.296	0.263	0.204	0.118	0
	4	0.621	0.601	0.538	0.420	0.239	0
	8	1.310	1.277	1.170	0.963	0.598	0
	10	1.695	1.660	1.547	1.326	0.930	0
2	2	0.357	0.348	0.318	0.258	0.154	0
	4	0.718	0.701	0.644	0.527	0.315	0
	5	0.901	0.881	0.813	0.670	0.405	0
	8	1.467	1.440	1.347	1.149	0.758	0
	10	1.860	1.832	1.734	1.525	1.104	0

Table 3. Values of Constant K_3

b/a	j/i	i					
		0	2	4	6	8	10
1	2	0.203	0.194	0.168	0.127	0.078	0
	4	0.423	0.406	0.353	0.265	0.146	0
	8	0.984	0.952	0.854	0.676	0.392	0
	10	1.307	1.308	1.259	1.045	0.605	0
1.5	2	0.148	0.141	0.121	0.088	0.046	0
	4	0.329	0.314	0.269	0.197	0.105	0
	8	0.936	0.906	0.806	0.618	0.338	0
	10	1.412	1.408	1.344	1.107	0.638	0
1	2	0.094	0.089	0.076	0.055	0.029	0
	4	0.225	0.214	0.183	0.133	0.070	0
	5	0.320	0.305	0.261	0.191	0.101	0
	8	0.830	0.780	0.702	0.530	0.287	0
10	1.435	1.430	1.362	1.121	0.645	0	

Table 2,3에서도 알 수 있듯이 $b > a$ 이면 최대전단응력 τ_{max} 는 τ_{yz} 의 $x = \pm a, y = 0$ 에서 발생한다.

$$\tau_{max} = \tau_{yz} \Big|_{\substack{x = \pm a \\ y = 0}} = \frac{Ta}{J} \cdot K_4 \dots (6)$$

Table 4에 식(6)에서 b/a 를 변화시켜서 구한 K_4 의 값을 나타내었다.

Table 4. Values of Constant K_4

b/a	1.0	1.2	1.5	2.0	5.0	10.0
K_4	1,351	1,518	1,695	1,860	1,999	2,000

2) Warping을拘束한 경우

① 剪斷應力分布

τ_{yz}, τ_{xz} 에 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x, \frac{\partial \phi}{\partial x} = -y$ 와 식(3)을 대입하면,

$$\tau_{yz} = \frac{T}{J} \cdot 2x = \frac{3Tx}{4ab(a^2+b^2)} \dots (7)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T}{J} \cdot 2y = \frac{3Ty}{4ab(a^2+b^2)} \dots (8)$$

式(7)과(8)에서 보는 바와 같이 τ_{yz} 는 x 값에만 의존하고 τ_{xz} 는 y 값에 따라서만 변한다.

式(7)과(8)에 $x = (i/10)a$ 및 $y = (j/10)b$ 를 각각 대입하면,

$$\tau_{yz} = K_5 \cdot \frac{T}{a^3} \dots (9)$$

$$\tau_{xz} = -K_6 \cdot \frac{T}{a^3} \dots (10)$$

式(9)와(10)에서 b/a 및 i, j 를 변화시켜서 구한 K_5, K_6 의 값이 Table 5에 있다.

Table 5. Values of Constants K_5, K_6

b/a	j, j		2		4		6		8		10	
	K_5	K_6	K_5	K_6	K_5	K_6	K_5	K_6	K_5	K_6	K_5	K_6
1.0	0.0375	0.0375	0.075	0.075	0.15	0.15	0.225	0.225	0.30	0.30	0.375	0.375
1.2	0.0256	0.0307	0.0512	0.0615	0.1025	0.1230	0.1537	0.1844	0.2049	0.2459	0.2561	0.3074
1.5	0.0154	0.0231	0.0308	0.0462	0.0615	0.0923	0.0923	0.1385	0.1231	0.1846	0.1538	0.2308
2.0	7.5×10^{-3}	0.015	0.03	0.03	0.06	0.06	0.09	0.09	0.12	0.12	0.15	0.15
5.0	0.6×10^{-3}	2.9×10^{-3}	1.2×10^{-3}	5.8×10^{-3}	2.3×10^{-3}	0.0115	3.5×10^{-3}	0.0173	4.6×10^{-3}	0.0231	5.8×10^{-3}	0.0288
10.0	7.4×10^{-5}	7.4×10^{-4}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-3}	3.0×10^{-4}	3.0×10^{-3}	4.5×10^{-4}	4.5×10^{-3}	5.9×10^{-4}	5.9×10^{-3}	7.4×10^{-4}	7.4×10^{-3}

② 最大剪斷應力

式(7)과 (8)에서 보면 전단응력 τ 의 절대값은 τ_{yz} $x=a$ 에서 보다 τ_{xz} $y=b$ 에서 더 큰 값을 갖는다.

$$\tau_{max} = \tau_{yz} \Big|_{y=b} = \frac{3}{4 \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\}} \cdot \frac{T}{a^3} = K_7 \cdot \frac{T}{a^3} \dots\dots (11)$$

b/a 의 값을 변화시켜 얻은 K_7 의 값을 Table 6에 나타내었다.

Table 6. Values of Constant K_7

b/a	1.0	1.2	1.5	2.0	5.0	10.0
K_7	0.375	0.307	0.231	0.150	0.029	7.4×10^{-3}

4. Normal Stress

Warping을拘束한 경우에는 軸方向應力 σ_z 가 생긴다. σ_z 는 軸方向(z方向)에서는 一定하다고 가정하면 $x-y$ 平面內에서만 변화하게 되므로

Table 7. Values of Constant $k\sigma_1$

b/a	i \ j	0	2	4	6	8	10
1	2	0	-4.39×10^{-7}	-3.51×10^{-3}	-0.04	-0.035	-0.070
	4	0	3.50×10^{-3}	3.39×10^{-6}	-0.018	-0.056	-0.120
	8	0	0.035	0.056	0.051	-3.04×10^{-4}	-0.123
	10	0	0.068	0.122	0.146	0.119	6.98×10^{-3}
1.5	2	0	0.031	0.055	0.066	0.054	9.43×10^{-3}
	4	0	0.064	0.116	0.142	0.122	0.041
	8	0	0.150	0.279	0.362	0.361	0.213
	10	0	0.205	0.388	0.523	0.566	0.440
2	2	0	0.062	0.116	0.152	0.156	0.105
	4	0	0.125	0.236	0.312	0.325	0.232
	5	0	0.158	0.298	0.398	0.418	0.306
	8	0	0.263	0.503	0.687	0.757	0.600
	10	0	0.340	0.656	0.913	1.048	0.925

$$\sigma_z = E\theta \left[xy - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{aK_n^3 \cosh K_n b} \sin K_n x \cdot \sinh K_n y \right] \dots\dots\dots(12)$$

1) Normal Stress의 分布

Fig.2의 전단응력분포를 구할 때와 같이OE면 및 OF면을 10등분하였다. 식(12)에 $x = (i/10)a$ $y = (j/10)b$ 를 대입하고 3째항까지 전개하면,

$$\sigma_z = E\theta a^2 \cdot K\sigma = \frac{2T(1+\nu)a^2}{J} \cdot K\sigma \dots\dots(13)$$

式(13)에서 $b/a = 1, 1.5, 2$ 로 변화시키고, 각 b/a 값에 대해 $i = 1$ 에서 10까지, 각 i 에 대하여 $j = 0$ 에서 10까지 10등분하여 구한 $k\sigma_1$ 과 $j = 1$ 에서 10까지 각 j 에 대하여 $i = 0$ 에서 10까지 등분하여 구한 $K\sigma_2$ 의 값을 Table 7, 8에 표시하였다.

2) Maximum Normal Stress

式(13)으로 부터 구한 Maximum normal stress (σ_2)_{max}는 BE면에 존재하며 위치는 각 단면의 모서리에서 發生하지 않고 b/a 값이 증가할수록 모서리 부분으로 접근하고 있음을 알

Table 8. Values of Constant $K\sigma_2$

b/a	$j \setminus i$		0	2	4	6	8	10
	j	i						
1	2	0	0	-4.39×10^{-7}	-3.51×10^{-3}	-0.014	-0.035	-0.070
	4	0	0	3.50×10^{-3}	3.39×10^{-6}	-0.018	-0.056	-0.120
	8	0	0	0.035	0.056	0.051	-3.04×10^{-4}	-0.123
	10	0	0	0.068	0.122	0.146	0.119	6.98×10^{-3}
1.5	2	0	0	0.031	0.064	0.103	0.150	0.205
	4	0	0	0.055	0.116	0.189	0.279	0.388
	8	0	0	0.054	0.112	0.219	0.361	0.566
	10	0	0	9.43×10^{-3}	0.041	0.100	0.213	0.440
2	2	0	0	0.062	0.125	0.192	0.263	0.340
	4	0	0	0.116	0.236	0.364	0.503	0.656
	5	0	0	0.137	0.280	0.434	0.605	0.795
	8	0	0	0.156	0.325	0.520	0.757	1.048
	10	0	0	0.105	0.232	0.388	0.600	0.925

수 있다. BE面을 10등분하고, b/a 를 변화시켜서 구한 $(K\sigma_1)_{max}$ 의 위치 및 값은 Table 9와 같다.

Table 9. Values and the Point of Constant $(K\sigma_1)_{max}$

b/a	1.0	1.2	1.5	2.0	5.0	10.0
$y(b)$	0.61	0.70	0.77	0.83	0.93	0.97
$(K\sigma_1)_{max}$	0.146	0.300	0.568	1.051	4.047	9.046

III. 實驗的 應力解析

1. 試片의 諸元 및 實驗裝置

本實驗에서 使用한 試片의 形상은 斷面積이 一定한 四角形斷面을 가진 棒으로서 諸元은 Fig. 3 및 Table 10과 같고 實驗裝置는 日本製 (理研計器 PA-300型)大型 렌즈식인 Circular polariscope와 Stress freezing furnace內에 Fig.4와 같이 비틀림 荷重裝置를 使用하였으며 Slice 試片을 촬영한 等色線의 무늬의 사진은 Fig.5와 같다.

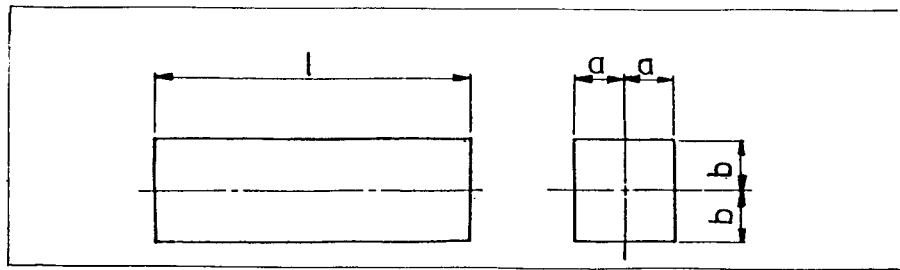


Fig. 3 Test piece Configuration

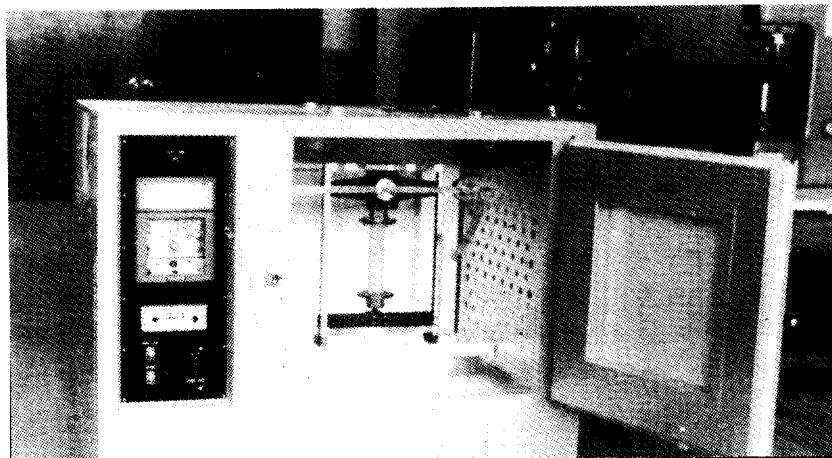


Fig. 4 Experimental Apparatus

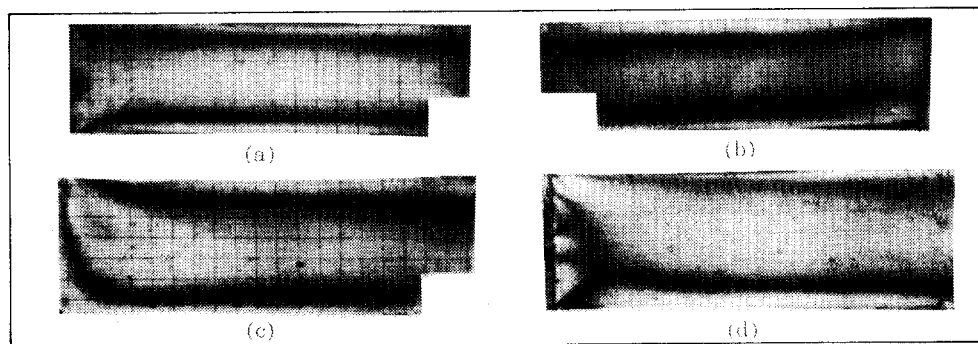


Fig. 5 Photoelastic Views, $\frac{b}{a}=1$

Table 10. Dimensions of Test Pieces (mm)

시편	I	II	III
b/a	1.0	1.5	2.0
a	30.0	24.5	21.2
b	30.0	36.8	42.4
A	900 mm ²		
l	200		

IV. 應力解析 結果 및 考察

兩端自由인 경우와 Warping을 拘束한 棒이 비틀림을 받고 있을 때 理論解析과 實驗的 解析을 通하여 얻은 結果를 Table 11과 Table 12에 각 위치에서의 組合應力의 값을 나타내었으며 Fig. 11과 Fig. 12에 圖示하였다. Fig. 6과 Fig. 7은 x 및 y軸에서 임의의 거리 떨어진 x面과 y面上的의 對角線方向에서의 應力分布를 나타내었고 Fig. 8과 Fig. 9는 z軸과 平行한 中央線에서의 應力分布를 Fig. 10과 Fig. 11은 圖心軸에 平行한 位置에서의 應力分布 그

리고 Fig.12는 棒의 中央位置의 斷面에서 考察한 應力分布를 圖示하였다. 應力解析結果 Warming을 拘束할 경우의 수직應력은 매우 작아 組合應力에 影響을 미치지 못하며 剪斷應力의 값만으로 計算된다. Fig.6과 Fig.7과 Fig.10과 Fig.11에서 보면 兩端自由인 경우 b/a 의 값이 增加할수록 應力의 값은 긴 변에서 增加하고 짧은 변에서는 점점 줄어들며 應力分布도 포물선적 분포를 하고있으나, 兩端의 Warming을 拘束한 경우는 짧은 변에서 增加하고 긴 변에서는 감소하고 있으며 一定한 應力分布

를 보이고 있다.

面中央點의 최대應력을 나타낸 Fig.8과 Fig.9에서 보면 Warming을 拘束한 경우보다 兩端自由인 경우보다 전반적으로 작은값을 보이고 있다. Fig. 12는 兩端自由인 경우 포물선적 분포를 보이고, Warming을 拘束한 경우는 직선적인 분포를 나타내며 應力値는 上述한 바와 같이 Warming을 拘束한 경우보다 兩端自由인 경우보다 작음을 알 수 있다. 以上의 考察에서 荷重點의 影響이 큰 兩端으로부터 10 mm까지는 解析에서 除外시켰으며, 이 影響은 棒의 表面部에도

Table 11. Values of Combined stress in the case of both end free, $b/a=1$

i	j	이론치	실험치	이론	실험	j	i	이론치	실험치	이론	실험
		σ_{max} (kg/mm^2)	σ_{max}					N'	N		
8	0	0.4668	0.4484	1.56	1.5	8	0	0.4668	0.4484	1.56	1.5
	1	0.4631	0.4484	1.55	1.5		1	0.4631	0.4484	1.56	1.5
	2	0.4519	0.4484	1.51	1.5		2	0.4519	0.4484	1.51	1.5
	3	0.4328	0.4185	1.45	1.4		3	0.4328	0.4185	1.45	1.4
	4	0.4052	0.3886	1.36	1.3		4	0.4052	0.3886	1.36	1.3
	5	0.3683	0.3587	1.23	1.2		5	0.3683	0.3587	1.23	1.2
	6	0.3207	0.2990	1.07	1.0		6	0.3207	0.2990	1.07	1.0
	7	0.2607	0.2541	0.87	0.9		7	0.2607	0.2541	0.87	0.9
	8	0.1859	0.1793	0.62	0.6		8	0.1859	0.1793	0.62	0.6
	9	0.0931	0.0900	0.31	0.3		9	0.0931	0.0900	0.31	0.3
	10	0	0	0	0		10	0	0	0	0
4	0	0.2009	0.1993	0.60	0.5	4	0	0.2009	0.1993	0.60	0.5
	1	0.1988	0.1993	0.60	0.5		1	0.1988	0.1993	0.60	0.5
	2	0.1926	0.1993	0.58	0.5		2	0.1926	0.1993	0.58	0.5
	3	0.1822	0.1993	0.55	0.5		3	0.1822	0.1993	0.55	0.5
	4	0.1676	0.1993	0.50	0.5		4	0.1676	0.1993	0.50	0.5
	5	0.1487	0.1329	0.45	0.4		5	0.1487	0.1329	0.45	0.4
	6	0.1257	0.1329	0.38	0.4		6	0.1257	0.1329	0.38	0.4
	7	0.0989	0.0997	0.30	0.3		7	0.0989	0.0997	0.30	0.3
	8	0.0691	0.0664	0.21	0.2		8	0.0691	0.0664	0.21	0.2
	9	0.0380	0.0332	0.11	0.1		9	0.0380	0.0332	0.11	0.1
	10	0	0	0	0		10	0	0	0	0

σ_{max} : 조합應력, N, N' : 무늬 차수, i : x의 좌표, j : y의 좌표

파급되어 理論的解析値와 實驗的解析値 사이에 다소 差異를 주고있다.

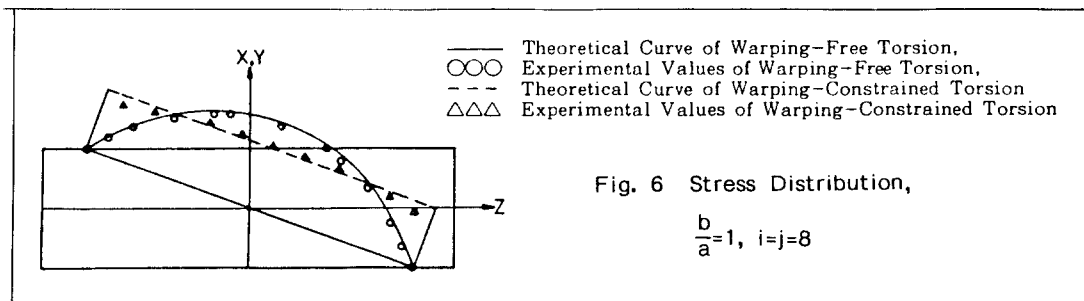


Table 12. Values of Combined Stress in the case of Warping Constrained, $\frac{b}{a}=1$

i	j	이론치 σ_{max} (kg/mm^2)	실험치 σ_{max}	이론 N'	실험 N	j	i	이론치 σ_{max}	실험치 σ_{max}	이론 N'	실험 N	
8	0	0.3200	0.3307	1.21	1.3	8	0	0.3200		1.20		
	1	0.3200					1					
	2	0.3200					2					
	3	0.3200					3					
	4	0.3200					4					
	5	"					5					
	6	"					6					
	7	"					0.2910	7				1.1
	8	"					8					
	9	"					0.2646	9				1.0
10	"	0.2381	10	0.9								
4	0	0.1600	0.1759	0.55	0.6	4	0	0.1600		0.55		
	1	0.1600					1					
	2						2					
	3						3					
	4						4					
	5						5					
	6						6					
	7						7					
	8						8					
	9						9					
10		0.1465	10	0.5								

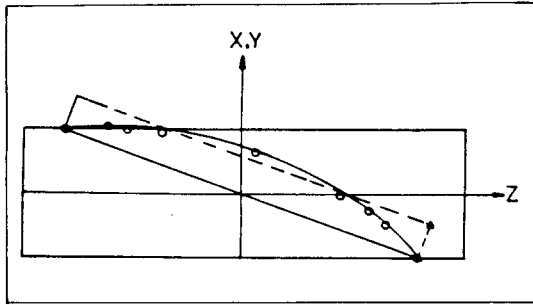


Fig. 7. Stress Distribution, $\frac{b}{a} = 1, i = j = 4$

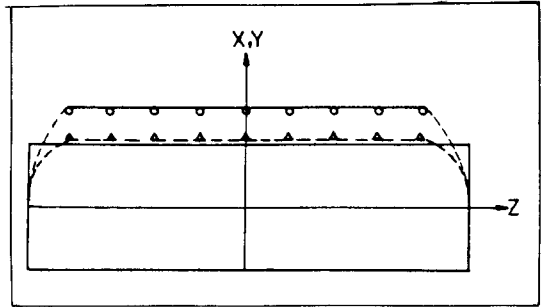


Fig. 8. Stress Distribution, $\frac{b}{a} = 1, i = j = 8$

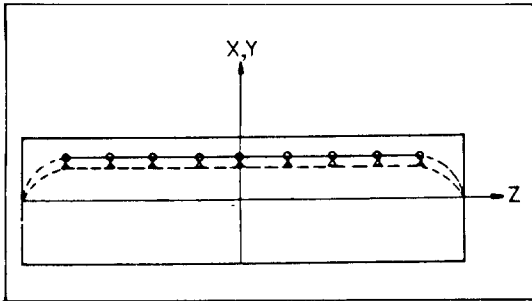


Fig. 9. Stress Distribution, $\frac{b}{a} = 1, i = j = 4$

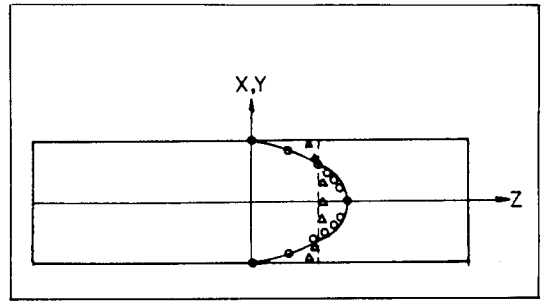


Fig. 10. Stress Distribution, $\frac{b}{a} = 1, i = j = 8$

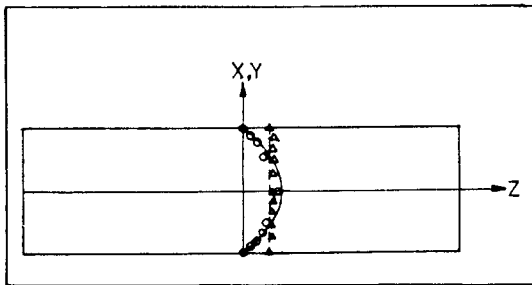


Fig. 11. Stress Distribution, $\frac{b}{a} = 1, i = j = 4$

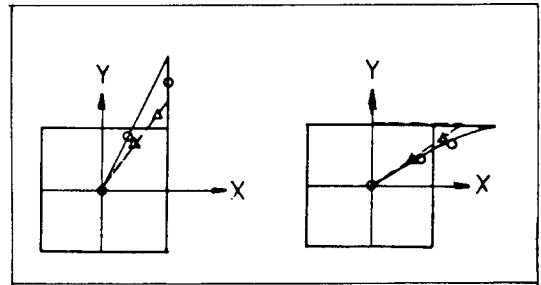


Fig. 12. Stress Distribution on the Cross Section, $\frac{b}{a} = 1, i = j = 8$

- Theoretical Curve of Warping-Free Torsion
- Experimental Values of Warping-Free Torsion
- Theoretical Curve of Warping-Constrained Torsion
- △△△ Experimental Values of Warping-Constrained Torsion

V. 結 論

四角形斷面을 가진 棒에 비틀림을 加했을때 各 部位에서의 應力狀態를 究明하였다. 兩端自由인 경우와 兩端의 Warping을 拘束한 棒에 있어서 斷面의 形狀을 變化시켜 理論解析 및 實驗解析을 通하여 考察한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) Warping의 억제되도록 兩端을 拘束하여 비틀었을때의 수직응력은 전단응력의 0.5 %以下로 無視할 수 있어서 組合應力은 전단 응력만으로 計算된다. 또한 理論解析에 依하면 수직응력 最大點은 $b/a = 1$ 일 때에 단면상 긴 변 ($x = a$) 의 $y = 0.61 b$ 에서 나타나며, b/a 값이 增加함에 따라 모서리 쪽으로 移動한다.

2) 단면상에서 b/a 의 값이 增加함에 따라 전단응력의 最大點은 兩端自由인 경우에 긴 변의 中央 ($x = \pm a, y = 0$) 에서 發生하나, Warping을 拘束했을 경우는 짧은 변의 中央 ($x = 0, y = \pm b$) 에서 發生하고 應力分布 狀態는 兩端自由인 경우에 포물선적, Warping을 拘束한 경우에는 직선적 즉 圖心軸으로부터의 거리에 比例한다.

3) 荷重點의 영향을 無視할경우 兩端自由인 경우에서보다 Warping을 拘束한 경우의 應力이 전반적으로 작아진다.

Reference

1. KRISTEK V., "Box Girders of deformable cross Section some Theory of Elasticity Solution", J.Struct, Div.Am.Soc, Civ.Engrs, 1970, 47, (oct) pp.239-253.
2. Von S. Timoschenko, "Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie", Z.Mach. Physik, vol.58, pp.361,1910.
3. RICHMOND, B., "Twisting of thin-walled box girder" Proc. Instn civ. Engrs, 1966, 33 (April) pp.659-675.
4. 奥村敏惠, 坂井藤, "Cross-sectional deformation of Box Girders and the influences of intermediate diaphragm", 土木學會論文報告集, 제190호, 1971, 6月, pp.23-35.
5. S.P.Timoshenko and Goodier J.N., "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, pp.338-341, Third Edition
6. NOVOZHILOV, "Theory of elasticity", Pergamon press, p.282-324. 1961.
7. Johnson W. and Mellor P.B., "Engineering Plasticity", Van Nostrand Reinhold Company, London, p.169.
8. I.S.Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, p.128-134, 2nd Ed.
9. J.T.ODEN, "MECHANICS OF ELASTIC STRUCTURES", McGraw-Hill, p.43-44.
10. R.Wm.Little, Elasticity, Prentice-Hall, In., pp.279-281, 1973
11. A.S. Saada, Elasticity, Theory and Applications, pergaman press pp.289-295.
12. 辻二郎, 西田正孝, 河田幸三, "光彈性 實驗法", 昭和40年, p. 171 - 235, pp. 263 - 378.
13. James W. Dally and William F.Riley, "Experimental Analysis", McGraw-Hill, 2nd Ed. p.406-530.
14. 鷄戶口英善, "彈性學" 共立出版地, 昭和39年, p. 65 - 73.