

# 可變 두께를 갖는 直交異方性 平行四邊形 板의 自由振動 解析

許 哲 源 · 文 德 弘

釜 山 水 產 大 學  
(1986년 2월 1일 수리)

## Free Vibrations of Orthotropic Parallelogramic Plates with Variable Thickness

Cheol-Weon HEO and Duk-Hong MOON

National Fisheries University of Pusan

(Received February 1, 1986)

The vibrations problem of thin orthotropic skew plates of linearly varying thickness is analyzed using the small deflection theory of plates.

Using dimensionless oblique coordinates, the deflection surface can be expressed as a polynomial series satisfying the boundary conditions.

For orthotropic plates which is clamped on all the four edges, numerical results for the first two natural frequencies are presented for various combinations of aspect ratio, skew angle and taper parameter.

The properties of material used are one directional glass fibre reinforced plastic GFRP.

The results obtained may be summarised as follows:

1. In case of the first mode vibration of plates with increase in the skew angle, the natural frequencies of plates decrease.
2. As the aspect ratio decrease, the natural frequencies of plates decrease.
3. For the identical skew angle, natural frequencies of plates increase with the taper parameter of thickness.

### 기 호 설 명

|                    |   |  |
|--------------------|---|--|
|                    |   | of orthotropic plate of uniform thickness                              |
|                    |   | ness   |
|                    |   | $D_{x_0y_0}$ : $G_{xy}h_0/12$  |
| 2a, 2b             | : Dimensions of plate                                     | $D_1$ : Cross-rigidity of orthotropic plate                            |
| $A_{mn}$           | : Coefficient of series representing deflection           | $E_x, E_y, G_{xy}$ : Material constants of orthotropic plate           |
| $B_{mn}^{(ik)}$    | : Element of mass matrix                                  | $h$ : Thickness of plate with taper                                    |
| $D_{mn}^{(ik)}$    | : Element of stiffness matrix                             | $h_0$ : Thickness of plate without taper                               |
| $D_x, D_y, D_{xy}$ | : Variable rigidity parameters of orthotropic plate       | $i, k, m, n$ : Positive integers                                       |
| $D_{x_0}$          | : $E_x h_0 / 12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})$                      | $M_x, M_y, M_{xy}$ : Moment resultants                                 |
| $D_{y_0}$          | : $E_y h_0 / 12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})$ = Rigidity constants | $P_0, m_0$ : Parameters relating rigidity constants                    |
|                    |   | $Q_x, Q_y$ : Transverse shears in $x$ and $y$ directions, respectively |

- $t$  : Time
- $w$  : Deflection of plate independent of time
- $W$  : Lateral deflection of vibrating plate
- $x, y$  : Cartesian rectangular coordinates
- $\bar{x}, \bar{y}$  : Dimensionless oblique coordinates
- $\alpha$  : Taper parameter
- $\gamma$  :  $a/b$ , aspect ratio of plate
- $\theta$  : Skew angle
- $\xi, \eta$  : Oblique coordinates
- $\nu$  : Poisson's ratio of isotropic material
- $\nu_{xy}, \nu_{yx}$  : Poisson's ratio in orthotropic directions
- $\rho$  : Mass density of plate material
- $\omega$  : Angular frequency of plate
- $\lambda$  :  $(\omega a^2/\pi^2)(\rho h_0/D_{y_0})^{1/2}$ , Dimensionless frequency parameter

서 론

최근에는 선체가 FRP 로 된 소형 선박들이 많이 등장하고 있어서 이런 재질로 구조물을 만들 때의 구조해석에 관한 연구들이 활발히 진행되고 있다<sup>1,2,3</sup>.

이런 FRP 판으로 된 구조물의 진동해석에 있어 문제로 되는것은 재질이 등방성이 아니라는 사실이고, 특히 두께와 직각방향의 재료특성이 다른 스튜 판(skew plate)에 대한 지배방정식의 정확한 해가 존재하지 않으므로 설계자들의 주의를 요하게 된다.

최근에 와서 두께가 일정한 등방성 및 이방성 재료의 스튜된 평판(skewed flat plate)의 진동 해석에 대하여 미소처짐이론(small-deflection theory)을 적용한 논문들이 발표되고 있다. Kaul과 Cadambe<sup>3</sup>는 경계조건이 서로 다른 것들을 조합해서 두께가 일정한 등방성 스튜판의 고유진동수를 구하는데 Rayleigh 방법을, Hasegawa<sup>4</sup>는 고정된 판의 저차 고유진동수를 해석하는 데 Ritz 방법을, Duvasula<sup>5</sup>는 두께가 일정한 등방성의 고정된 판에 대하여 1형에서 6형까지 고유진동수를 해석하는 데 Galerkin 방법을 이용하였고, Kumar와 Pandalai<sup>7</sup>는 직교이방성 스튜판의 고유진동수 해석에 대하여 발표한 바 있다.

본 논문에서는 미소처짐이 일어나는 4면이 고정되고 가변 두께를 갖는 평형사변형 판에 대하여, 고정적인 판의 미소처짐이론(small-deflection classical plate theory)을 적용하여 지배방정식을 유도했고, 급수해를 가정하여 Galerkin 방법으로 고유진동수를 구하는 프로그램을 작성하여 수치계산을 하였다.

4면이 고정되고, 가변 두께를 갖는 직교 이방성 재

료의 자유진동해석에 대한 프로그램의 신뢰성을 확인하기 위하여 Dokainish와 Kumar<sup>6</sup>의 계산 결과와 비교 검토하였으며, 거시적으로 보면 직교 이방성으로 가정할 수 있는 유리 수치 일방향 강화 에폭시 FRP 판의 재료 특성값을 사용하여 판의 형상비, 스튜각 및 두께의 변화에 대한 자유진동을 고찰하였다.

이 론

Fig. 1은 판의 요소에 작용하는 힘과 모우멘트를 나타내고 있다. 처짐과 처짐각이 작다고 가정하면 Z 축방향으로의 힘의 평형방정식은 다음과 같다.

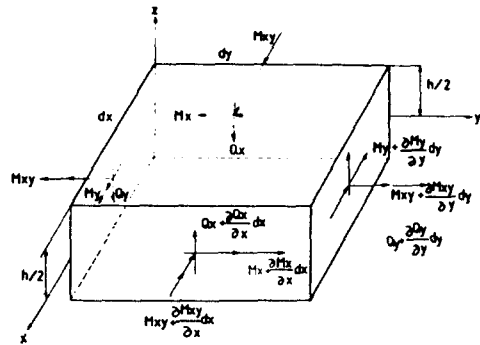


Fig. 1. Forces and moments acting on the plate element.

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}\right) dx dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) dy dx = \rho h dx dy \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1)$$

x축과 y축에 관한 모우멘트 평형방정식은

$$\left. \begin{aligned} Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

로 되고, 직교이방성 판의 경우 모우멘트 관계식은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_y \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -2D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} D_x &= E_x h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \\ D_y &= E_y h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \\ D_{xy} &= G_{xy} h^3 / 12 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

可變 두께를 갖는 直交異方性 平行四邊形 板의 自由振動 解析

이다.  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$  이며, (1)식 전체에 미소면적  $dx \cdot dy$  를 나누고 (2)식과 (3)식을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D_x \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D_y \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right] + 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \left[ D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

(5)식이 시간에 대하여 조화적인 해를 갖는다고 하면 처짐함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(x, y, t) = w(x, y) e^{j\omega t} \quad (6)$$

(6)식을 (5)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \left[ D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \rho h \omega^2 w = 0 \quad (7)$$

판의 두께를 선형적으로 변화시키면, 두께  $h$ 는 다음과 같다.

$$h = h_0(1 + \alpha y/b) \quad (8)$$

여기서  $h_0$ 와  $\alpha$ 는 상수이다.

(4)식에 (8)식의 판의 선형적인 두께 관계식을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} D_x &= D_{x0}(1 + \alpha y/b)^3 \\ D_y &= D_{y0}(1 + \alpha y/b)^3 \\ D_{xy} &= D_{x0y0}(1 + \alpha y/b)^3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

여기서  $D_{x0}$ ,  $D_{y0}$ ,  $D_{x0y0}$ 는 상수이다.

(8)식과 (9)식을 (7)식에 대입하면

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D_{x0}(1 + \alpha y/b)^3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D_{y0}(1 + \alpha y/b)^3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left[ D_{x0y0}(1 + \alpha y/b)^3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] - \rho h_0 \omega^2 (1 + \alpha y/b) w = 0 \quad (10)$$

로 되고, (10)식을 정리하면 힘의 평형방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha y/b)^3 \left[ D_{x0} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_{y0} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right. \\ & \left. + 4 D_{x0y0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + (6\alpha/b)(1 + \alpha y/b)^2 \left[ D_{y0} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 D_{x0y0} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + (6\alpha^2/b^2) D_{y0}(1 + \alpha y/b) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho h_0 \omega^2 (1 + \alpha y/b) w = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Fig. 2는 판의 직교좌표계  $(x, y)$ 와 경사좌표계  $(\xi, \eta)$ 를 나타내고 있다. 직교좌표계와 경사좌표계 사이의 관계식은

$$x = \xi + \eta \cos \theta, \quad y = \eta \sin \theta \quad (12)$$

이며, (12)식을 (11)식에 이용하고, 양변에  $a^4/D_{y0}$ 를

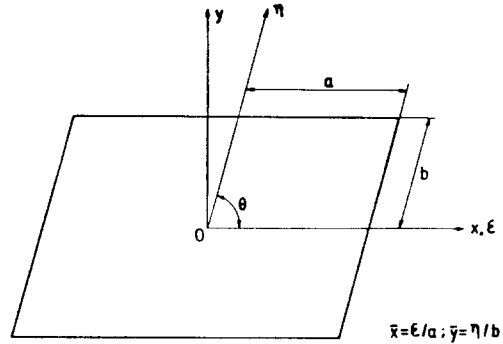


Fig. 2. Coordinates of the plate.

곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & f_0^3 \left[ P_0^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 P_0 m_0 \left( \cot^2 \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 2 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right) + (\cot^4 \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4 \cot^3 \theta \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 6 \cot^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4 \cot \theta \operatorname{cosec}^3 \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \operatorname{cosec}^4 \theta \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}) \right] a^4 + (6\alpha/b) f_0^2 \left[ -\cot^3 \theta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 3 \cot^2 \theta \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} - 3 \cot \theta \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + \operatorname{cosec}^3 \theta \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right] a^4 + (6\alpha^2/b^2) \left[ -\cot \theta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta} \right] a^4 + (6\alpha^2/b^2) f_0 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \nu_{xy}} + \cot^2 \theta - 2 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] a^4 = \pi^4 \lambda^4 f_0 w \quad (13) \end{aligned}$$

여기서

$$P_0 = \sqrt{D_{x0}/D_{y0}}, \quad m_0 = (D_1 + 2D_{x0y0}) / \sqrt{D_{x0y0}}, \quad D_1/D_{y0} = \nu_{xy}, \quad D_1/D_{x0} = \nu_{yx}, \quad f_0 = [1 + \alpha(\eta/q)\sin \theta] \text{이다.}$$

Fig. 2에서 경사좌표계  $(\xi, \eta)$ 를 무차원 좌표계  $(\bar{x}, \bar{y})$ 로 만들면 두 좌표계의 관계식은 다음과 같다.

$$\bar{x} = \xi/a, \quad \bar{y} = \eta/b \quad (14)$$

(14)식의 무차원 좌표계를 (13)식에 적용하면 힘의 평형방정식은 결국 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & f_0^3 \left[ C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} - C_2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} - C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^3} - C_5 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} \right] \\ & - f_0^2 \left[ C_6 \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^3} - C_6 \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + C_8 \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - C_9 \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{y}^3} \right] \\ & + f_0 \left[ C_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} - C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right] = \pi^4 \lambda^4 f_0 w \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

$$C_1 = P_0^2 + 2P_0 m_0 \cot^2 \theta + \cot^4 \theta$$

$$C_2 = \gamma(4P_0 m_0 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta + 4 \cot^3 \theta \operatorname{cosec} \theta)$$

$$C_3 = \gamma^2(2P_0 m_0 \operatorname{cosec}^2 \theta + 6 \cot^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta)$$

$$C_4 = \gamma^2(4 \cot \theta \operatorname{cosec}^3 \theta)$$

$$\begin{aligned}
 C_5 &= \gamma^4 \operatorname{cosec}^4 \theta \\
 C_6 &= \gamma(P_0 m_0 + \cot^2 \theta) 6\alpha \cot \theta \\
 C_7 &= \gamma^2(P_0 m_0 + 3 \cot^2 \theta) 6\alpha \operatorname{cosec} \theta \\
 C_8 &= \gamma^3 18\alpha \cot \theta \operatorname{cosec}^2 \theta \\
 C_9 &= \gamma^4 6\alpha \operatorname{cosec}^3 \theta \\
 C_{10} &= \gamma^2 (\nu_{xy} + \cot^2 \theta) 6\alpha^2 \\
 C_{11} &= \gamma^3 12\alpha^2 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta \\
 C_{12} &= \gamma^4 6\alpha^2 \operatorname{cosec}^2 \theta
 \end{aligned}$$

이다.

(15)식은 가변 두께를 갖는 직교이방성 평행사변형 판의 고유진동수를 구하기 위한 힘의 평형방정식이다.

4면의 가장자리가 모두 고정된 스튜판에 있어서 경계조건은

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}=0 \quad (16)$$

이다. 여기서  $n$ 은 각 가장자리에서 외향법선을 나타낸다.

Fig. 2의 경사좌표계에서 판의 가장자리 경계값을 무차원좌표계로 나타내면

$$\bar{x} = \pm 1, \quad \bar{y} = \pm 1 \quad (17)$$

이다.

판의 경계조건을 고려하면 처짐함수는 다음과 같이 급수형태로 표시할 수 있다.

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = (1-\bar{x}^2)^2(1-\bar{y}^2)^2 \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} A_{mn} \bar{x}^m \bar{y}^n \quad (18)$$

여기서  $A_{mn}$ 은 미정계수이다.

(18)식에 정의된  $w$ 를 (15)식에 대입하면 다음과 같은 식으로 된다.

$$F_2(\bar{x}, \bar{y}) - \pi^4 \lambda^2 F_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (19)$$

이 경우에  $m, n$ 의 유한개의 요소들만이 계산에 고려될 때 (19)식의 좌변은 오차식이 된다.

이 오차식과 가상변위  $\delta w$ 에 의한 전체 행한 일은 가상일의 정리를 이용하였으므로 실제로는 "0"이 되어야 하므로

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [F_2(\bar{x}, \bar{y}) - \pi^4 \lambda^2 F_1(\bar{x}, \bar{y})] \delta w d\bar{x} d\bar{y} = 0 \quad (20)$$

이다.

가상변위  $\delta w$ 는 다음과 같다.

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial A_{00}} \delta A_{00} + \frac{\partial w}{\partial A_{01}} \delta A_{01} + \dots + \frac{\partial w}{\partial A_{ik}} \delta A_{ik} + \dots \quad (21)$$

(20)식은 Galerkin 방법으로서, (21)을 (20)식에 대입하여 적분하면 다음과 같은 방정식의 형태가 된다.

$$\sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} A_{mn} [D_{mn}^{(ik)} - \pi^4 \lambda^2 B_{mn}^{(ik)}] = 0 \quad (22)$$

$$(i=0, 1, 2, \dots, k=0, 1, 2, \dots)$$

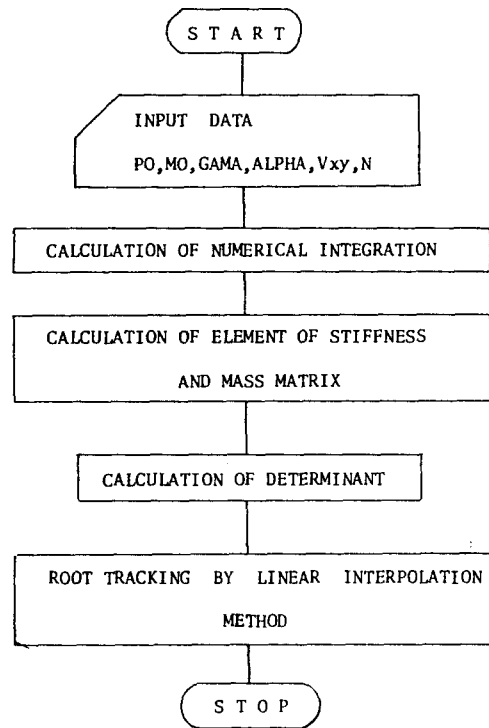
(22)식의 방정식을 만족하는 무차원 고유진동수  $\lambda$  값을 구하면 된다.

### 수 치 계 산

가변 두께를 갖는 직교이방성 판의 운동방정식에 경계조건과 Galerkin 방법을 적용하면 앞에서 유도한 바와 같이 (22)식이 되며, 이 식에서 무차원 고유진동수  $\lambda$  값을 구하기 위하여 프로그램을 작성하였으며 개략적인 흐름도는 Fig. 3과 같다.

(22)식은 무한개의 미정계수, 즉  $A_{00}, A_{01}, A_{02}, \dots$ 이 포함된 선형적인 동차방정식의 무한한 항으로 나타나는데,  $(m+n)$ 이 짝수(홀수), 그리고  $(i+k)$ 가 또한 짝수(홀수)인 경우에는 두개의 조로, 즉 짝수조와 홀수조로 크게 나눌 수 있다.

실제 계산에 있어서 처짐함수의 2중급수는 해의



PO, MO : Parameter relating rigidity constants  
 GAMA : Aspect ratio of plate  
 Vxy : Poisson's ratio in orthogonal direction  
 N : Order of the system matrix  
 ALPHA : Taper parameter

Fig. 3. Flow chart.

수렴성에 의해  $m, n$ 의 값을 적당하게 설정해서 몇개의 항들만을 고려하게 된다.  $m, n$ 가 설정되면 (22)식의  $A_{mn}$ 의 계수 매트릭스의 행렬식 값이 "0"이 되어야 하므로. 여기서 고유값을 포함하는 특성방정식이 만들어진다.

본 연구에서는 컴퓨터의 용량 관계로 수렴성 연구를 하지 못하였으며 Dokainish와 Kumar<sup>8)</sup>의 수렴성 연구를 참고로 하여  $m, n$  값을 각각 3으로 설정했기 때문에 치점함수인 (18)식은 16개의 항으로 전개되고 이 가운데 짝수만을 이용하면 (22)식은 결국 짝수조의 계수들, 즉  $A_{00}, A_{02}, \dots, A_{32}$ 을 포함하는 8개의 선형 동차방정식이 된다. 여기서  $A_{mn}$ 의 계수 행렬은  $8 \times 8$ 이 되고 행렬식의 값이 "0"이 되는 고유값을 선형내삽법으로 계산하였다.

프로그램의 신뢰성을 확인하기 위하여 Dokainish와 Kumar<sup>8)</sup>가 적용한 등방성 및 직교이방성 재료의 특성값을 이용하여 형상비가 1.0과 0.5에 대하여 두께 변화계수  $\alpha$ 가 0.0, 0.4이고 스쿼각이  $60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 일때 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 제1형 및 제2형 값을 계산하였으며, 아울러 두께변화계수  $\alpha$ 가 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9이고, 스쿼각이  $45^\circ$ 에서  $2.5^\circ$ 씩 증가시켜  $90^\circ$ 까지 변화할 때의 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 제1형 및 제2형 값을 계산하였다.

이 때 등방성 재료의 특성값은  $P_0=1.0, m_0=1.0,$

$\nu=0.3$ 이고, 직교이방성 재료인 Maple 5-ply wood의 특성값으로서,  $P_0=1.7664, m_0=0.3668, \nu_{xy}=0.1206$ 을 적용하였다. 그리고 재료의 특성값이  $P_0=1.6796, m_0=0.6103, \nu_{xy}=0.33$ 인 유리 수지 일방향 강화 에폭시 FRP에 대해서도 위와 같은 조건하에서 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 제1형 및 제2형 값을 퍼스널 컴퓨터(personal computer, 8bit)로 계산하였다.

## 결과 및 고찰

Fig. 4는 등방성 판에 있어서 두께 변화계수  $\alpha$ 를 매개변수로하고 스쿼각에 대한 무차원 고유진동수를 나타낸 것으로서 Fig. 4a는 형상비  $\gamma$ 가 1.0일때 제1형을 나타낸 것이다. 모든  $\alpha$ 의 값에 있어서 스쿼각이 증가함에 따라 무차원 고유진동수  $\lambda$  값은 작아지고 있다.

Fig. 4b는 형상비  $\gamma$ 가 1.0일때 제2형으로서 스쿼각이 증가함에 따라  $\lambda$ 의 값은 감소하나 제1형과 달리  $\alpha$ 가 0.4보다 큰 값에서는 스쿼각이  $90^\circ$ 로 접근함에 따라 증가하는 경향을 나타내고 있다.

Fig. 4c는 형상비가 0.5일때 제1형을 나타내고 있는데 형상비가 1.0일때 제1형과 비슷한 경향을 나타내고 있으나  $\alpha$ 가  $\lambda$ 에 미치는 영향은 형상비가 1.0일

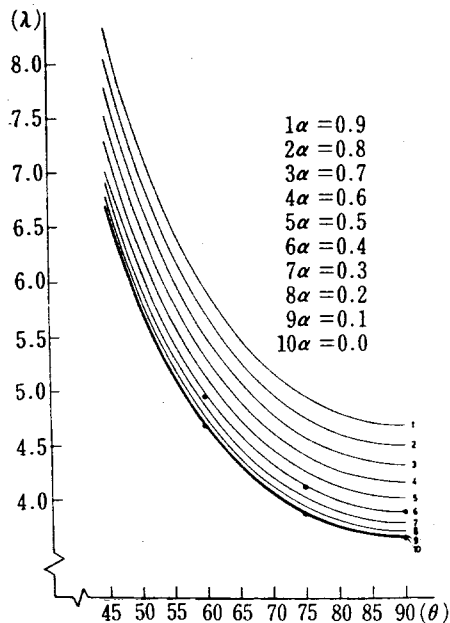


Fig. 4a.  $\gamma=1.0$ , 1st mode

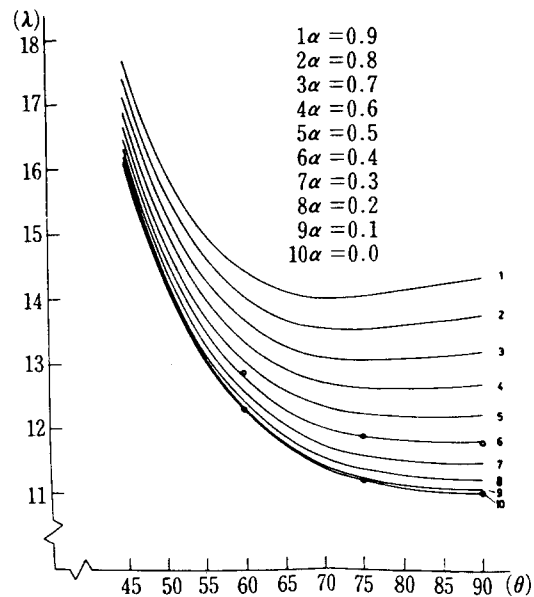


Fig. 4b.  $\gamma=1.0$ , 2nd mode

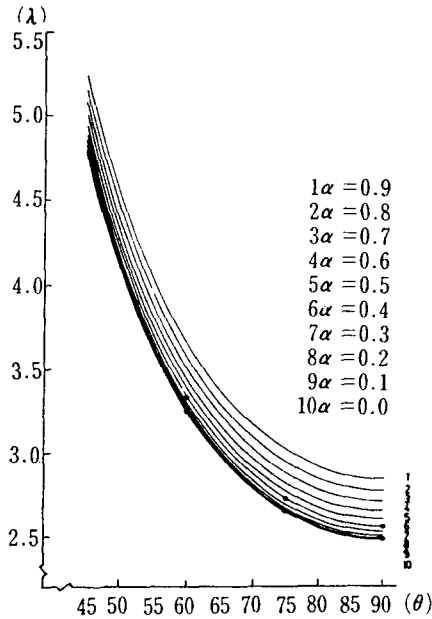


Fig. 4c.  $\gamma=0.5$ , 1st mode

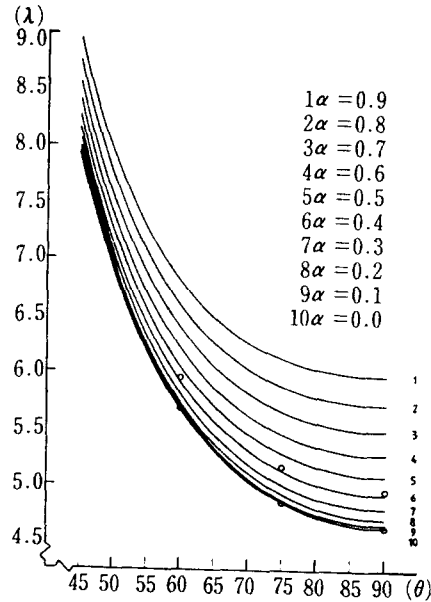


Fig. 4d.  $\gamma=0.5$ , 2nd mode

Fig. 4. Dimensionless frequency parameter of isotropic parallelogramic plates with variable thickness for skew angles.

때 보다 작은 현상이 나타나고 있다.

등방성 재료의 제1형에서 임의의 스튜각에서, 똑 같은 두께 변화계수의 증분에 대한  $\lambda$  값의 증분은 형상비가 1.0일때가 형상비가 0.5일때 보다 더 큰 변화를 보이고 있다.

Fig. 4d는 형상비가 0.5일때 제2형을 나타내고 있는데, Fig. 4b와 비교해 보면 Fig. 4b에서는 스튜각이 증가함에 따라 무차원 고유진동수가 감소하다가 90°로 접근함에 따라 다시 증가하는 경향을 보이고 있으나, Fig. 4d에서는 제1형에서와 같이 스튜각이 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 계속 감소하는 것이 다르다.

Fig. 5는 Dokainish와 Kumar<sup>8)</sup>가 수치계산에 이용한 직교이방성 재료인 Maple 5-ply wood의 특성값에 대한 결과로서 Fig. 5a 및 5b는 형상비가 1.0, Fig. 5c 및 5d는 형상비가 0.5일 때 스튜각의 변화에 따라  $\alpha$ 를 매개변수로 한 제1형 및 제2형의 무차원 고유진동수를 각각 나타내고 있다.

각 Fig.에서 나타난 스튜각에 대한  $\lambda$  값들의 변화를 등방성과 비교해 볼 때 특성값의 차이에 의한  $\lambda$ 의 절대적인 값의 차이는 있으나 전체적인 경향은 유사함을 알 수 있다.

Fig. 4<sup>a</sup>와 Fig. 5에 있어서 ○표시는 Dokainish와 Kumar<sup>8)</sup>의 결과로서  $\alpha$  값이 0.0 및 0.4 일 때, 스튜각이 60°, 75°, 90°에서의 무차원 고유진동수  $\lambda$  값을 나타낸다. 형상비가 1.0 및 0.5에서의 제1형에 대한  $\lambda$  값들은 상당히 일치하고 있으나, 제2형에서 약간의 차이를 보이고 있는데 이것은 컴퓨터의 용량에 관계가 있는 것으로 생각되며, 평균 5% 이내이므로 문제 될 정도는 아니다. 그러므로 이 프로그램에 의하면 재료가 등방성이든 직교이방성이든 간에 재료의 특성값들이 주어지면 신뢰할 수 있는 계산결과를 얻을 수 있으리라 생각된다.

Fig. 6은 유리 수지 일방향 강화 예폭시 FRP의 재료특성값을 이 프로그램에 적용하여 계산한 결과로서  $\alpha$ 를 매개변수로 하여 스튜각의 변화에 대한 무차원 고유진동수  $\lambda$  값의 변화를 나타낸 것이다.

Fig. 6a와 Fig. 6c는 형상비가 1.0 및 0.5 일 때 제1형을 각각 나타내고 있는데 스튜각의 변화에 대한 무차원 고유진동수  $\lambda$  값의 경향은 등방성 재료의 경우와 같은 경향을 나타내고 있다.

임의의 스튜각에 있어서  $\alpha$ 의 값이 증가함에 따라 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 값은 증가하며,  $\alpha$ 의 값이 0.1에서 0.2로, 0.2에서 0.3으로……0.8에서 0.9로

可變 두께를 갖는 直交異方性 平行四邊形 板의 自由振動 解析

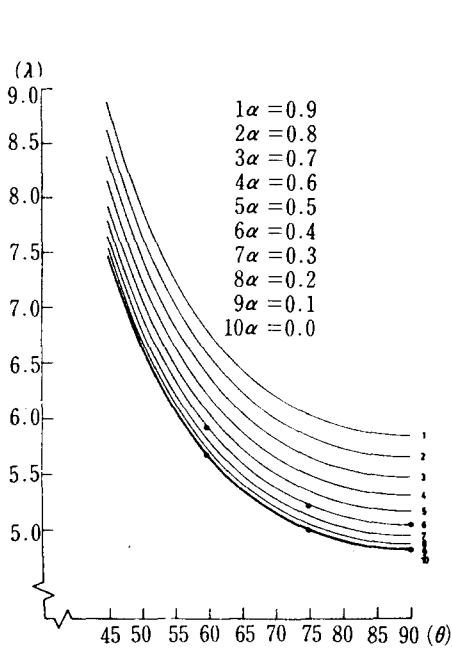


Fig. 5a.  $\gamma=1.0$ , 1st mode

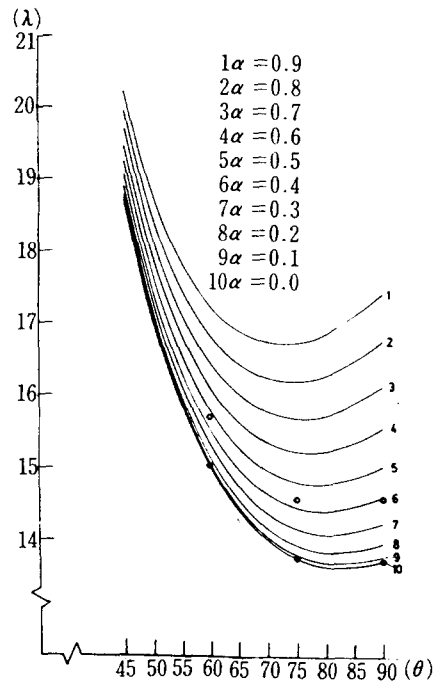


Fig. 5b.  $\gamma=1.0$ , 2nd mode

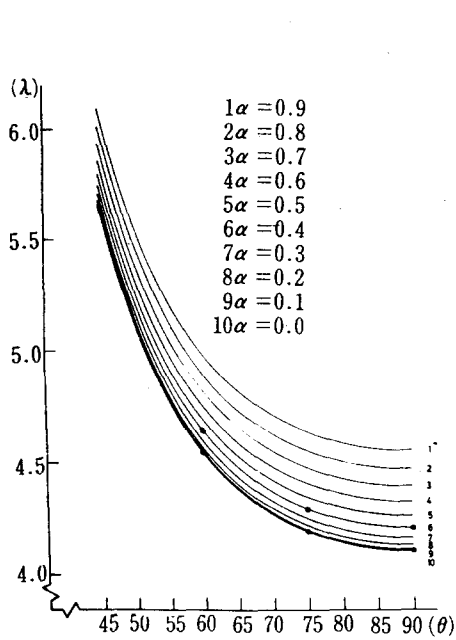


Fig. 5c.  $\gamma=0.5$ , 1st mode

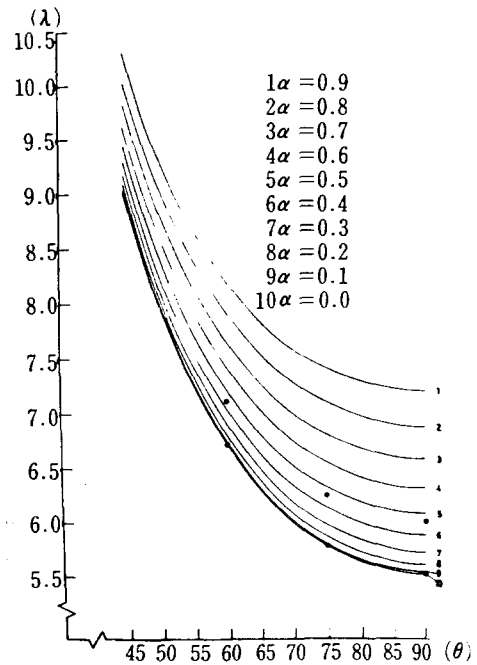


Fig. 5d.  $\gamma=0.5$ , 2nd mode

Fig. 5. Dimensionless frequency parameter of orthotropic parallelogramic plates with variable thickness for skew angles.

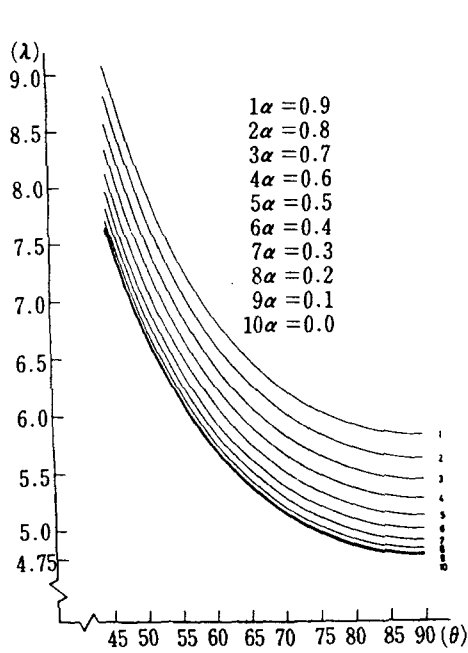


Fig. 6a.  $\gamma=1.0$ , 1st mode

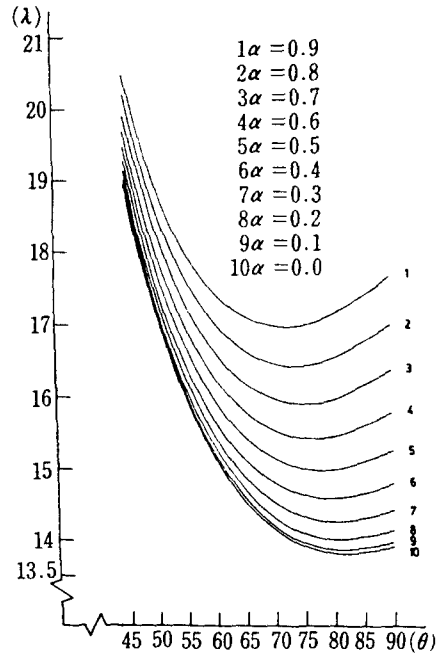


Fig. 6b.  $\gamma=1.0$ , 2nd mode

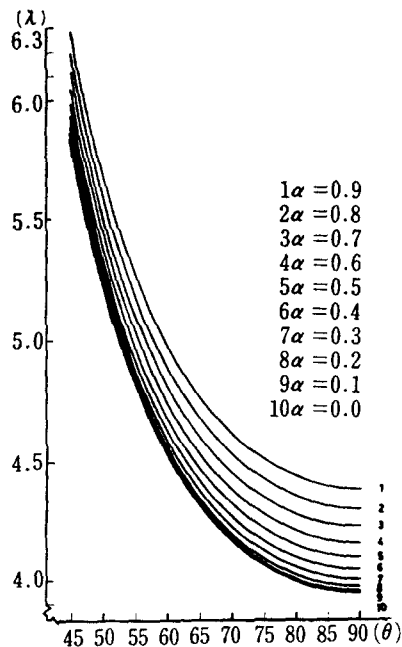


Fig. 6c.  $\gamma=0.5$ , 1st mode

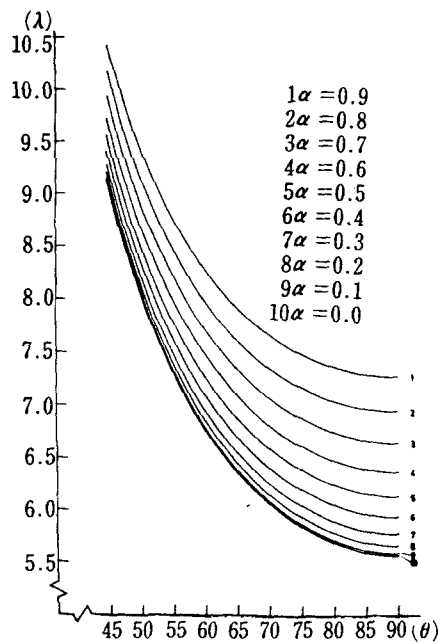


Fig. 6d.  $\gamma=0.5$ , 2nd mode

Fig. 6. Dimensionless frequency parameter of parallelogramic GFRP plats with variable thickness for skew angles.



증가함에 의한  $\lambda$  값의 증가분을 서로 비교해 볼 때 같은  $\alpha$ 의 증가분이지만 후자로 갈수록 증분이 더 클 수 있으며 등방성 재료의 경우에도 같은 효과가 있다. 그리고 두께 변화계수  $\alpha$ 가 무차원 고유진동수  $\lambda$  값에 미치는 영향은 형상비가 0.5일 때가 1.0일 때보다 작은 경향을 보이고 있다. 즉 임의의 스튜각에 있어서 형상비가 0.5에서 1.0으로 변화할 때 동일한 두께변화의 매개변수에 대한 무차원 고유진동수  $\lambda$  값은 형상비가 0.5일 때가 1.0일 때보다 더 작은 변화를 보이고 있다.

Fig. 6b와 Fig. 6d는 형상비가 1.0 및 0.5일 때 제 2형을 나타내고 있다. 형상비가 1.0일 때, 스튜각에 대한  $\lambda$  값의 경향은 등방성에서의 같은 경향을 보이는데  $90^\circ$ 로 접근함에 있어 더 큰 기울기로 증가함을 보여준다. 형상비가 0.5일 때는 스튜각에 대한  $\lambda$  값의 변화는 등방성의 경우와 같은 경향을 보이고 있고  $\alpha$ 가  $\lambda$ 에 미치는 영향은 제1형과 같은 경향을 나타내고 있다.

## 요 약

등방성 및 직교이방성 재료의 4면이 고정되고, 가변 두께를 갖는 평행사변형 판의 진동해석을 위한 프로그램을 작성하여 그 신뢰성을 확인한 다음 유리수지 일반강화 예폭시 FRP의 판에 대한 고유진동수의 변화를 고찰한 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 형상비에 관계없이 스튜각이 증가함에 따라 제 1형 진동인 경우에는 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 값은 감소하고 있다.
- 2) 형상비가 작을수록 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 값은 작고, 동일한 스튜각에서 두께 변화계수  $\alpha$ 가 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있었다.
- 3) 등방성 및 직교이방성 재료에 있어서 각각의 특성값의 차이에 의한 절대적인 무차원 고유진동수  $\lambda$ 의 값은 다르지만 스튜각의 변화에 대한 무차원 고유진동수 변화의 경향성은 유사함을 알았다.
- 4) 재료 특성값이 주어졌을 때 본 연구에서 작성

한 프로그램을 이용하면 4면이 모두 고정된 등방성 및 GFRP와 같은 직교이방성 평행사변형 판의 진동해석에 유용하게 이용되리라 생각된다.

## 참 고 문 헌

1. Ambartsumyan, S. A. (1970) : Theory of anisotropic plates. technomic publication, progress in materials science series, Vol. 11, 8-18.
2. Robert M. Jones (1975) : Mechanics of composite materials. McGraw Hill, 239-279.
3. 林毅(1982) : 複合材料工學. 日本技連出版社, 522-530.
4. Kaul, R. K. and V. Cadambe (1956) : The natural frequencies of thin skew plates. the aeronautical quarterly, Vol. 7, 337-352.
5. Hasegawa, M. (1957) : Vibration of clamped parallelogramic isotropic flat plates. Journal of the aeronautical science, Vol. 24, 145-146.
6. Durvasula, S. (1969) : Natural frequencies and modes of clamped skew plates. AIAA Journal, Vol. 7, No. 6, 1164-1167.
7. Kumar, K. and K. A. V. Pandalai (1970) : Free vibration of orthotropic skew plates. Studies in structural mechanics. Hoff's 65th anniversary volume, Stenford Univ., Stenford. Calif., 219-241.
8. Dokainish, M. A. and K. Kumar (1974) : Vibrations of orthotropic parallelogramic plates with variable thickness. AIAA Journal, Vol. 11, No. 12.
9. Rudolph Szilard (1974) : Theory and analysis of plates, classical and numerical methods. prentice hall, 212-373.
10. Leissa, A. W. (1969) : Vibration of plates, NASA SP-160.
11. Brebbia, C. A. (1980) : The boundary element method for engineers. Pemtech press, 19-25.