

## Cowell 방법에 의한 인공위성의 동경반경의 변화\*

신 종섭\*\* · 박 재우 · 최 규홍

연세대학교 천문기상학과

(1986년 5월 13일 받음; 1986년 6월 25일 수리)

### Variation of Radius Vector of an Artificial Satellite by Cowell's Method

Jong-Seob Shin, Jae-Woo Park and Kyu Hong Choi

Department of Astronomy and Meteorology, Yonsei University

(Received May 13, 1986; Accepted June 25, 1986)

#### 요 약

인공위성이 원궤도를 유지하도록 초기궤도 요소를 주고, 섭동요소들에 의한 동경 반경의 변화를 계산하였다. 위성의 궤도에 영향을 미치는 섭동 요소로는 지구의 비대칭 potential, 달과 태양의 인력을 고려하였다. 계산결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 위성의 궤도 경사각이  $0^\circ$  일 때,  $J_2$  항은 전혀 섭동을 일으키지 않는다.
- 2) 이 경우에는 tesseral harmonics 만이 큰 섭동을 나타내며 영년 변화가 나타난다.
- 3) 기타의 다른 섭동은 비교적 작지만 주기성을 갖는다.

#### Abstract

Variation of radius vector was computed by Cowell's method. Perturbations due to the Sun, moon, and earth's asymmetrical potential are considered. We summarize our results as follows:

- i)  $J_2$  term does not affect the equatorial orbit.
- ii) Large perturbation and secular variation on the above orbit are caused by tesseral harmonics.
- iii) The other perturbations have small effect and periodicity.

---

\* Yonsei University Observatory Contribution No. 42.

\*\* 현 천문우주과학연구소 연구원

## I. 서 론

최초의 인공위성이 발사된 1957년부터 1970년대 초반까지, 인공위성 추적으로부터 얻는 위성궤도에 관한 자료를 토대로 지구의 모양에 대한 모델을 만드는 연구가 진행되었다. 1958년 미국의 Vanguard I호 위성의 궤도자료를 가지고 연구한 결과, 지구는 마치도 서양배 모양으로 생겼다는 것을 확인하였다(King-Hele 1983). 이에 따라 지구의 모양을 구체적으로 연구하기 시작하였다(O'Keefe *et al.* 1959, Kozai 1961, 1962).

태양과 달의 섭동력은 중요하고, 아주 복잡한 식으로 나타내게 된다.

이러한 여러 가지의 섭동력이 인공위성의 동경반경에 어떠한 영향을 미치는가를 고찰하는 문제는 기본적인, 중요한 문제이기도 하다.

이 논문에서는 인공위성이 받는 여러 가지의 섭동력 중에서 지구의 비대칭 포텐셜에 의한 섭동력을 고려하여 Cowell 방법을 이용해서 인공위성의 동경반경의 변화를 계산하였다. 이들의 섭동요소로부터 각각의 섭동이 어떻게 영향을 미치는가를 고찰해 보기로 한다.

## II. 기본 방정식

인공위성이 받는 섭동력은 지구의 비대칭에 의한 섭동력, 달, 태양, 행성에 의한 중력, 태양의 복사압, 지구의 대기에 의한 저항력 등이 주된 요소이다. 이들 중 가장 큰 섭동력은 지구의 비대칭에 의한 힘이다(Shrivastava 1978). 태양에 의해서 받는 복사압은 작지만 무시할 만한 양은 아니며, 특히 통신위성에는 큰 영향을 미치는 요소이다. 그러나 여기서는 고려하지 않는다. 지구의 대기에 의한 저항력은 200 km 이내에서 영향을 미치므로 우리가 여기서 취급한 모델은 고도 1,000 km이므로 무시하였다.

인공위성의 가속도는

$$\vec{r} = -GM_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} + \sum_{i=1}^2 GM_i \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_i}{|r_i|^3} \right) + \vec{a}_z + \vec{a}_t \quad \dots \dots \dots (1)$$

로 표시된다. 여기서  $M_{\oplus}$ 은 지구의 질량이고,  $G$ 는 중력상수,  $\vec{r}$ 은 지구중심에서 위성까지의 거리 벡터,  $i = 1$ 일 때는 태양,  $i = 2$ 일 때는 달을 표시하고,  $\vec{a}_z$ 는 지구의 포텐셜에 대한 Zonal harmonics 항을 포함한 가속도이고,  $\vec{a}_t$ 는 지구의 포텐셜에 대한 tesseral harmonics 항을 포함하는 가속도이다. (1)식에서 우변의 첫째항은 지구가 질점일 때의 인력에 의한 섭동 가속도이다.

$\vec{a}_z$ 와  $\vec{a}_t$ 을 구하기 위해, 먼저 지구의 중력 포텐셜  $V$ 의 일반적인 형태를 구해 보자.  
Hagihara(1962)에 의하면

$$V = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin \beta) \right] [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \dots\dots\dots (2)$$

으로 표현된다. 여기서  $a_e$ 는 지구의 적도반경이고,  $\lambda$ 는 경도,  $\beta$ 은 위도를 나타내며,  $C_{nm}$ 과  $S_{nm}$ 은 harmonics의 진폭을 나타내는 계수이며,  $P_n^m(\sin \beta)$ 는 associated Legendre 다항식이다.

가속도는 포텐셜의 gradient로 주어지므로

$$\vec{a}_z(r, \beta) + \vec{a}_t(r, \beta, \lambda) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \hat{E} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \beta} \hat{N} \dots\dots\dots (3)$$

와 같이 동경성분( $\hat{r}$ ), 적도 평면성분( $\hat{E}$ ), 극축성분( $\hat{N}$ )으로 표현된다.

각각의 섭동을 일으키는 요소에 대한 가속도를 구한 후에 섭동함수를 시간에 대하여 수치적분하면 위성의 속도와 위치를 계산할 수 있다.

### Ⅲ. 지구의 potential에 의한 섭동

지구는 일반적으로 말하면 구가 아니다. 따라서 임의의 위치에서의 점 질량이 갖는 potential은 일정치 않다. 그러므로 인공위성이 받는 가속도도 역시 변화한다. 또한, potential은 거리, 위도, 경도에 따라 변하므로 인공위성에 주어지는 섭동량도 지구상의 위치에 따라 다르다.

계수  $J_2$ 에 의한 인공위성의 동경반경의 변화는 궤도 경사각이  $0^\circ$ 일 때는 나타나지 않는다. 즉,  $i = 0^\circ$ 에서는  $J_2$ 는 섭동을 갖지 않는다.

그러나, 궤도 경사각이  $90^\circ$ 일 때는 원궤도로부터 최대로 3328.76 m 만큼 이탈한다. 여기서 동경반경의 섭동량( $\Delta r$ )은 지구 중심으로부터 위성까지의 거리에서  $a$ 를 뺀 값이다(그림 1).

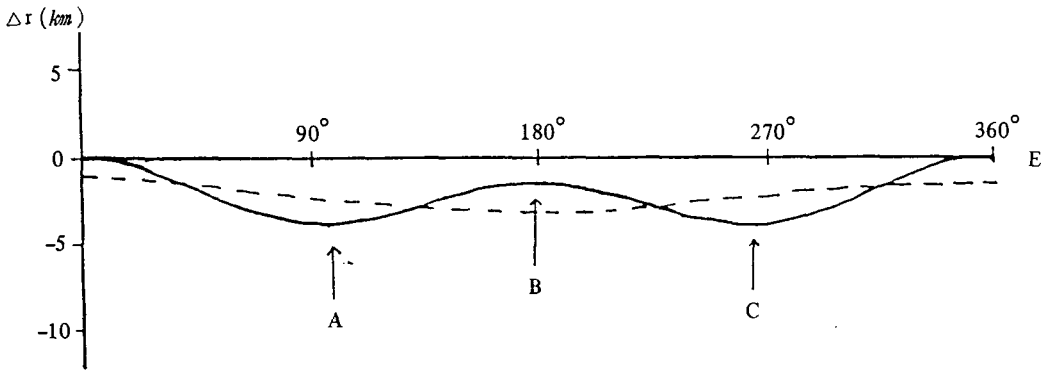


그림 1. 지구의 potential 계수  $J_2$  항에 의한 동경반경의 섭동량  $\Delta r$  이다. E는 이심근점거리각이다.

#### IV. 태양과 달에 의한 섭동

태양과 달에 의한 섭동은 지구 potential에 의한 상대적 위치에 따라 섭동을 받는 정도가 다르다.

그림 2부터 그림 4까지는 태양에 의한 섭동량을 나타내며, 그림 5부터 그림 7까지는 달에 의한 섭동량을 나타낸다. 이들 그림에서 횡축은 이심근점이각이고 종축은 동경반경의 섭동량이다. 위성이 원궤도를 유지할 때는 횡축과 동일한 직선으로 나타난다. 그러나  $\Delta r > 0$ 이면 거리가  $7.37 \times 10^6$  m보다 클 때이고,  $\Delta r < 0$ 이면 원궤도의 안쪽에 위치한 것을 말한다. 궤도 경사각이  $0^\circ$  일 때의 동경반경의 섭동량이  $10^\circ$  일 때의 동경반경의 섭동량보다 더 큰 이유는 태양이 지구 적도면에 대해서 남쪽에 위치하기 때문이다.  $i = 10^\circ$  일 때 태양과 인공위성과의 거리가  $i = 0^\circ$  일 때보다 더 가까워지므로 potential 이 증가한다. 달에 대해서도 이러한 현상은 태양의 경우와 마찬가지로 나타난다. 태양과 달의 각각의 경우에 섭동의 극대점이 이심근점이각  $E = 180^\circ$  부근에서 나타난다.

한편, 평균근점이각이  $M = 90^\circ$  일 때는 극대점이  $E = 270^\circ$  부근에서 나타나고 있다. 즉, 태양과 달이 위치한 장소보다 두 경우 모두  $M + 180^\circ$  부근에서 극대점이 나타난다.

태양과 달이 동시에 인공위성에 섭동을 미칠 때의 결과를 그림 8에 보였다. 이 그림에서도 횡축과 종축은 앞의 그림들과 같다. 그림 8에 나타난 섭동량은 태양과 달 각각에서 나타난 결과보다 훨씬 더 큼을 알 수 있는데, 이는 춘분점으로부터 태양과 달이 모두  $270^\circ$  부근에 놓여 있으므로 각각의 섭동량이 합쳐져서 나타났기 때문이다.

태양과 달에 의한 섭동의 결과를 바탕으로 인공위성의 궤도를 그림 9와 그림 10에 그렸다.

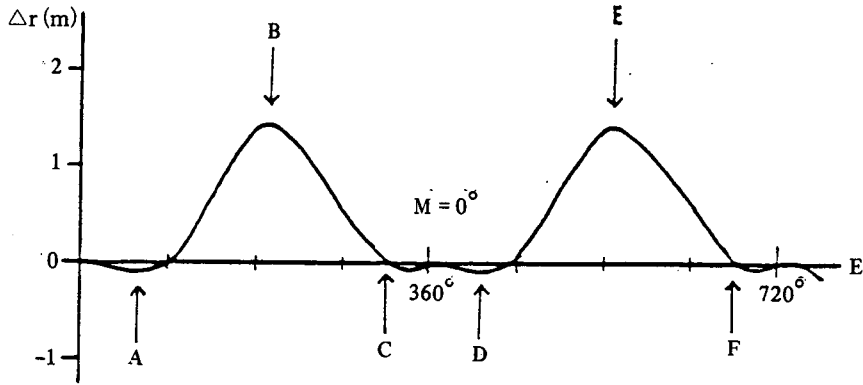


그림 2a. 태양에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0, i = 0^\circ, M = 0^\circ$ ).

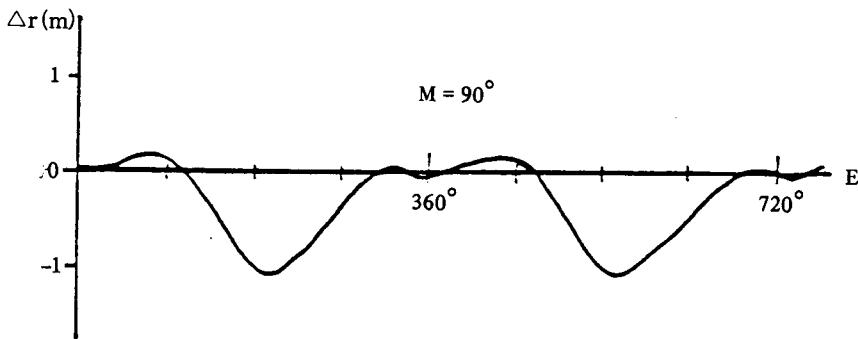


그림 2b. 태양에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0, i = 0^\circ, M = 90^\circ$ ).

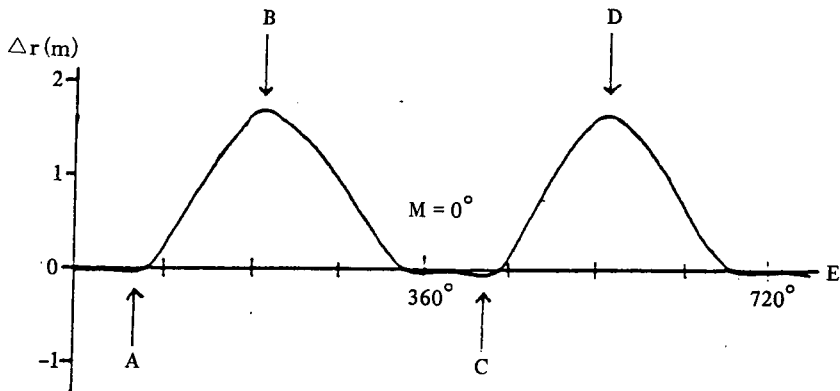


그림 3a. 태양에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0, i = 10^\circ, M = 0^\circ$ ).

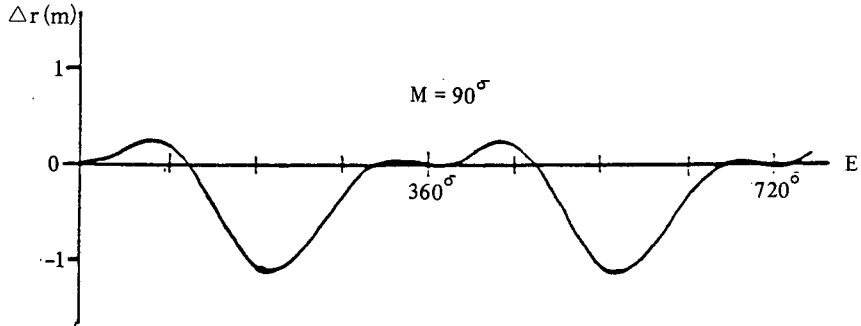


그림 3b. 태양에 의한 동경 반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 10^\circ$ ,  $M = 90^\circ$ )

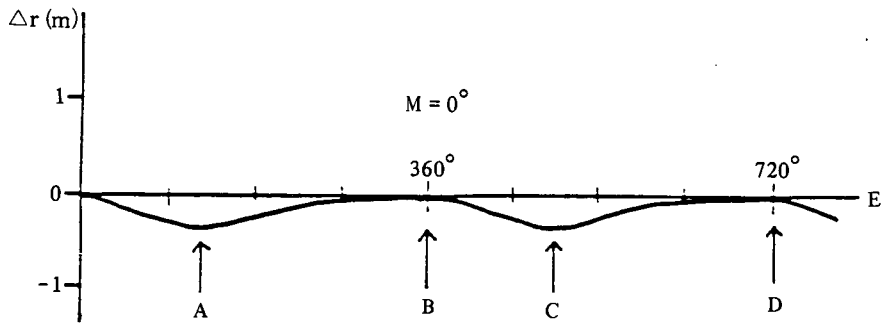


그림 4a. 태양에 의한 동경 반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ )

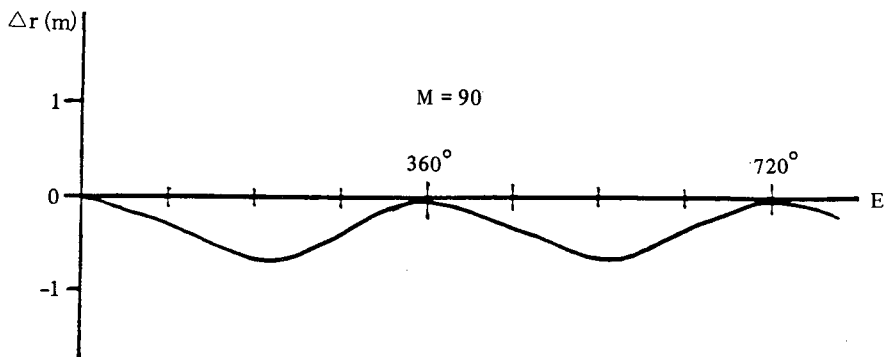


그림 4b. 태양에 의한 동경 반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $M = 90^\circ$ )

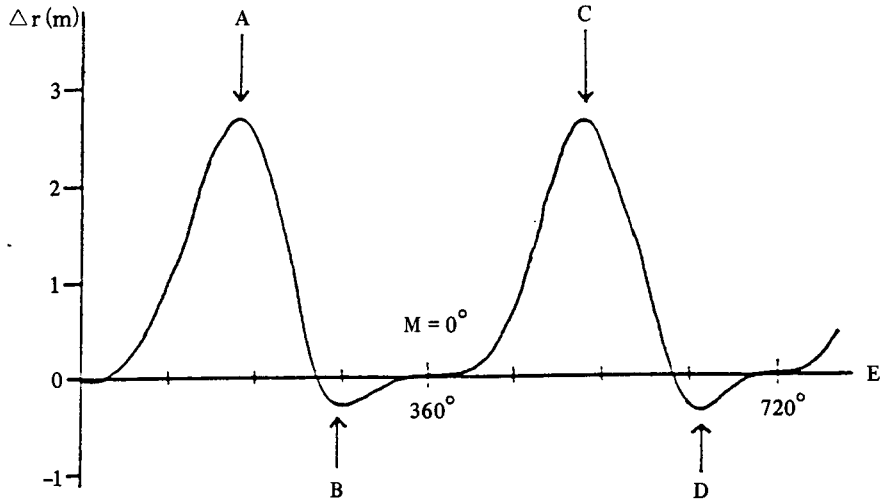


그림 5a. 달에 의한 동경반경의 섭동량( $e = 0, i = 0^\circ, M = 0^\circ$ )

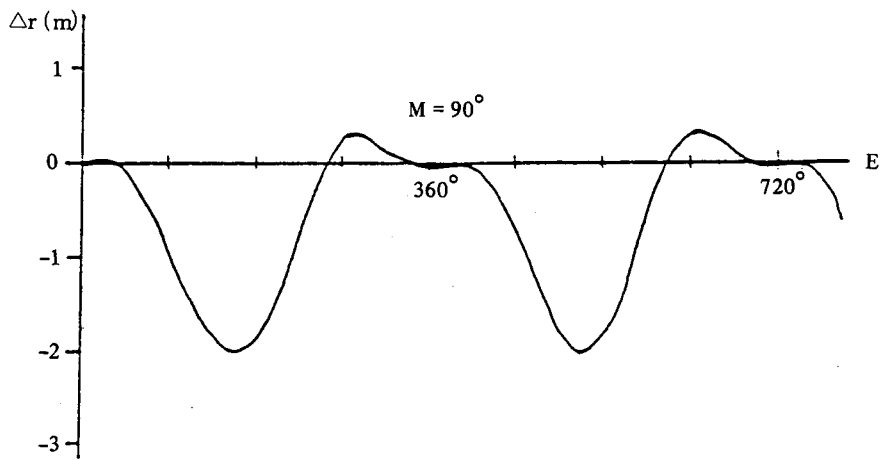


그림 5b. 달에 의한 동경반경의 섭동량( $e = 0, i = 0^\circ, M = 90^\circ$ )

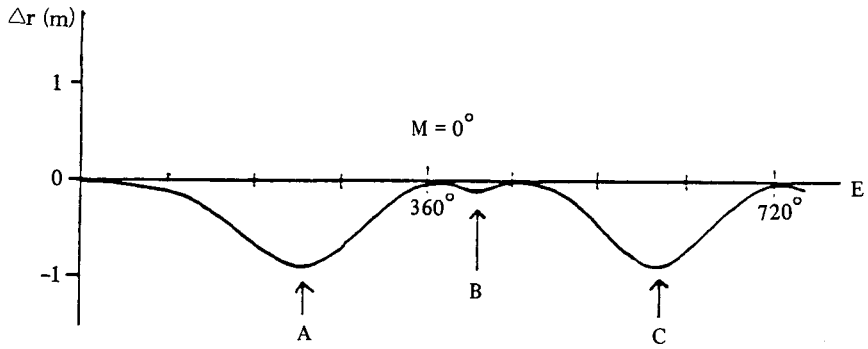


그림 6a. 달에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 10^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ )

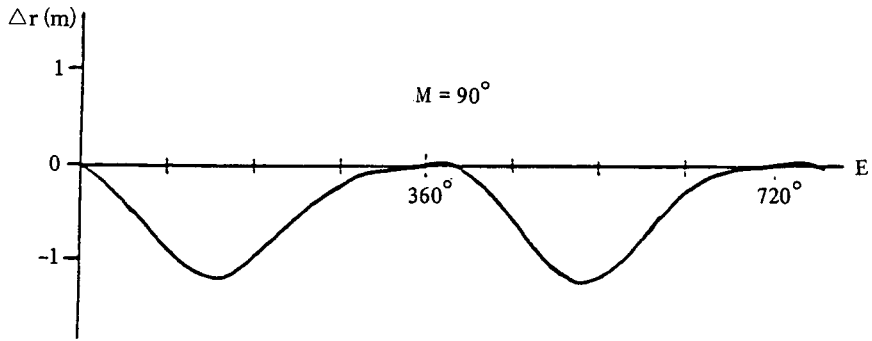


그림 6b. 달에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 10^\circ$ ,  $M = 90^\circ$ )

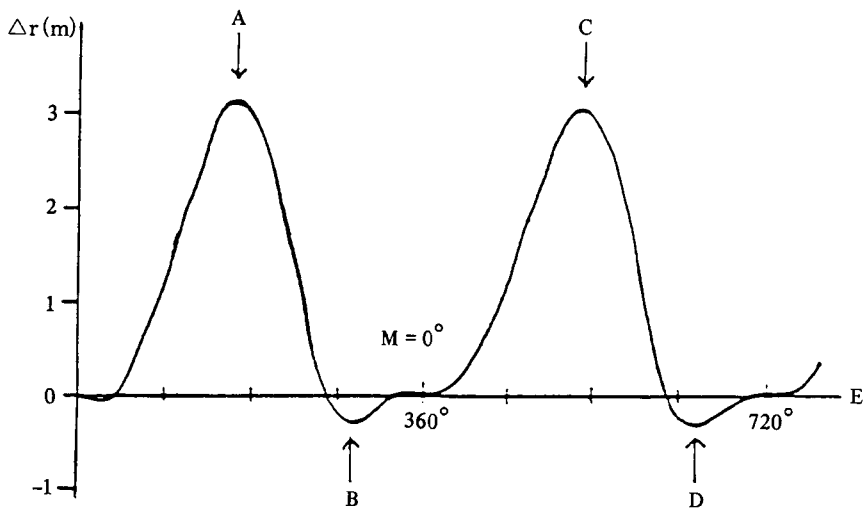


그림 7a. 달에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ )



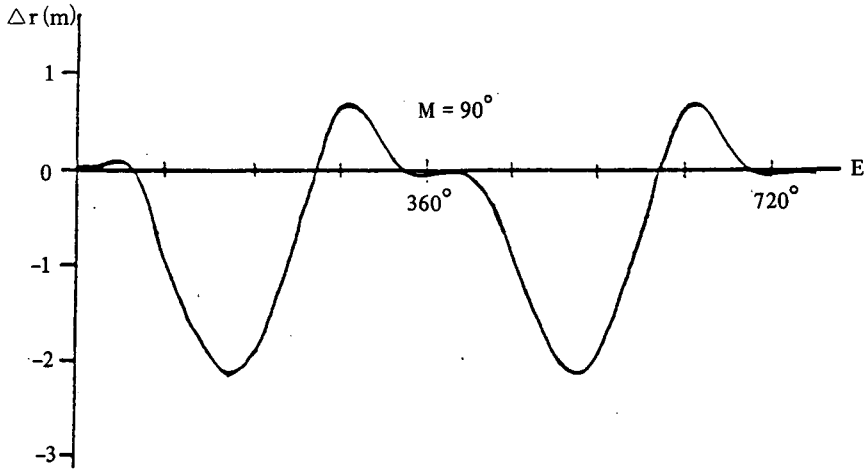


그림 7b. 달에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0, i = 90^\circ, M = 90^\circ$ )

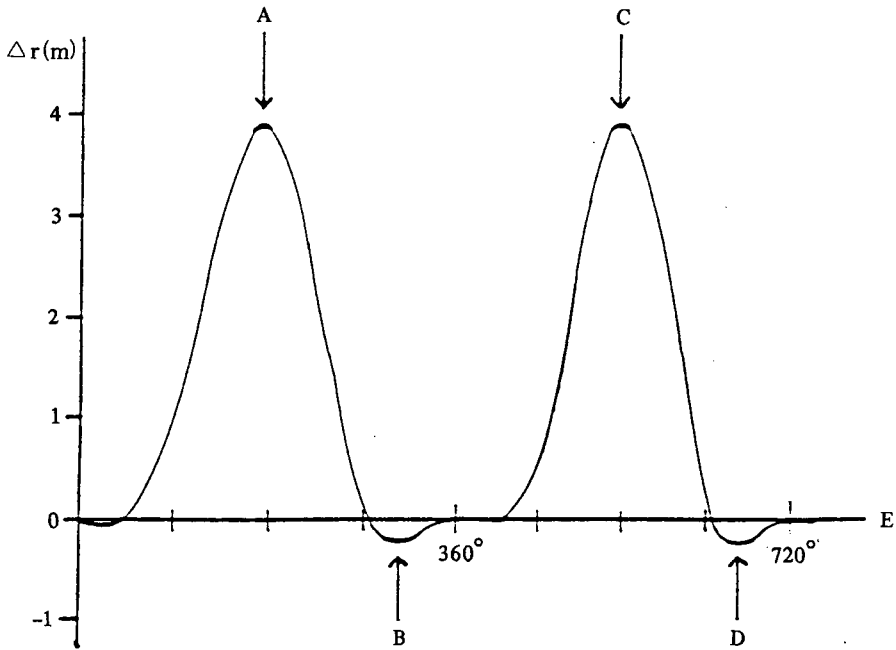


그림 8. 태양과 달에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0, i = 0^\circ, M = 0^\circ$ )

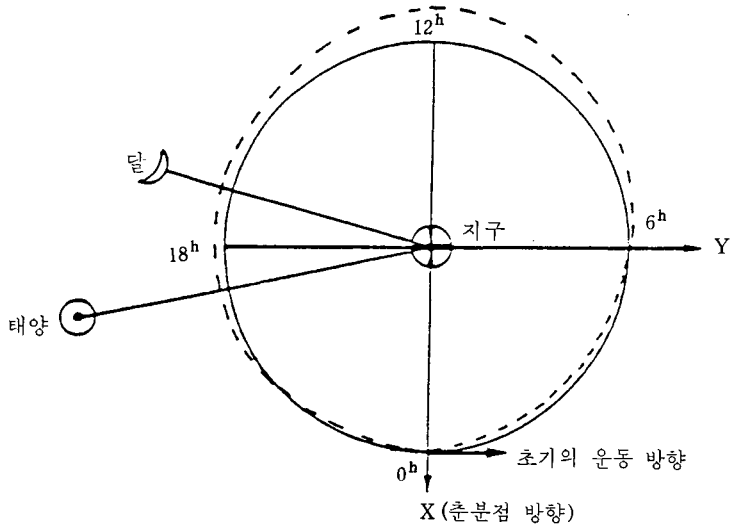


그림 9.  $M = 0^\circ$  일 때, 태양과 달의 섭동에 의한 위성의 궤도변화(점선)와 섭동이 없을 때의 궤도(실선)

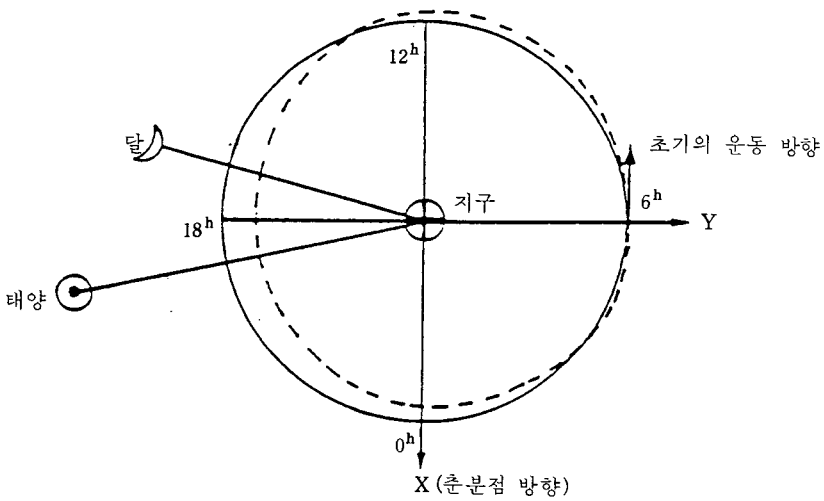


그림 10.  $M = 90^\circ$  일 때, 태양과 달의 섭동에 의한 위성의 궤도변화(점선)와 섭동이 없을 때의 궤도(실선)

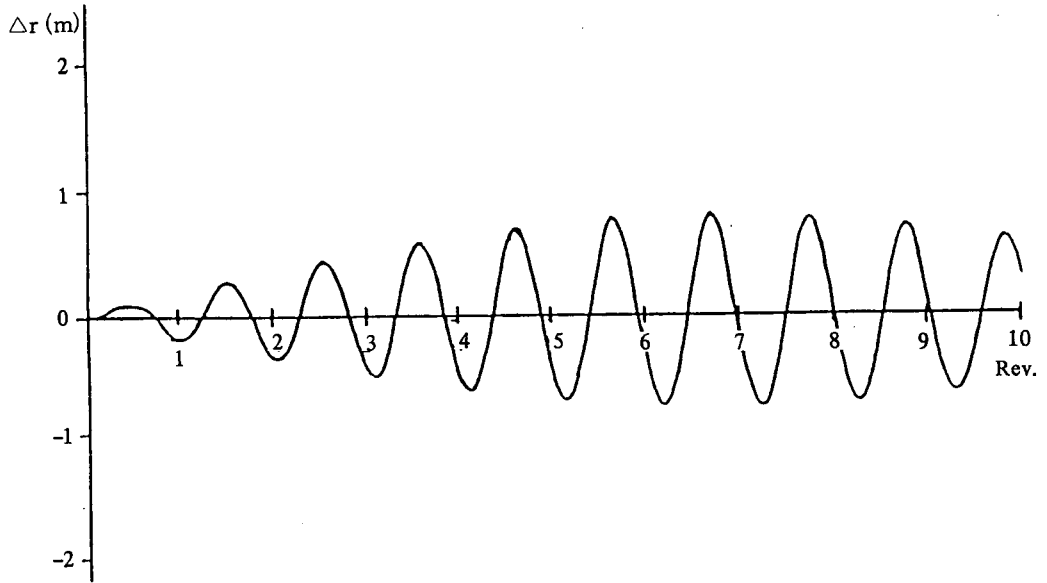


그림 11. 지구, 태양, 달에 의한 동경반경의 섭동량 ( $e = 0$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ )

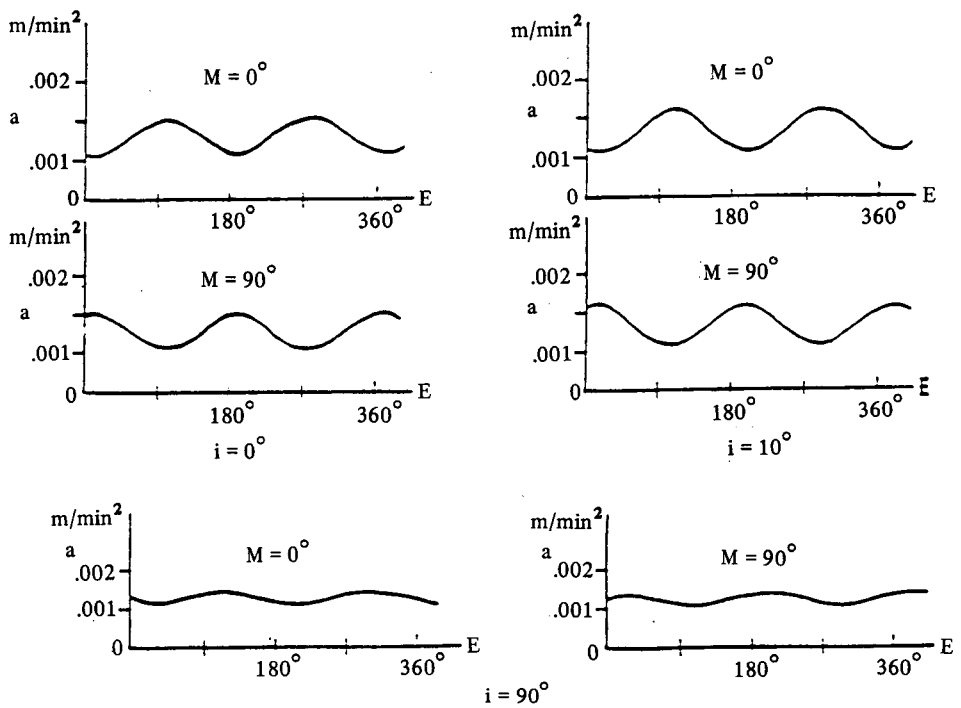


그림 12. 태양에 의한 가속도의 변화

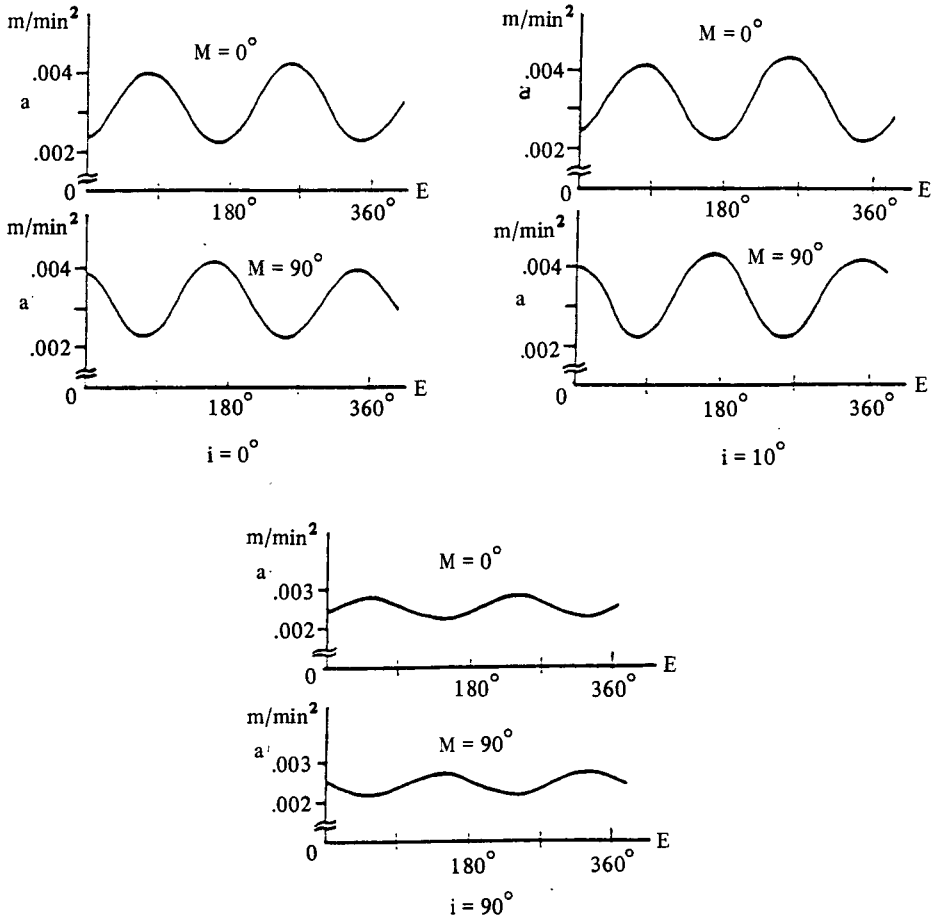


그림 13. 달에 의한 가속도의 변화

이 그림으로부터 우리는  $M = 0^\circ$  일 때는 출발점이 근지점이 되며  $M = 90^\circ$  일 때는 출발점이 원지점이 된다는 것을 알 수 있다.

## V. 지구 potential, 태양, 달에 의한 섭동

그림 11은 지구의 비대칭 potential( $J_2, J_3, J_4$  항을 포함)에 의한 섭동과 태양과 달의 섭동을 모두 고려했을 때의 운동을 나타낸 것이다. 이 그림에서 보면 최대 섭동이 6회전과 7회전 사이에서 나타나는데, 그 크기는  $+812.80$  m이다. 이 그림에서 횡축은 회전 수를 나타내고 종

축은 섭동량을 나타낸다. 여기서 특이한 현상으로 영년 변화가 나타남을 볼 수 있는데, 이러한 영년 변화는 앞의 그림에서는 보이지 않았던 현상이다. 특히  $J_2$ 에 의한 섭동에서도 나타나지 않았다. 그러므로 영년 변화는  $J_3$ 와  $J_4$ 에 의해서 나타나는 것임을 알 수 있다.

## VI. 토의와 결론

태양과 달의 인력에 의한 섭동량을 나타낸 그림 2부터 그림 7을 살펴보면 섭동량의 극대가 인공위성의 출발점으로부터  $M=0^\circ$  일 때는  $E=180^\circ$  부근에서 나타나며,  $M=90^\circ$  일 때는  $E=90^\circ$  부근에서 나타난다. 그러므로 우리는 섭동량의 극대점은 출발지점에 관계 없이 항상 일정한 지점에서 원궤도의 바깥 방향으로 최대 섭동이 나타남을 알 수 있다. 즉, 최대 섭동은 천체의 인력 방향과는  $90^\circ$ 의 위상차를 가지고 나타나는데, 가속도의 변화를 보이는 그림 12와 그림 13으로부터 이러한 현상을 이해할 수 있다. 가속도가 최소인 곳에서 섭동량은 극대를 나타낸다.

또, 한 가지의 특징은 태양과 달의 인력에 의한 섭동에서, 인공위성이 1 주기를 돌아 다시 제 위치로 돌아올 때, 그 부근에서 인공위성의 경로가 굴곡을 이루는 것을 볼 수 있다. 이러한 현상은 태양과 달이 지구의 적도 평면상에 있지 않기 때문이다. 이는  $i=90^\circ$ 에서는 이러한 현상이 나타나지 않으나,  $i=0^\circ$ 와  $i=10^\circ$ 에서는 굴곡 현상이 나타나는 것을 보면 이해할 수 있다.

앞에서 살펴본 일련의 결과를 바탕으로 지구의 포텐셜에 의한 섭동과 태양과 달에 의한 섭동으로 인한 인공위성의 동경 반경이 변화하는 현상에 대하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 첫째,  $J_2$  항은 인공위성의 궤도면이 적도면과 동일할 때는 전혀 섭동을 일으키지 않는다.
- 둘째, 이 경우에는 tesseral harmonics 만이 큰 섭동력을 가지며 영년 변화가 나타난다.
- 셋째, 그 외의 다른 섭동력은 주기성을 나타낸다.

## 참고 문헌

- Fehlberg, E. 1968, *NASA TR R-287*.
- Hagihara, Y. 1962, *Astron. J.*, **67**, 108.
- King-Hele, D. G. 1983, *Observing Earth Satellites* (MacMillan; London), pp. 146-153.
- Kozai, Y. 1961, *Astron. J.*, **66**, 355.
- Kozai, Y. 1962, *Astron. J.*, **67**, 446.
- O'Keefe, J. A., Eckels, A., and Squires, R. K. 1959, *Astron. J.*, **64**, 245.
- Shrivastava, S. K. 1978, *J. Spacecraft and Rocket*, **15**, 67.