

탄성적으로 지지된 보의 동특성

Dynamic Characteristics of an Elastically Supported Beam

정 태 진* 박 영 조** 홍 동 표***
 Chung, Tae-Jin Park, Young-Jo Hong, Dong-Pyo

ABSTRACT

Numerical analysis has been made on the dynamic behavior of an elastically supported beam subjected to an axial force and solid viscosity when the frequency of external force passes through the first critical frequency of the beam.

Within the Euler-Bernoulli beam theory the solutions are obtained by using finite Fourier sine transform and Laplace transformation methods with respect to space and time variables.

Integrations involved in the theoretical results are carried out by Simpson's numerical integration rule.

The result shows that the maximum value of the dynamic deflection are much affected by the value of a solid viscosity, an axial force, an elastic constant and ratio of ω_{\max}/ω_1 .

기 호 설 명

A	: 단면적	l	: 길이
a	: 상수	N_0	: 축하중
b	: 상수	N	: $\frac{l^2 N_0}{\pi^2 EI}$
E	: 탄성계수	q	: 단위 길이당의 외력
E^*	: $E + \eta \frac{\partial}{\partial t}$	T	: $\omega_1 t$
$f(t)$: 외력	t	: 시간
I	: 관성 모우멘트	w	: 처짐
k	: 스프링 상수	α	: $\frac{a}{2\omega_1^2}$
K	: $\frac{kl^4}{\pi^2 EI}$	β	: $\frac{b}{3\omega_1^3}$

* 현대정공(주) 기술연구소

** 한양대공대 기계설계과

*** 전북대공대 정밀기계과

- λ : $\frac{n}{EI^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$
- η : 고체점성계수
- ξ : $\frac{n}{l}$
- ρ : 밀도
- Ω : $\omega_{max} / \omega_1 \sqrt{1-N}$
- ω_1 : $\frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$
- ω_{max} : 최대각속도

1. 서 론

시간 종속적인 하중이 작용하는 계의 동특성에 대한 연구는 F.M. Lewis¹⁾가 스프링-질량의 1자유도 모델을 사용하여 연구한 이후에 많은 이들이 연구한 바 있다. S. Suzuki²⁻⁴⁾는 기초탄성을 무시한 상태에서 Euler보의 동특성을 수치적분하여 구하였으며, F. Victor⁵⁾는 Timoshenko 보의 진동특성을 Fourier 변환을 이용하여 연구한 바 있다.

보를 지지하는 지지물에 대한 연구는 A.D. Kerr⁶⁾등이 감쇠를 무시한 상태에서 탄성·점탄성 지지물에 대하여 연구한 바 있다.

본 연구에서는 기초탄성을 고려하였을 때에 단순보의 동적 처짐특성을 고찰하였으며, 기진력은 계의 고유진동수를 2회 지나가는 것으로 가정하였다.

기진력은 $q \sin(\frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3}bt^3)$ 의 꼴로 작용하며, 회전관성과 전단력은 보의 처짐에 미치는 영향이 적으므로 무시하였다.⁷⁾ 진동방정식의 해는 Euler보의 이론을 적용하였으며, 시간에 대해서는 Laplace 변화율을 하였으며, 공간에 대해서는 Fourier 변화율을 이용하였다. 또한 해에 포함된 적분처리는 Simpson의 수치적분 방법을 이용하였다.

단순보에 기진력이 시간종속적으로 작용할 때에 동적처짐은 축하중과 고체점성 및 기초탄성에 의하여 크게 변화한다는 것을 밝혔다.

2. 기본방정식과 이론해석

기진력 $f(t)$ 가 $q \sin(\frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3}bt^3)$ 인 꼴로

단순보에 작용할 때에 동적처짐 특성을 고찰하기 위하여 차원과 좌표를 Fig. 1과 같이 가정하였으며, q, a, b 는 상수이다.

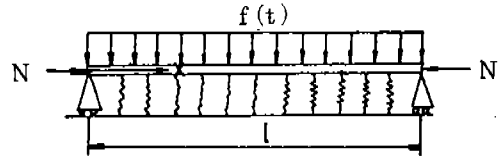


Fig. 1 Coordinates and dimensions

보에는 일정한 축하중 N_0 와 외력 $f(t)$ 가 균일한 분포상태로 작용하며, 보와 기초는 균일한 재료로 되어 있다고 가정하였다.

시간에 따라서 변화하는 진동수를 갖는 외력이 작용하는 계에 축하중, 고체점성 및 기초탄성을 고려하였을 때의 운동 방정식은

$$E^*I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = f(t) \dots \dots \dots (1)$$

여기서 E^* 는 상당탄성계수로서 Voigt형⁸⁾으로 가정하였으며 다음과 같다.

$$E^* = E + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

한편 외력 $f(t)$ 는

$$f(t) = q \sin \left(\frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{3} bt^3 \right)$$

으로 작용한다고 가정하였다.

식(1)을 ξ 와 T 를 도입하여 무차원화하면

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \pi^2 \lambda \frac{\partial^5 w}{\partial \xi \partial T} + \pi^2 N \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \pi^4 \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} + \pi^4 kw = \frac{l^4}{EI} q \sin(\alpha T^2 + \beta T^3) \dots \dots \dots (2)$$

식(2)를 ξ 에 관하여 finite Fourier sine 변환을 하며, 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{w}(n, T) = \int_0^1 w(\xi, T) \sin n\pi\xi d\xi \dots (3)$$

$$w(\xi, T) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(n, T) \sin n\pi\xi \dots (4)$$

방정식(2)를 변환하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial T^2} + \pi^2 \lambda n^4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} + (n^4 - Nn^2 + k) \bar{w} \\ &= \frac{1}{\pi^4} \left[\left\{ n\pi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - n^3 \pi^3 w + \lambda n \pi^3 \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^3 w}{\partial T \partial \xi^2} - \lambda n^3 \pi^5 \frac{\partial w}{\partial T} + Nn\pi^3 w \right\} \times \right. \\ & \left. \cos n\pi \xi \Big|_0^1 \right] + \frac{l^4 q}{EI \pi^5 n} \{ 1 - (-1)^n \} \\ & \sin(\alpha T^2 + \beta T^3) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

이 식에서 양단이 단순 지지된 경우를 고려하면 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(\xi, T) \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi, T) \Big|_{\xi=0} = 0, \\ w(\xi, T) \Big|_{\xi=1} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi, T) \Big|_{\xi=1} = 0 \\ &\dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

위의 경계조건을 식(5)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial T^2} + \pi^2 \lambda n^4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} + (n^4 - Nn^2 + K) \bar{w} = \bar{q} \\ &\dots\dots\dots (7) \\ & \bar{q} = \frac{l^4 \{ 1 - (-1)^n \}}{EI \pi^5 n} q \sin(\alpha T^2 + \beta T^3) \end{aligned}$$

식(7)을 Laplace 변환을 하고, 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{W}(n, S) = \int_0^\infty \bar{w}(n, T) e^{-ST} \alpha T \dots\dots (8)$$

$$\bar{w}(n, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{w} e^{ST} dS \dots\dots (9)$$

위의 정의에 의하여 식(7)을 변환하면서, 조조건 $\bar{w}(n, 0) = 0$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial T}(n, 0) = 0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \bar{W}(n, S) &= \frac{1}{S^2 + \pi^2 \lambda n^4 S + (n^4 - Nn^2 + K)} \\ & \cdot \bar{Q}(n, S) \end{aligned}$$

$$\bar{Q}(n, s) = \mathcal{L}\{ \bar{q}(n, T) \} \dots\dots\dots (10)$$

convolution theorem 을 이용하여 역변환하면

$$\begin{aligned} \bar{w}(n, T) &= \frac{\{ 1 - (-1)^n \} l^4 q}{\pi^5 EI n \{ (n^4 - Nn^2 + K) - \\ & \frac{1}{(\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4)^2} \}^{\frac{1}{2}} \times \int_0^T [\exp \\ & \{ -\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4 (T - \tau) \} \\ & \sin \{ (n^4 - Nn^2 + K) - \\ & \frac{1}{2} (\pi^2 \lambda n^4)^2 \}^{\frac{1}{2}} (T - \tau) \sin \\ & (\alpha \tau^2 + \beta \tau^3)] d\tau \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

식(4)로부터 $w(\xi, T)$ 를 구하면

$$\begin{aligned} \frac{w(\xi, T)}{q l^4 / \pi^5 EI} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{2 \{ 1 - (-1)^n \}}{n \{ n^4 - Nn^2 + K - \\ & \frac{1}{(\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4)^2} \}^{\frac{1}{2}} \times [\int_0^T \exp \\ & \{ -\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4 (T - \tau) \} \sin \{ n^4 - \\ & Nn^2 + K - (\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4)^2 \}^{\frac{1}{2}} \times \\ & (T - \tau) \sin(\alpha \tau^2 + \beta \tau^3) d\tau] \\ & \sin n\pi \xi \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

3. 수치해에 의한 결과 및 고찰

수치해석은 단순지지보의 중앙점 ($\xi = 0.5$)의 동적처짐에 미치는 무차원 축하중계수(N), 무차원 교체점성계수(λ), 무차원 기초탄성계수(K), α , β 및 Ω 의 영향에 관하여 조사하였다.

수치해석은 Simpson의 수치적분 방법을 이용하였으며, 결과의 고찰은 다음의 2가지 경우로 나누어 분석하였다.

- (1) λ 와 K 를 고려하였을 때
- (2) N , λ , K 를 모두 고려하였을 때

3.1 λ 와 K 를 고려하였을 때

기초탄성효과를 고려한 상태에서 외력이 $q \sin$

$(\alpha T^2 + \beta T^3)$ 으로 작용하였을 때에 단순보 중앙점의 처짐과 α 와의 관계를 Fig. 2에 나타내었다.

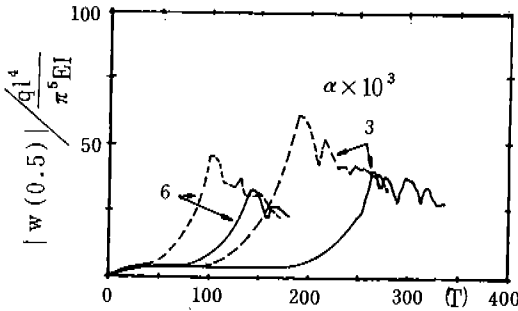


Fig. 2 Relationships between T and ext. Value of w for $\alpha \times 10^3 = 3, 6$, $\beta = 0$, $\lambda \times 10^3 = 1$, $K = 0, 1.2$ and $N = 0$

Fig. 2는 $\beta = 0$, $\lambda \times 10^3 = 1$, $N = 0$ 인 상태에서 $\alpha \times 10^3 = 3, 6$ 인 경우에 나타나는 단순보의 동적처짐 결과이다. 그림에서 점선은 $K = 0$ 인 경우이고, 실선은 $K = 1.2$ 인 경우이다. 또한 좌측의 두 그림은 $\alpha \times 10^3 = 6$ 인 상태이고, 우측의 두 그림은 $\alpha \times 10^3 = 3$ 인 상태이다.

외력의 진동수가 클수록 보의 최대 처짐은 빨리 나타나고, 외력의 진동수가 작을수록 보의 최대 처짐은 늦게 나타난다. 그러나 그 처짐량은 α 값이 작을수록 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

기초탄성효과를 고려하면 K 값이 클수록 보의 처짐은 작게 나타난다.

외력이 보의 위험진동수를 2회 지나는 때에 보의 교체점성효과를 고찰하기 위하여 Fig. 3에 그 변화상태를 나타내었다.

Fig. 3은 $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda \times 10^3 = 0, 1, 2, 4, 10$, $\Omega = 1.03$, $K = 0, N = 0$ 인 경우에 보의 동적처짐을 나타내었으며, λ 가 6×10^{-3} 이상이면 처짐이 현저하게 줄어든다.

기초탄성과 ω_{max} / ω_1 의 영향을 조사하기 위하여 Fig. 4에 그 처짐상태를 나타내었다.

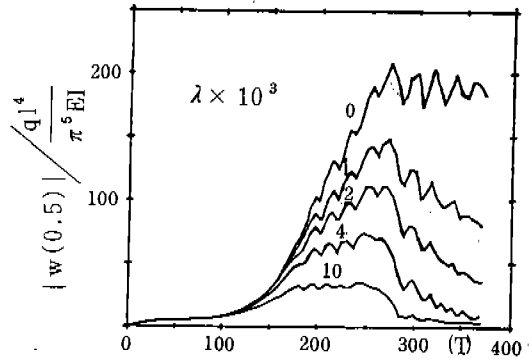


Fig. 3 Relationships between T and ext. Value of w for $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda \times 10^3 = 0, 1, 2, 4, 10$, $\Omega = 1.03$, $K = 0$ and $N = 0$

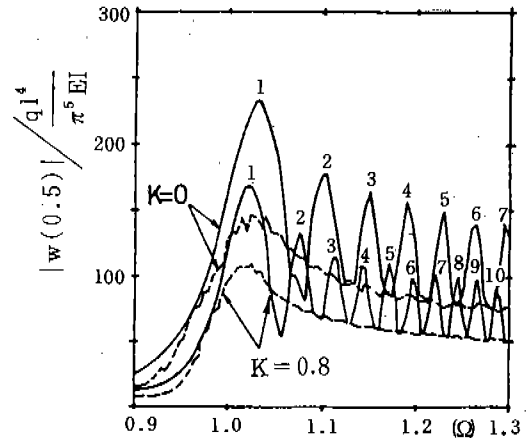


Fig. 4 Relationships between Ω and ext. Value of w for $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda = 0$, $K = 0, 0.8$ and $N = 0$

Fig. 4는 $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda = 0$, $N = 0$ 인 경우에 $K = 0$ 와 $K = 0.8$ 의 동적처짐 효과를 나타낸 것이다.

그림 중에서 점선으로 나타낸 것은 외력이 가속하면서 나타나는 동적처짐 특성이며, 실선으로 나타낸 것은 외력이 w_{max} 에 도달하였다가 감속되는 때에 나타나는 특성이다. K 값이 증가할수록 최대처짐은 $\Omega = 1.0$ 에 접근하며, 처짐을 나타내는 곡선의 변화가 심하다. 즉 K 가 0인 경우에는 7회 나타나며, K 가 0.8인 경우에는 10회 나타난다.

기초탄성계수 K 값의 변화와 동적최대처짐이 나타나는 순간의 Ω 값과의 관계를 Fig.5에 나타내었다.

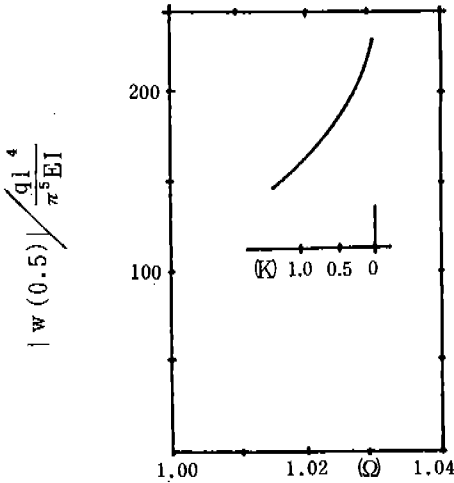


Fig. 5 Relationship between Ω and ext. Value of w for $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda = 0$, and $N = 0$

Fig. 5는 $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda = 0$, $N = 0$ 인 상태에서 K 값의 변화와 Ω 및 동적최대처짐 관계를 보여준다. 기초탄성계수(K)가 증가할수록 보의 동적 최대처짐은 $\Omega = 1.0$ 에 가까운 곳에서 발생한다.

고체점성과 보의 동적처짐과의 변화 상태를 고찰한 것이 Fig. 6이다.

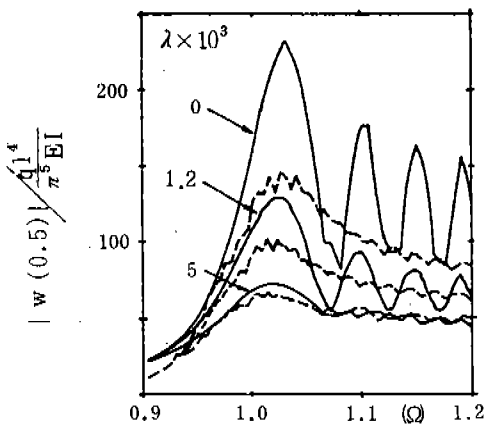


Fig. 6 Relationships between Ω and ext. Value of w for $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda \times 10^3 = 0, 1.2, 5$, $K = 0$, $N = 0$

Fig. 6은 $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda \times 10^3 = 0, 1.2, 5$ $K = 0$, $N = 0$ 인 경우에 Ω 와 보의 동적처짐 특성과의 관계를 고찰한 것이다. λ 를 고려하면 고체점성이 증가함에 따라서 보의 동적처짐은 급격히 감소하며 λ 값이 증가할수록 외력이 가속하면서 나타내는 동적처짐과 어느 가속도에 도달한후에 점차 가속하면서 나타내는 동적처짐 차이가 점차 감소한다.

고체점성계수가 증가할수록 단순보가 최대처짐을 일으키는 Ω 값도 점차 1에 가까워진다.

3.2 N과 K를 고려하였을 때

기초탄성의 효과를 고려하면서 동시에 축하중의 영향을 고찰한 것이 Fig. 7이다.

Fig. 7은 $\alpha \times 10^3 = 3, 6$, $\beta = 0$, $\lambda \times 10^3 = 1$ 인 상태에서 축하중과 기초탄성의 효과를 고찰한 것이다. 그림중의 \bullet 표는 축하중계수 $N = 0.4$ 이고, \blacktriangledown 표는 $N = 0$ 이며, \blacksquare 표는 $N = -0.4$ 이다. 그림(a)는 기초탄성을 고려하지 않았을 때의 N과 α 의 효과를 고찰한 것이다. 축하중이 인장상태에서 압축상태로 변함에 따라서 보의 동적처짐은 급격하게 증가하며 그 증가량은 α 값이 증대할수록 감소한다. 그림(b)는 기초탄성계수를 고려한 상태에서 축하중의 영향을 $\alpha \times 10^3 = 3, 6$ 인 경우로 구분하여 비교 고찰한 것이다.

기초탄성을 고려한 (b)의 처짐값이 (a)의 경우보다 현저하게 감소하였으며, 또한 축하중이 인장상태에서 압축상태로 변함에 따라서 보의 동적처짐이 증가하지만 그 증가량이 미소하며 더욱더 α 값이 6×10^{-3} 으로 증가하면 보의 동적처짐은 크게 감소한다.

축하중이 작용하는 상태에서 고체점성을 고려하였을 때의 보의 동적처짐을 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 8은 $\alpha \times 10^{-3} = 3$, $\beta = 0$, $\lambda \times 10^3 = 0, 1, 2, 6, 10$ 그리고 $N = -0.4$ 인 경우이다. K 값이 증가하면 보의 동적처짐은 감소하며, 고체점성계수 $\lambda \times 10^3$ 이 6 이상이 되면 K 값 변화에 의한 보의 처짐 변화가 거의 나타나지 않고 일정한 값을 나타낸다.

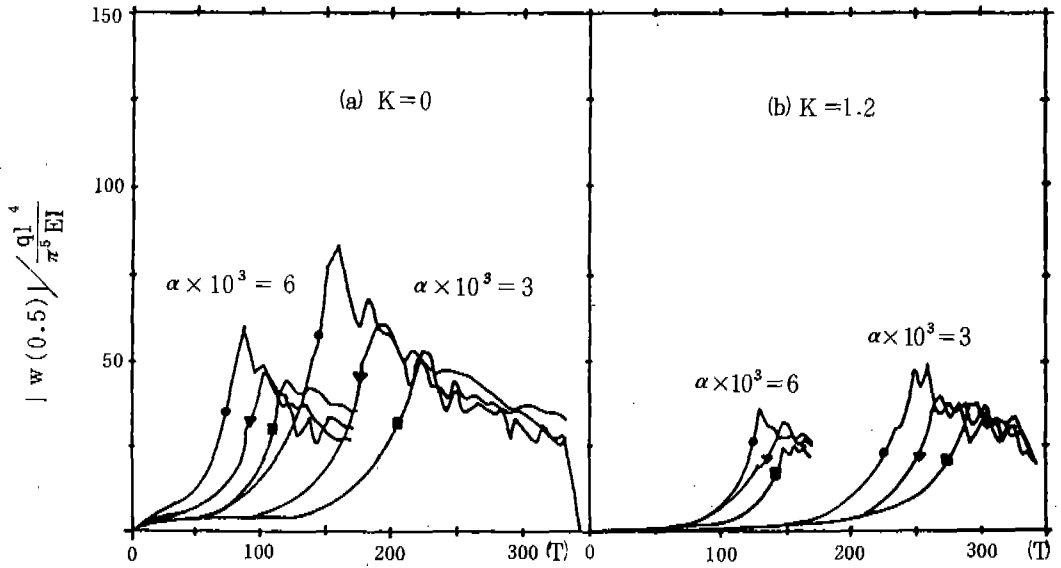


Fig. 7 Relationships between T and ext. Value of w for $\alpha \times 10^3 = 3, 6, \beta = 0, N = 0.4, 0, -0.4, K = 0, 1.2$

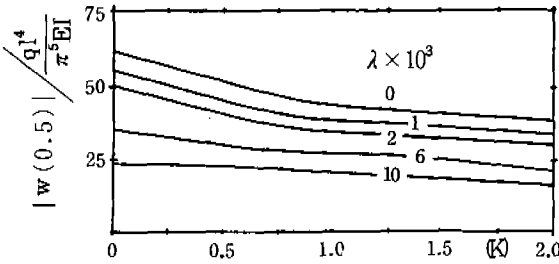


Fig. 8 Relationships between K and ext. Value of w for $\alpha \times 10^3 = 3, \beta = 0, \lambda \times 10^3 = 0, 1, 2, 6, 10$ and $N = -0.4$

외력이 보의 고유진동수를 2회 통과하는 경우와 1회 통과하는 경우에 대하여 기초탄성파 축하중의 효과를 Fig. 9에 나타내었다.

Fig. 9는 $\alpha \times 10^3 = 3, \lambda = 0, K = 0, 0.4, 0.8$ 인 상태에서 N 의 변화에 따른 보의 동적처짐변화를 나타낸 것이다. 그림중에서 점선은 $\beta = 0$ 인 경우이고, 실선으로 나타낸 것은 $\beta \times 10^5 = -1$ 인 경우이다.

기초탄성계수가 증가함에 따라서 보의 동적 처짐은 크게 감소하며, 그 처짐의 정도는 외력이 보의 고유진동수를 2회 지나가는 경우가

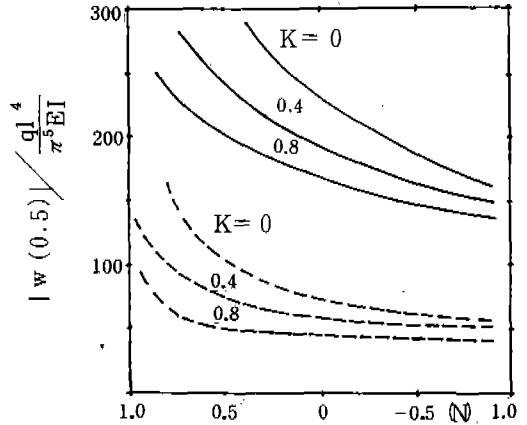
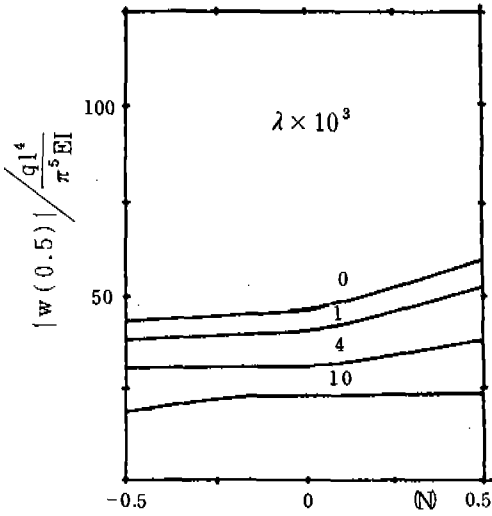


Fig. 9 Relationships between N and ext. Value of w for $\alpha \times 10^3 = 3, \beta \times 10^5 = 0, -1, \lambda = 0,$ and $K = 0, 0.4, 0.8$

1회 지나가는 경우보다 2.5배 이상된다.

고체점성을 고려하였을 때 축하중과 보의 동적처짐과의 관계를 Fig. 10에 나타내었다.

Fig. 10은 $\alpha \times 10^3 = 3, \beta \times 10^5 = -1, K = 1.2$ 인 경우에 축하중의 변화와 보의 동적처짐을 나타내었으며, λ 값이 증가하여 $\lambda \times$



타내었으며 그림중의 (a)는 $N = 0.4$, (b)는 $N = 0$, (c)는 $N = -0.4$ 인 경우이다.

축하중이 압축상태로 작용함에 따라서 보의 동적처짐은 증가하고, 처짐이 증가하였다가 감소하는 회수는 축하중이 인장상태로 증가함에 따라서 증가하는 특징을 갖는다.

4. 결 론

기초탄성의 효과와 교체점성의 영향 및 축하중을 고려한 단순보에 기진력이 시간종속적으로 작용할 때에 보의 중앙점의 동적처짐특성을 수치해석하여 얻은 결과는 다음과 같다.

(1) 기초탄성계수를 고려하면 동적최대처짐에 도달하는 시간이 길어지고, 그 크기는 크게 줄어진다.

(2) 무차원 교체점성계수(λ)가 6×10^3 이상이 되면 기초탄성의 변화가 보의 동적처짐에 거의 영향을 주지 않는다.

(3) 기초탄성효과를 고려하였을 때에 $\beta = 0$ 인 경우와 $\beta \times 10^5 = -1$ 인 경우의 보의 동적 처짐량은 2.5 배 이상된다.

(4) 기초탄성효과를 고려한 경우에는 교체점 성계수(λ)가 10×10^{-3} 이상이 되면 축하중의 영향을 거의 받지 않는다.

10^3 이 10 이상이 되면 축하중의 영향을 거의 받지 않는다.

기초탄성계수를 고려한 상태에서 Ω 의 변화와 보의 동적처짐과의 관계를 Fig. 11에 나타내었다.

Fig. 11은 $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda = 0$, $K = 0.4$ 인 경우에 Ω 와 보의 동적처짐과의 관계를 나

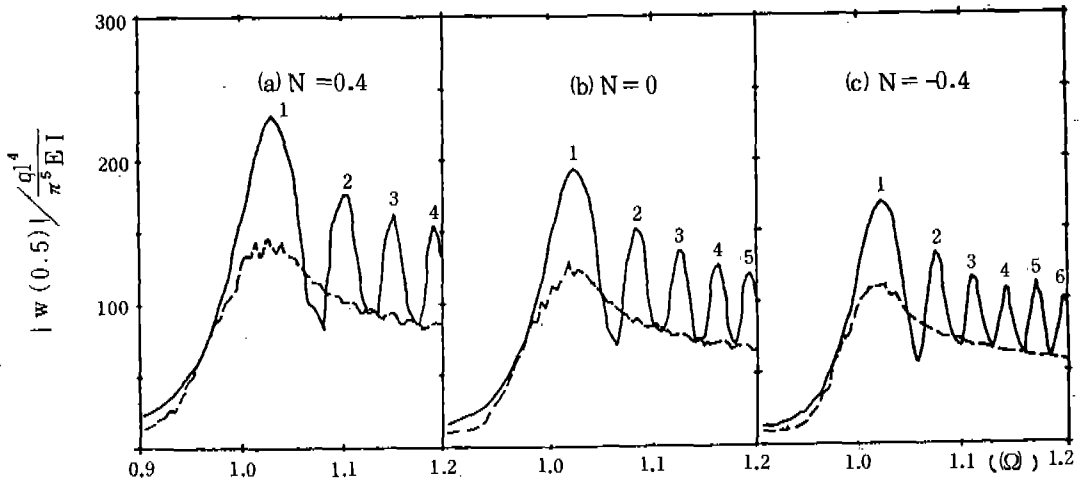


Fig. 11 Relationships between Ω and ext. Value of w for $\beta \times 10^5 = -1$, $\lambda = 0$ and $K = 0.4$

REFERENCES

1. F.M. Lewis, Vibration During Acceleration Through a Critical Speed, Trans. of the ASME, Vol. 54, pp. 253-261, 1932.
2. S.I. Suzuki, Dynamic Behavior of a Beam Subjected to a Force of Time-Dependent Frequency, J. of Sound and Vibration, Vol. 57, pp. 59-64, 1978.
3. S.I. Suzuki, Dynamic Behavior of a Beam Subjected to a Force of Time-Dependent Frequency (continued). J. of Sound and Vibration, Vol. 60, pp. 417-422, 1978.
4. S.I. Suzuki, Dynamic Behavior of a Beam Subjected to a Force of Time-Dependent Frequency (Effect of Solid Viscosity and Rotary Inertia), J. of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 157-164, 1979.
5. F. Victor and F. Ellyin, Acceleration of unbalanced Rotor Through the Resonance of supporting structure, J. of Appl. Mech, Vol. 48, pp. 419-424, 1981.
6. A.D. Kerr, Elastic and Viscoelastic Foundation Models, J. of Appl. Mech. Vol. 31, 1964.
7. S. Timoshenko, D. Young and W. Weaver, Jr. Vibration Problems in Engineering, Fourth Edition, Chap. 5, pp. 432, Wiley. N.Y., 1974.
8. Y.C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, Chap. 1, p. 20, P-H Inc. N.J., 1965.