<講　　座>

計算 水理學：模型의 數値解析(Ⅱ)

李　　吉　　成*

<기호> (Notation)

1절(初期 境界値 문제의 L^2 공간 이론) 기호.

B : Banach 空間(space)

A : 線型 微分 演算子(상수 계수)

$|u| = \sqrt{(\sum_{l=1}^{p} |u^{(l)}|^2)}$: Euclidean 노름(norm)

$\bar{u}$: u의 Fourier Integral Transform

k : thermal conductivity

ρ : 密度

c : 比熱(specific Reat)

$\bar{C}$: 상대 연산자(dual operator)

I : 流入量

O : 流出量

S : 저류량

v_e : 人工 粘性계수(artificial viscosity)

2절(매트릭스 安定解析) 기호

x : 벡터 $\varepsilon \mathbb{C}^p$

A : 매트릭스 $\varepsilon \mathbb{C}_{p\times p}$

$\rho(A)$: 스펙트럼 반경(spectral radius)

* : 共軛轉置 행렬(conjugate transpose)

$\alpha_1, \cdots \alpha_p, \gamma_j$: 고유치(eigenvalue)

θ : 일반화 Lax-Fredrich 해법의 媒介變數

ν : 動 粘性계수

U, L : 임의의 대표적 속도와 길이

1절. 初期 境界値 問題의 L^2 空間이론
(L^2 Theory of Initial Boundary Value Problems)

이전까지 다루던 문제는

$$\begin{cases} u_t = Au, & 0 \le t \le T \\ u(x,0) = f(x), & x = (x_1, \cdots x_d) \end{cases}$$

이다. 이 때 u는 $u(x,t) = (u^{(1)}(x,t), \cdots, u^{(p)}(x,t))^T$ 이고 A는 선형 미분 연산자로서 공간變數 x의 함수이다. 또한 문제가 Banach 空間 B에서 適切하였다. 여기서는 A를 상수 계수를 가진 선형 미분 연산자로 제한하고 함수 공간은 L^2 형태로 한다.

(1) 순수한 初期値 問題(Pure Initial Value Problems) ; $L^2(-\infty, \infty)$

이 경우의 함수 공간은 다음의 노름(norm)을 갖는 모든 벡터 함수 $u(x)$의 공간이다 :

$$\|u\|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1, \cdots, x_d)|^2 dx_1 \cdots dx_d < \infty$$

여기서 $|u|$는 "Euclidean 노름"이다. 즉,

$$|u| = \sqrt{\sum_{l=1}^{p} |u^{(l)}|^2}.$$

① 適切性(properly posedness)

다음과 같은 $u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(p)})^T$의 연립 偏微分 方程式을 생각하자.

$$\begin{cases} \partial/\partial t \ u(x,t) = Au(x,t) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}1) \\ u(x,0) : \text{주어짐}, & x = (x_1, \cdots, x_d) \end{cases}$$

A는 상수 계수를 가진 선형 편미분 연산자로 $p\times p$의 매트릭스 $P(\partial/\partial x)$이다. 그리고 $P(\partial/\partial x)$의 각 성분은 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_d$로 구성된 多項式이다.

이제 $\bar{u}(w,t)$를 解 $u(x,t)$의 Fourier Integral Transform(이하 FIT)이라고 하자. 그러면 $u(x,t) = (2\pi)^{-d/2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(w,t) \ e^{i(w,x)} dw$

따라서 식 (1-1)의 좌변은

$$\partial/\partial t \ u(x,t) = (2\pi)^{-d/2} \int \partial/\partial t \bar{u}(w,t) e^{i(w,x)} dw \cdots (1\text{-}2)$$

이고, 우변은

$$Au(x,t) = (2\pi)^{-d/2} \int P(\partial/\partial x_1, \cdots \partial/\partial x_d) \bar{u}(w,t) e^{i(w_1 x_1 + \cdots + w_d x_d)} dw$$
$$= (2\pi)^{-d/2} \int P(iw) \bar{u}(w,t) e^{i(w,x)} dw \cdots (1\text{-}3)$$

식 (1-2)와 식 (1-3)을 식 (1-1)에 대입하면,

* 서울大學校 土木工學科 助敎授(工博)

$$(2\pi)^{-d/2}\int[\partial/\partial t, \bar{u}(w,t) - P(iw)\ u(w,t)]$$
$$e^{i(w,t)}dw = 0$$

즉 벡터 $[\bar{u}(w)]$의 逆 FIT는 0이 된다. FIT는 等長寫像(isometry)이기 때문에 $\|\bar{u}(w)\| = \|u(x)\| = 0$. 그러므로

$$\partial/\partial t\bar{u}(w,t) = P(iw)\bar{u}(w,t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}4)$$

식 (1-4)는 명시적(explicitly)으로 풀려서

$$\bar{u}(w,t) = e^{tP(iw)}\ \bar{u}(w,0)$$

를 해로 가지며 이 때,

$$\bar{u}(w,0) = (2\pi)^{-d/2}\int u(x,0)\ e^{-i(w,x)}dx$$

이고

$$u(x,t) = (2\pi)^{-d/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tP(iw)}u(w,0)e^{i(w,x)}dw \cdots (1\text{-}5)$$

解 (1-5)를 가지고 실제로 식 (1-1)의 適切性을 생각해 보자. 適切함에 대한 첫째 조건은 眞의 解 $E_0(t)$의 정의역이 L^2 空間에서 稠密하다는 것이다. 이 조건은 $\bar{u}(w,0)$가 "compact support"를 가질 때마다 식 (1-5)의 적분이 확실히 존재하기 때문에 만족된다. 그리고 초기치의 집합 $u(x,0)$에 대한 FIT $u(w,0)$가 "compact support"를 가지면 L^2 空間에서 稠密하다는 사실이 알려져 있다.

適切性에 대한 두번 째 조건은 $\{E(t)\ ;\ 0\leq t\leq T\}$가 一樣有界라는 것이다. $T : L^2\rightarrow L^2$를 선형 연산자라고 하고 雙代(dual) 空間에서의 상대 연산자를 $\bar{T}$로 놓자. 이 때 $\bar{T}$는 $\bar{T}\bar{u} = \overline{T_u}$를 만족하는 연산자이다. 그러면

$$\|\bar{T}\| = \sup_{\bar{u}\neq 0}\frac{\|\bar{T}\bar{u}\|}{\|\bar{u}\|} \equiv \sup_{\bar{u}\neq 0}\frac{\|\overline{T_u}\|}{\|\bar{u}\|} = \sup_{u\neq 0}\frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \|T\|$$

이므로 식 (1-1)은 $\{E(t)\ ;\ 0\leq t\leq T\}$가 一樣有界라는 점을 適切性에 대한 필요충분 조건으로 갖는다. $\bar{E}(t)$를 알기 위하여 임의의 $\bar{u}(w,0)$를 (εL^2) 선택하자. 그러면

$$\bar{E}(t)\ \bar{u}(w,0) = \overline{E(t)u(x,0)} = \overline{u(x,t)} = \bar{u}(w,t)$$
$$= e^{tP(iw)}\bar{u}(w,0)$$

그러므로 $\|E(t)\| = \|\bar{E}(t)\| = \sup_w|e^{tP(iw)}|$

여기서 우변은 매트릭스에 대한 노름으로 Euclidean 노름이다. 즉 M이 $p\times p$ 매트릭스이면

$$|M| = \sup_{0\neq y\in C^p}|My|/|y|,\quad |y| \equiv \surd(\sum_{j=1}^{p}|y_j|^2).$$

결론적으로 식(1-1)의 適切性에 대한 필요충분 조건은 $\{|e^{tP(iw)}|\ ;\ -\infty<w<\infty,\ 0\leq t\leq T\}$가 一樣有界라는 것이다.

예로서 열 에너지 방정식을 非粘性, 非壓縮性 유체에 대하여 생각하자.

$$\begin{cases} u_t = \sigma u_{xx}, & \sigma\equiv k/(\rho c)>0,\ 0\leq t\leq T \\ u(x,0) : \text{주어진}, & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

이 문제는 x와 u의 차원이 모두 1이다. 그리고 미분연산자는 $\sigma\partial^2/\partial x^2$이므로

$$P(iw) = \sigma(iw)^2 = -\sigma w^2$$

適切性에 대한 필요충분 조건은

$$\sup_{\substack{-\infty<w<\infty\\ 0\leq t\leq T}}|e^{tP(iw)}| = \sup_{\substack{-\infty<w<\infty\\ 0\leq t\leq T}} e^{-t\sigma w^2}$$

이 一樣有界라는 것이다.

위의 식은 $t>0$인 경우 분명히 有界이다. 그러나 $T\leq t\leq 0$이라면 $\sup_{-\infty<w<\infty} e^{-t\sigma w^2}$이 어떤 $t<0$라도 非有界(unbounded)이다.

② 安定性(stability)

다음과 같은 2 준위(level)의 유한 차분 해법을 생각하자.

$$B_1v^{n+1} = B_0v^n\ ;\ n=0,1,2\cdots$$

여기서 유한 차분 연산자 B_0와 B_1은 다음의 형태를 갖는다 :

$$B_lv(x) = \sum_{\beta\in N_l} B_l^\beta T^\beta v(x)\ ;\ l=0,1\ \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}6)$$

B_l^β는 상수의 $p\times p$ 매트릭스로서 $k\equiv\Delta t$의 함수이다($h\equiv\Delta x = g(\Delta t)$로 정의하면 Δt만의 함수이다). 그리고 T^β는 "translation" 연산자로서 점 x에서의 v값을 인접한 점에서의 값으로 나타내게 된다.

$$T^\beta v(x) = v(x+\beta h),\quad x+\beta h\equiv(x_1+\beta_1h_1,\cdots,$$
$$x_d+\beta_dh_d)$$

가정된 사항은 위의 유한 차분 해법으로 해를 구할 수 있다는 것이므로

$$v^{n+}{}_1 = C(k)v^n,\quad C(k) = B_1(k)^{-1}B_0(k)$$

이다.

여기서 안정성에 대한 필요충분 조건은 다음과 같은 $K>0$와 $\tau>0$가 존재한다는 것이다.

$$\|C(k)^n\|\leq K,\quad \forall 0<k<\tau,\quad 0\leq nk\leq T.$$

또한 $\|C^n\| = \|\bar{C}^n\| = \|\bar{C}(k)^n\|\leq K$가 필요충분 조건이라는 것이 雙對 연산자(dual operator) $\bar{C}$로부터 형성된다. 이 때

$$\bar{C} = \overline{(B_1)^{-1}B_0} = \overline{(B_1)^{-1}}\cdot\overline{B_0} = (\bar{B}_1)^{-1}\bar{B}_0$$

식 (1-6)의 B_l을 $(l=0,1)$ 알기 위하여 $\bar{v}(\varepsilon L^2)$를 택하자. 그러면

$$\bar{B}_l\bar{v}(w) = \overline{B_lv(x)} = \overline{\sum_{\beta\in N_l} B_l^\beta T^\beta v(x)}$$
$$= \sum_{\beta\in N_l}\overline{B_l^\beta T^\beta v(x)} = \sum_{\beta\in Nl}(2\pi)^{-d/2}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} B_l^\beta\ T^\beta v(x)\ e^{-i(w,x)}dx$$
$$= \sum_{\beta\in N_l} B_l^\beta(2\pi)^{-d/2}\int_{-\infty}^{\infty} v(x+\beta h)\ e^{-i(w,x)}dx$$
$$= \sum_{\beta\in N_l} B_l^\beta(2\pi)^{-d/2}\int_{-\infty}^{\infty} v(y)e^{-i(w,y-\beta h)}dy$$
$$= \sum_{\beta\in N_l} B_l^\beta\ e^{i(w,\beta h)}[(2\pi)^{-d/2}\int_{-\infty}^{\infty} v(y)e^{-i(w,y)}dy]$$
$$= [\sum_{\beta\in N_l} B_l^\beta\ e^{i(w,\beta h)}]\bar{v}(w) \equiv H_l\bar{v}(w)$$

그러므로 $\bar{C}^n = [(\bar{B}_1)^{-1}\bar{B}_0]^n = [(H_1)^{-1}H_0]^n \equiv G^n$이고 G

(k,w)는 $p\times p$ 매트릭스로서 "amplication 매트릭스"라고 부른다. $p=1$인 경우 G는 스칼라이고 "amplication factor"라고 부른다. 또한 $\|C^n\|=\|\bar{C}(k)^n\|=\sup_w|G(k,w)^n|$을 얻을 수 있다.

정리 i)

유한 차분 해법 $v^{n+1}=C(k)v^n$이 安定할 필요충분 조건은, 다음을 만족하는 $K>0$, $\tau>0$가 존재하는 경우이다.

$$|G(k,w)^n|\leq K,\ \forall 0<k<\tau,\ 0\leq nk\leq T,$$
$$-\infty<w<\infty$$

H_l의 정의에서 $\xi_j\equiv w_jh_j$로 놓음으로써 $e^{i(w,\beta h)}=e^{i(\xi,\beta)}$가 되고 이는 2π의 주기를 가진 ξ의 함수이다. 그러므로, 다음의 정리가 성립한다.

정리 ii)

유한 차분 해법이 安定할 필요충분 조건은 다음을 만족하는 $K>0$, $\tau>0$가 존재하는 것이다.

$$|G(k,\xi)^n|\leq K,\ \forall 0<k<\tau,\ -\pi\leq\xi\leq\pi,\ 0\leq nk\leq T$$

그리고 $|G^n|=|G|^n$이므로 위의 조건은 다시 $|G(k,\xi)|\leq 1\forall|\xi|\leq\pi$가 된다.

이후로는 위에서 기술한 안정조건을 가지고 실제 문제들에 적용하여 보자.

(2) 有限差分解法(Finite Difference Schemes)

① 抛物型 예제(Parobolic PDE)

$$\begin{cases}u_t=\sigma u_{xx},\ t\geq 0,\ \sigma>0\\ u(x,0)=f(x),\ -\infty<x<\infty\end{cases}$$

i) 양해법(epxlicit scheme)

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n),\quad \lambda=\sigma k/h^2$$

이 때 H_0, H_1, G 등은 스칼라(scalars)가 된다. 즉 $H_1=1$이므로

$$G\equiv(H_1)^{-1}H_0=H_0$$
$$=1+\lambda(e^{i\xi}-2+e^{-i\xi})$$
$$=1+2\lambda(\cos\xi-1)\quad\cdots\cdots\cdots(1\text{-}7)$$

범위가 $0\leq\lambda\leq\lambda_{\max}$로 주어지는 λ값에 대한 수치 해석적 안정의 필요충분 조건은

$$|G(\lambda,\xi)^n|\leq K\ \forall|\xi|\leq\pi\ ;\ n=0,1,2\cdots$$

를 만족하는 K값이 존재하는 것이다. 이를 다시 쓰면 $|G^n|=|G|^n$인 사실로부터

$$|G(\lambda,\xi)|\leq 1\ \forall|\xi|\leq\pi$$

이다. 즉 식 (1-7)에 적용하면

$$|G|\equiv|1+2\lambda(\cos\xi-1)|\leq 1\forall|\xi|\leq\pi$$

이므로

$$-1\leq 1+2\lambda(\cos\xi-1)\leq 1\forall|\xi|\leq\pi\quad\cdots\cdots\cdots(1\text{-}8)$$

이 된다.

식 (1-8)의 오른쪽 부등호는 당연히 성립하고, 왼쪽 부등호는

$$\lambda(1-\cos\xi)\leq 1\forall|\xi|\leq\pi$$

이다. $(1-\cos\xi)$는 구간 $[0,2]$에서 변하므로 $|\xi|\leq\pi$인 모든 ξ에 대하여 성립하는 λ값은,

$$\lambda\leq\lambda_{\max}\equiv 1/2$$

가 된다.

ii) 음해법(implicit scheme)

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda(v_{j+1}^{n+1}-2v_j^{n+1}+v_{j-1}^{n+1})$$

즉 $(1+2\lambda)v_j^{n+1}-\lambda(_{j+1}^{n+1}+v_{j-1}^{n+1})=v_j^n$

그러므로 $H_0=1$이 된다. 또한

$$G=(H_1)^{-1}(H_0)=(H_1)^{-1}$$
$$=[(1+2\lambda)-\lambda(e^{i\xi}+e^{-i\xi})]^{-1}$$
$$=[1+2\lambda(1-\cos\xi)]^{-1}$$

여기에서도 $0\leq\lambda\leq\lambda_{\max}$ 범위의 값에 대한 안정조건의 필요충분 조건은

$$|G(\lambda,\xi)|=|1/[1+2\lambda(1-\cos\xi)]|\leq 1\forall|\xi|\leq\pi$$

즉, $\lambda(1-\cos\xi)\geq 0$이 된다. 결국 위의 부등식은 $\lambda\geq 0$인 모든 값에 대하여 자동적으로 만족된다. 다시 말하여 열 전도식은 음해법에서 '조건없이' 안정(unconditionally stable) 하다.

일반적으로 열 전도 방정식은 다음의 유한 차분 구조를 갖는다.

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\theta\lambda(v_{j+1}^{n+1}-2v_j^{n+1}+v_{j-1}^{n+1})+(1-\theta)(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)$$

그리고 θ의 값에 따라 특정한 해법으로 분류된다.

$$\begin{cases}\theta=0:\text{陽解法}\\ \theta=1:\text{陰解法}\\ \theta=1/2:\text{Crank-Nicolson 解法}\end{cases}$$

iii) 中央 差分法(centered difference by Richardson)과 DuFort-Frankel의 해법

시간 미분항 u_t에 대한 local 中斷 오차를 개선하기 위하여, "leap-frog 기법"이라고 불리는 방법을 써서 시간 미분항과 공간 미분항 모두에 대하여 2次 精度를 가지는 해법으로 표현할 수 있다:

$$v_j^{n+1}-v_j^{n-1})/(2\Delta t)=\sigma(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-j}^n)/(\Delta x)^2$$
$$\therefore\ v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+2\lambda(v_{j-1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)$$

그러나 이 방법은 모든 λ값에 대하여 "조건없이 不安定"(unconditionally unstable)하다.

한편 Du Fort-Frankel은 Richardson의 공식을 변형하여 $2v_j^n$을 $(v_j^{n+1}+v_j^{n-1})$로 대치함으로써 3單位(3 time level)의 공식을 유도하였다:

$$(v_j^{n+1}-v_j^{n-1})/2\Delta x=\sigma(v_{j+1}^n-v_j^{n-1}-v_j^{n+1}+v_{j-1}^n)/(\Delta x)^2$$

이 Du Fort-Frankel의 leap-frog 방법은 "조건없는 안정성"을 가지면서 陽 해법의 이점을 유지하는 해법이다. 그러나 3單位의 공식은 초기線(initial line) 이외에도 다른 한 단계의 초기값을 필요로 하는 단점을 가

지고 있다.

② 雙曲型 예제 (Hyperbolic PDE)

다음과 같은 '운동학적 파동식' (kinematic wave equation)을 생각하자.

$$\begin{cases} u_t = au_x, & t \geq 0, \quad a \neq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

i) Euler 해법

$$v_j^{n+1} = v_j^n + (1/2)\lambda a(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n), \quad \lambda = k/h$$

그래서

$$G = 1 + 1/2\lambda a(e^{i\xi} - e^{-i\xi})$$
$$= 1 + i\lambda a \sin \xi$$

이 방법에서, $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ 인 λ에 대한 필요충분 조건은

$$|G(\lambda, \xi)| = |1 + i\lambda a \sin\xi| \leq 1 \forall |\xi| \leq \pi$$

가 된다. 그러나

$$|G(\lambda, \xi)|^2 = 1 + \lambda^2 a^2 \sin^2\xi > 1 \forall \lambda > 0, \quad 0 < |\xi| < \pi$$

이므로 Euler 방법은 '조건없이 불안정' 하다.

ii) Lax-Fredrich 해법

$$v_n^{n+1} = 1/2(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + 1/2\lambda a(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$
$$G = 1/2(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) + 1/2\lambda a(e^{i\xi} - e^{-i\xi})$$
$$= \cos \xi + i\lambda a \sin \xi$$
$$|G(\lambda, \xi)|^2 = \cos^2\xi + \lambda^2 a^2 \sin^2\xi \leq 1$$

이기 위한 필요충분 조건은 $\lambda^2 a^2 \leq 1$

즉 $\lambda \equiv k/h \leq 1/|a|$ ………CFL 조건

만일 위의 CFL 조건 (Courant-Fredrich-Lewy)이 만족된다면 $\Delta x \to 0$ 일 때 특정한 값 λ에 대하여 $v \to u$ 가 된다. 즉 수렴하게 된다. 그리고 CFL 조건은, 수치적 종속 영역이 解析的 (analytic) 종속 영역내에 있어야 수치해가 안정하다는 점을 말하고 있다. 여기서 무차원 매개변수 $a\lambda$는 Courant 數라고 불리운다.

iii) 한 방향 (one-sided Euler 해법)

오른쪽 점에서의 근사해 v_{j+1}^n 을 이용하여 v_j^{n+1} 을 나타내면

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda a(v_{j+1}^n - v_j^n)$$
$$G = 1 + \lambda a(e^{i\xi} - 1)$$
$$= (1 - \lambda a) + \lambda a(\cos \xi + i \sin \xi)$$

그래서

$$|G^2| \leq 1$$

이기 위한 필요충분 조건은

$$\lambda \leq 1/|a| \text{………CFL 조건}$$

이고, 이 방법은 경계 부분에서 유용하게 쓰인다. 그러나 경계점에서의 불안정성은 경계내의 영역으로 반영되어 전체적인 안정성이 깨지게 되므로 반드시 안정조건을 만족시켜야 한다. 주시해야 할 점은 왼쪽 값을 이용한 (left-sided) Euler 해법은 "upwind differencing" 형이라고 불리운다는 것이다.

iv) Lax-Wendroff 해법 (1960)

만일 u가 정확한 해이고 충분한 미분계수가 존재한다고 하면 Taylor 급수에 의하여

$$u(x, \quad t+k) = u + ku_t + k^2/2u_{tt} + O(k^3)$$

이고, 문제로부터 $u_t = au_x$ 이므로

$$u_{tt} = (u_t)_t = (au_x)_x = au_{xt} = (au_t)_x = (a^2u_x)_x = a^2u_{xx}$$

가 된다. 그러므로

$$u(x, t+k) = u + kau_x + k^2/2 \quad a^2u_{xx} + O(k^3)$$

으로 쓸 수 있다. 공간에 대한 미분항을 중앙차분으로 전개시키면

$$u_x = 1/2h(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(h^2)$$
$$u_{xx} = 1/h^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + O(h^2)$$

이들을 대입하면

$$u_j^{n+1} = u_j^n + 1/2\lambda a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + 1/2\lambda^2 a^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + O(kh^2) + O(k^2h^2) + O(k^3)$$

이 된다. u_j^n을 격자에서의 함수 (grid function) v_j^n으로 바꾸어 쓰면

$$v_j^{n+1} = v_j^n + 1/2\lambda a(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + 1/2\lambda^2 a^2(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

이 방법을 유도하는 과정으로부터 공간편미분항에 대한 精度가 2차임을 알 수 있다. 또한 쌍곡형 편미분식이 포물형으로 바뀌어진다.

$$G = 1 + 1/2\lambda a(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) + 1/2\lambda^2 a^2(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi})$$
$$= 1 + \lambda a \, i \sin \xi + \lambda^2 a^2(\cos \xi - 1)$$

로 쓰여지고 이로부터 안정에 대한 필요충분 조건은 $\lambda \leq 1/|a|$ 이다.

v) (오른쪽 값을 이용한) Box 해법 (음해법)

$$1/2[(v_j^{n+1} - v_j^n)/\Delta t + (v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n)/\Delta t]$$
$$= a/2[(v_{j+1}^n - v_j^n)/\Delta x + (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1})/\Delta x]$$

이를 다시 쓰면

$$v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1} + \lambda a(v_j^{n+1} - v_{j+1}^{n+1}) = v_{j+1}^n + v_j^n + \lambda a(v_{j+1}^n - v_j^n)$$

이다. 이 때 $|G|^2 = 1$ (증명 생략)이므로 이 방법은 '조건없이 안정' (unconditionally stable)하다.

일반적으로는,

$$\phi(v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n) + (1 - \phi)(v_j^{n+1} - v_j^n)$$
$$= \lambda a[\theta(v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) + (1 - \theta)(v_{j+1}^n - v_j^n)]$$

으로 쓸 수 있다. 이는

$\phi = 1/2$ 일 때 Preissmann 해법 (1961)

$\phi = 1/2, \quad \theta = 1/2$ 일 때 Box 해법

으로 나누어진다.

(3) 初期 境界值問題 (Initial Boundary Value Problems) ; $L^2(0, a)$

空間 $L^2(0, a)$에서 정의된 모든 벡터函數 $u(x)$를 생각하자. 즉 $0 \leq x_i \leq a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, d$ 이고 노름은 다음과

같이 정의된다.

$$\|u\|^2 \equiv \int_0^a |u(x)|^2 dx = \int_0^{a_1} \cdots\cdots \int_0^{a_d} \int |u(x_1, \cdots, x_d)|^2 dx_1 \cdots dx_d < \infty$$

여기서 $|u| = \sqrt{(\sum_{j=1}^{p} |u^{(j)}|^2)}$ 으로 Euclidean 노름이다. 유한 차분 해법을 모든 $x \ \varepsilon[0, a]$에 대하여 확장시키기 위하여 $u(x) \ \varepsilon L^2(0, a)$의 가 성분에 주기성을 부여하여 $-\infty < x < \infty$ 의 정의역을 갖도록 한다. 즉 $L^2(0, a)$를, a를 주기로 하는 모든 함수들의 空間으로 본다는 것이다:

$$u(x), \quad -\infty < x < \infty \quad x\|u\|^2 = \int_0^a |u|^2 dx < \infty$$

순수한 초기치 문제에서 안정에 관하여 기술하였듯이 이 경우에도 다음의 정리가 제시된다(증명 생략).

유한 차분 해법이 안정하기 위한 필요충분조건은 다음을 만족하는 $K>0$ 와 $\tau>0$ 가 존재하는 것이다.

$$|G(k, \xi)^n| \leq K \forall -\pi \leq \xi \leq \pi \,;\, 0<k<\tau, \quad 0 \leq nk \leq T$$

이 때에 k와 $\xi(=w_j h_j : w$ 가 實數인 경우 혹은 $=2\pi w_j h_j / a_j, : w$ 가 整數인 경우)의 함수인 초기 경계치 문제의 "amplication" 매트릭스 G는 순수한 초기치 문제에서와 똑같은 구조를 갖고 있음을 알 수 있다. 그러므로 순수한 초기치 문제에서 언급된, 안정에 대한 모든 결과는 이 경우에도 역시 적용된다.

① Upwind Differencing

流體 動力學 문제를 푸는 과정에서 접하게 되는 주요 亂點은 非線型 實質(substantial) 微分項으로, 이는 Navier-Stokes 식이나 energy 식에서 나타난다. 그 예로 1차원의 渦度 전달식(vorticity tramsport eq.)을 비점성 유체에 대하여 생각하자:

$$D\omega/Dt \equiv \partial\omega/\partial t + u\partial\omega/\partial x = \nu\nabla^2\omega = 0, \quad u>0$$

이를 시간 미분항에 대하여서는 前方(forward) 차분법을 쓰고 공간 미분항에 대하여다 後方(backward) 차분법을 써서 나타내자.

$$(\omega_j^{n+1} - \omega_j^n)/k + u(\omega_j^n - \omega_{j-1}^n)/h = 0$$

위의 "upwind differencing" 해법은 "transportive property"을 가졌다. 즉 "변동"(perturbation)이 유체의 운동 방향으로만 전달된다. 만일 $C \equiv uk/h$가 1로 선택되면 정확한 해를 구하게 된다(C는 Courant 數/증명 생략)

첫 항과 마지막 항을 Taylor 급수로 전개하면

$$\omega_j^{n+1} = \omega_j^n + k\omega_t + k^2/2 \ \omega_{tt} + O(k^3)$$

$$\omega_{j-1}^n = w_j^n - h\omega_x + h^2/2 \ \omega_{xx} + O(h^3)$$

여기서 $\omega_{tt} = \partial/\partial t(-u\partial\omega/\partial x) = -u\partial/\partial x(\omega_t) = u^2\partial^2\omega/\partial x^2$ 이들을 차분식에 대입하고 k와 h의 1차항까지만 남기면(j, n은 생략됨)

$$\partial\omega/\partial t + u \ \partial\omega\partial x = \nu_e \ \omega_{xx}, \nu_e = uh(1-c)/2$$

이 때 우변의 항은 擴散 粘性力(diffusive viscous force)과 유사한 항이므로 ν_e를 "人工 粘性계수"(artificial viscosity)라고 한다. 이것의 역할은 수치해의 인공적인 감쇄(damping)을 일으키는 것이다. 한편 확산 계수(ν_e)가 음수라는 조건은 물리적으로 불가능하므로, 이는 수치해를 安定시키는 조건을 제시한다: $c \leq 1$. 그러나 양방향으로 전파되는 파동식은 보통 중앙 차분법을 쓴다.

② Muskingum 洪水 追跡

$$\begin{cases} \text{連續方程式}: I(\text{유입량}) - O(\text{유출량}) = dS/dt \cdots (1\text{-}9) \\ \text{貯留方程式}: S = KO + Kx(I-O) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}10a) \\ \qquad = K[xI + (1-x)O] \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}10b) \end{cases}$$

여기서 $\bar{x}=0.2$, $K \approx$ 유하시간이다. 연속방정식을 사다리꼴 법칙을 적용하여 차분화시키면

$$S_{n+1} - S_n = \Delta t[I_{n+1} + I_n]/2 - (O_{n+1} + O_n)/2]$$

또한 저류 방정식으로부터

$$S_{n+1} - S_n = K[x(I_{n+1} - I_n) + (1-x)(O_{n+1} - O_n)]$$

그러므로

$$O_{n+1} = C_0 \ I_{n+1} + C_1 I_n + C_2 O_n$$

이 된다. 여기서 $C_0 + C_1 + C_2 = 1$ 이다.

이제 $I = Q_j$, $O = Q_{j+1}$로 정의하고 그 사이의 하도에 대하여 생각하자. 그러면 Muskingum 방법은

$$Kd/dt[xQ_j + (1-x)Q_{j+1}] = Q_j - Q_{j+1} \text{ 과}$$

$$K[x(Q_j^{n+1} - Q_j^n) + (1-x)(Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n)] = \frac{\Delta t}{2}(Q_j^{n+1} + Q_j^n - Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n)$$

이 된다. 만일 $K = \Delta x/c$로 쓸 수 있다면 이 식은(일반화된) Box scheme에서 $\theta = 1/2$인 경우의 kinematic wave 식을 차분화시킨 것이다:

$$\partial Q/\partial t + c\partial Q/\partial x = 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}11)$$

그래서 특성 방향 $c = dx/dt$에 대한 특성방정식은 $dQ/dt = 0$이고 Riemann invariant는 $Q = \text{const.}$이다. 위의 식 (1-11)은 Seddon의 법칙 $c = dQ/dA = 1/B \ dQ/dy$를 사용하여 (kinemaic) 연속 방정식,

$$\partial Q/\partial x + B\partial y/\partial t = 0 \text{ 으로부터 유도된다.}$$

2절 매트릭스 安定解析(Matrix Stability Analysis)

(1) 安定에 관한 정리

$\mathbb{C}^p$에서 정의된 벡터 x의 "Euclidean 노름"을 $|x| = (\sum_{j=1}^{p} |\xi_j|^2)^{1/2}$로 정의하자. 또한 $\mathbb{C}_{p\times p}$에서 정의된 매트릭스 A의 "스펙트럼 노름"(spectral norm)을 위의 정의에 의하여

$$|A| = \sup_{x \neq 0} |Ax|/|x| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

로 표시하고 A의 "스펙트럼 반경"(spectral radius)을

$\rho(A)\equiv\max\{|\lambda|;\lambda,\ A$의 고유치(eigenvalue)$\}$로 나타내자. 그러면 $\rho^n(G)=\rho(G^n)\le|G^n|$임을 알 수 있다. (증명 생략) 이제 다음의 세 가지 정리에서 매트릭스 안정에 관한 조건들을 기술한다.

정리 i) : von Neumann 안정조건

이는 안정에 관한 필요 조건으로 다음을 만족하는 $K>0,\ \tau<0$가 존재할 때 성립한다.

$$\rho^n[G(k,\xi)]\le K\ \forall|\xi|\le\pi,\ 0<k<\tau,\ 0\le nk\le T$$

$C_{p\times p}$에서 정의된 매트릭스 A는, $AA^*=A^*A$일 때 (*: 共軛轉置 행렬, conjugate transpose) "正規행렬"이라고 불리운다. 예를들어 Hermition($A^*=A$), shew-hermition ($A^*=-A$); symmetric ($A^T=A$), skew-symmetric($A^T=-A$); diagonal 행렬 등이 정규행렬이다. 만일 G가 정규행렬이라면

$$\rho^n(G)\le|G^n|\le|G|^n=\rho^n(G)$$

가 성립하게 된다(증명 생략).

정리 ii) : $G(k,\xi)$가 정규행렬일 때

다음을 만족하는 $K>0,\ \tau<0$가 존재하면 이는 안정에 관한 필요충분 조건이 된다.

$$\rho^n[G(k,\xi)]\le K\ \forall|\xi|\le\pi,\ 0<k<\tau,\ 0\le nk\le T$$

만일 G가 k에 대하여 명시적으로 종속되어 있지 않고 $\lambda(=k/h$ 혹은 $k/h^2)$와 ξ에 의존한다면 위의 조건은 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$\rho^n[G(\lambda,\xi)]\le K\ \forall|\xi|\le\pi,\ 0\le\lambda\le\pi_{max},\ n=0,1,2\cdots$$

정리 iii) : $G=G(\lambda,\xi)$일 경우

안정에 대한 필요조건은

$$\rho[G(\lambda,\xi)]\le1\ \forall|\xi|\le\pi,\ 0\le\lambda\le\lambda_{max}$$

이고 만일 G가 정규행렬인 경우는 이 조건이 곧 필요충분 조건이 된다.

종종 $G=G(\lambda,\xi;A)$는 λ와 ξ에 종속된 스칼라 계수를 가진 (계수) 매트릭스 A의 다항식이다. 즉 $G=\sum_k C_kA^k$로 표시된다. 이 때 A의 고유치들을 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$라고 하면 Forbenius의 스펙트럼 寫像정리에 의하여 G의 고유치는 $\gamma_j\equiv\gamma_j(\lambda,\xi)=G(\lambda,\xi;\alpha_j),\ 1\le j\le p$이다. 그래서 정리 iii)의 조건은 다음과 동등하게 된다.

$$|\gamma_j|\equiv|G(\lambda,\xi;\alpha_j)|\le1\ \forall|\xi|\le\pi,\ 0\le\lambda\le\lambda_{max},\ 1\le j\le p$$

(2) 1차원 유한 차분 해법

① Lax-Fredrich 해법

편미분 식으로 $u_t=Au_x$를 생각하자. 이 때 $A\varepsilon C_{p\times p}$는 Hermitiam, 非特異(non-singular)이고 따라서 0이 아닌 실수의 고유치 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$를 갖는다(증명 생략). 그러면 매개변수 θ를 가진 일반화된 Lax-Fredrich 해법은

$$v_j^{n+1}=(1-\theta)v_j^n+\theta/2(v_{j+1}^n+v_{j-1}^n)+1/2\lambda A(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)$$

이 때 amplication matrix G는 $v_{j+\beta}$에 $e^{i\beta\xi}I$를 대입함으로써 얻어진다.

$$G=[(1-\theta)+\theta(e^{i\xi}+e^{-i\xi})/2]I+1/2\lambda(e^{i\xi}+e^{i\xi})A$$
$$=(1-\theta+\theta\cos\xi)I+i\lambda\sin\xi\cdot A$$

따라서

$$\gamma_j=1-\theta+\theta\cos\xi+i\lambda\alpha_j\sin\xi$$
$$=1-2\theta\sin^2(\xi/2)+2i\lambda\alpha_j\sin(\xi/2)\cos(\xi/2)$$

그러므로 $0\le\lambda\le\lambda_{max}$에 대하여 안정할 필요충분 조건은 $|\gamma_j|^2\le1,\ 1\le j\le p$이다. 이는 A의 다항식인 G도 역시 Hermitian이기 때문이다.

$$|\gamma_j|^2\equiv[1-2\theta\sin^2(\xi/2)]^2+4\lambda^2\alpha_j^2\sin^2(\xi/2)]\le1$$

즉, $\sin^2(\xi/2)[\lambda^2\alpha_j^2(1-\sin^2\xi/2)-\theta(1-\theta\sin^2\xi/2)]\le0$

다시, $\lambda^2\alpha_j^2\le\theta(1-\theta\sin^2\xi/2)/(1-\sin^2\xi/2)\ \forall0<\sin^2\xi/2\le1$ 이 때 우변은 $\sin^2\xi/2$의 증가함수이기 때문에

$$\lambda^2\alpha_j^2\le\theta\lim_{\sin^2\xi/2\to0}(1-\theta\sin^2\xi/2)/(1-\sin^2\xi/2)=\theta$$
$$\forall1\le j\le p$$

즉 $\lambda\le\sqrt{\theta}/\rho(A)$가 안정에 관한 필요충분 조건이 된다.

② Du Fort-Frankel 해법(1953)

분산 방정식 $u_t=\sigma u_{xx}$에 대한 수치해로서 Du Fort와 Frankel이 제시한 차분식의 適合性을 생각하자:

$$(v_j^{n+1}-v_j^{n-1})/(2k)=\sigma(v_{j+1}^n-v_j^{n-1}-v_j^{n-1}+v_{j-1}^n)/h^2$$

충분한 미분계수를 가진 함수 $u(x,t)\varepsilon C^{4,3}$를 Taylor 급수로 전개하여 위의 식에 대입하면

$$[u+ku_t+k^2/2u_{tt}+O(k^3)-u+ku_t-k^2/2u_{tt}-O(k^3)]/(2k)-\sigma[u+hu_x+h^2/2u_{xx}+h^3/6u_{xxx}+O(h^4)-u+ku_t-k^2/2u_{tt}-O(k^3)-u-ku_t-k^2/2u_{tt}-O(k^3)+u-hu_x+h^2/2u_{xx}-h^3/6u_{xxx}+O(h^4)]/h^2$$
$$=(u_t-\sigma u_{xx})+\sigma(k/h)^2u_{tt}+O(k^2)+O(h^2)+O(k^3/h^2)$$

이 때에 Δt가 Δx보다 빨리 0으로 간다는 점은 위의 해법이 적합하기 위한 필요충분 조건이 된다. 반면에 $\Delta t/\Delta x$가 고정된 값 β를 갖는다면 분산 방정식에 대하여 적합한 식이 되는 것이 아니라 쌍곡형 식, $u_t-\sigma u_{xx}+\sigma\beta^2u_{tt}=0$에 대하여 적합한 식이 된다.

$w_j^{n+1}=v_j^n$으로 정의함에 따라 위의 차분식을 동등한 2準位의 형태로 쓰면

$$(v_j^{n+1}-w_j^n)/(2k)=\sigma(v_{j+1}^n-w_j^n-v_j^{n+1}+v_{j-1}^n)/h^2$$

즉 $\begin{pmatrix}1+2\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_j^{n+1}\\w_j^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{j+1}^n\\w_{j+1}^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1-2\lambda\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_j^n\\w_j^n\end{pmatrix}$

$$+\begin{pmatrix}2\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{j-1}^n\\w_{j-1}^n\end{pmatrix}$$

이 된다($\lambda=\sigma k/h^2$). 그러므로 amplication 행렬은

$$G(\lambda,\xi)=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\lambda(e^{i\xi}+e^{-i\xi}) & 1-2\lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{4\lambda\cos\xi}{1+2\lambda} & \dfrac{1-2\lambda}{1+2\lambda}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

이 된다. 이 때 G의 고유치는 $|G-\gamma I|=0$의 근으로서

$$\gamma=(2\lambda\cos\xi\pm\sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\xi})/(1+2\lambda)$$

이고 모든 λ에 대하여 $|\gamma|\leq 1$ 임이 분명하다. 이렇게 함으로써 Du Fort-Frankel 해법의 안정성이 성립하게 된다.

(3) 2차원 유한 차분 해법

① Lax-Fredrich 해법

편미분 식 $u_t=Au_x+Bu_y$를 생각하자. 여기서 A, B는 Hermitian이다. $v^n_{j,l}\equiv v(j\Delta x, l\Delta y\,;\, n\Delta t)$로 정의함에 따라 $L-F$ 해법은 다음과 같이 된다.

$$v^{n+1}_{j,l}=(v^n_{j+1,l}+v^n_{j-1,l}+v^n_{j,l+1}+v^n_{j,l-1})/4$$
$$+1/2\lambda A(v^n_{j+1,l}-v^n_{j-1,l})+1/2\mu B(v^n_{j,l+1}-v^n_{j,l-1})$$
$$;\ \lambda\equiv\Delta t/\Delta x,\quad \mu=\Delta t/\Delta y$$

이 4점 해법은 1차의 精度를 가졌다.

amplication 행렬 G는

$$G=1/4(e^{i\xi}+e^{-i\xi}+e^{i\xi}+e^{-i\xi})I+1/2\lambda A(e^{i\xi}-e^{-i\xi})$$
$$+1/2\mu B(e^{i\eta}-e^{-i\eta})$$
$$=1/2(\cos\xi+\cos\eta)I+i(\lambda\ \sin\xi\cdot A+\mu\sin\eta\cdot B)$$
$$\equiv 1/2(\cos\xi+\cos\eta)I+i(\sin\xi\cdot\tilde{A}+\sin\eta\cdot\tilde{B})$$

이 때 A, B가 Hermitian일 경우, $L-F$ 해법은 다음의 조건을 안정에 관한 충분조건으로 한다(증명 생략).

$$\lambda^2\rho^2(A)+\mu^2\rho^2(B)\leq 1/2 \text{ 혹은 } \rho^2(A)+\rho^2(B)\leq 1/2$$

즉 $\Delta t\leq 1/[2\{\rho(A)/\Delta x\}^2+2\{\rho(B)/\Delta y\}^2]^{1/2}$

② Lax-wendroff 해법

다시 A, B가 Hermitian인 $u_t=Au_x+Bu_y$를 생각하자.

$$(u_{x,y})^n_{j,l}=1/_{(4\Delta x\Delta y)}(u^n_{j+1,l+1}-u^n_{j+1,l-1}-u^n_{j-1,l+1}$$
$$+u^n_{j-1,l-1})+O(\Delta x^2/\Delta y)+O(\Delta x^2)$$
$$+O(\Delta x\Delta y)+O(\Delta y^2)+O(\Delta y^2/\Delta x)$$

를 이용하여 구성된 차분식은

$$v^{n+1}_{j,l}=v^n_{j,l}+(\lambda/2)A(v^n_{j+1,l},-v^n_{j-1l,})+(\mu/2)B(v^n_{j,l+1}$$
$$-v^n_{j,l-1})+(\lambda^2/2)A^2(v^n_{j+1,l}-2v^n_{j,l}+v^n_{j-1,l})$$
$$+(\mu^2/2)B^2(v^n_{j,l+1}-2v^n_{j,l}+v^n_{j,l-1})$$
$$+(\lambda\mu/8)(AB+BA)(v^n_{j+1,l+1}-v^n_{j+1,l-1}$$
$$-v^n_{j-1,l+1}+v^n_{j-1,l-1})$$

이고 위의 9점 해법은 2차의 정도를 가졌다.

또한 amplication 행렬은 다음과 같다.

$$G=I+\lambda/2A(e^{i\xi}-e^{-i\xi})+\mu/2\ B(e^{i\eta}-e^{-i\eta})$$
$$+\lambda^2/2A^2(e^{i\xi}-2+e^{-i\xi})+\mu^2/2B(e^{i\eta}-2+e^{-i\eta})$$
$$+\lambda\mu/8(AB+BA)(e^{i\xi+i\eta}-e^{i\xi-i\eta}-e^{-i\xi+i\eta}+e^{-i\xi-i\eta})$$
$$=I+i(\lambda\sin\xi\cdot A+\mu\sin\eta\cdot B)+\lambda^2A^2(\cos\xi-1)$$
$$+\mu^2B^2(\cos\eta-1)-\lambda\mu/2(AB+BA)\sin\xi\sin\eta$$
$$\equiv I-\{1-\cos\xi)\tilde{A}^2+(1-\cos\eta)\tilde{B}^2+1/2\sin\xi\sin\eta$$
$$(\tilde{A}\tilde{B}+\tilde{B}\tilde{A})\}+i\{\sin\xi\cdot\tilde{A}+\sin\eta\cdot\tilde{B}\}$$

즉 A, B가 Hermitian인 경우,

$$\lambda^2\rho^2(A)+\mu^2\rho^2(B)\leq 1/4 \text{ 혹은 } \rho^2(A)+\rho^2(B)\leq 1/4$$

이면 다시 말하여

$$\Delta t\leq 1/2[\}\rho(A)/\Delta x\}^2+\{\rho(B)/\Delta y\}^2]^{1/2}$$

이면 안정한 해법이 된다(증명 생략). 이는 Lax-Fredrich 해법의 조건보다 강화된 규정이다(1975년도의 석사논문).

③ LeapFrog 해법

우선 $u_t=Au_x$에 대하여 2次의 精度를 가진 Leap Frog 유한 차분 식은

$$v^{n+1}_j=v^{n-1}_j+\lambda A(v^n_{j+1}-v^n_{j-1}),\quad \lambda=\Delta t/\Delta x$$

이 해법은 2단계의 시간 격자에 대한 초기 조건을 필요로 한다. 만일 A가 Hermitian이면 $\lambda<1/\rho(A)$가 안정에 대한 필요충분 조건이다. 2차원의 경우는 $u_t=Au_x+Bu_y$를 차분 근사하여

$$v^{n+1}_{j,l}=v^{n-1}_{j,l}+\lambda A(v^n_{j+1,l}-v^n_{j-1,l})+\mu B(v^n_{j,l+1}-v^n_{j,l-1})$$

만일 A, B가 Hermitian이면 $\rho(A)+\rho(B)\leq 1$이 안정조건이다. 주목할 것은 Courant 數, $C=1$이면 $u_{tt}=au_{xx}$에 대하여 정확한 해를 구하는 셈이다.

(4) 기초적인 응용 예제

① 흐름 함수—渦度 방법(Stream Function-Vorticity Method)

體力(body force)이 없는 경우, 비 압축성 점성 유체의 2차원 흐름은 무차원 운동량 방정식과 연속 방정식으로써 나타내진다.

$$u_t+uu_x+vu_y=-p_x+(u_{xx}+u_{yy})/Re,$$
$$v_t+uv_x+vv_y=-p_y+(v_{xx}+v_{yy})/Re,$$
$$u_x+v_y=0.\quad \text{여기서 } Re=UL/\nu \text{이다.}$$

위의 연립 방정식에서 종속 변수는 u, v, p이지만 $u=\phi_y$, $v=-\phi_x$로 정의되는 흐름 함수 ϕ와 $v_x-u_y=\omega$로 정의되는 渦度를 사용하는 것이 보다 편리하다. 그러면

$\phi_{xx}+\phi_{yy}=-\omega$와 와도 전달(vorticity transport) 방정식 : $\omega_t+\phi_y\omega_x-\phi_x\omega_y=(\omega_{xx}+\omega_{yy})/Re$가 구성된다. 분명히 Poisson식은 타원형이고 와도 방정식은 포물형이다. 이렇게 조합된(coupled) 방정식은 교대로(cyclically) 풀려야 하므로, 와도 방정식에서의 허용시간 간격(time step)이 증가하는 것은 흐름 함수의 수치 해석에서(ADI 혹은 SOR) 반복 계산 횟수를 늘림으로써 상쇄될 수 있다. 와도 방정식에서는 이류 가속도 항의 처리 방식에 주의하여야 한다. Reynolds數가 큰 경우에는 전방 혹은 후방 공간 차분에 대하여 u의 부호에 따라 Lelevier의 처리가 사용되어야 한다. 즉 "upwind-differencing" 이 적용되어야 한다.

理想流體의 운동과, 다른 변수의 전달 과정을 함께 고려하는 문제에서는 포물형과 쌍곡형의 편비분 식이 조합된 수학적 모형이 구성된다. 이로부터 발생되는 한가지 결과는, 두 개의 시간 상수(time constant)가 있으나 두 개의(혹은 그 이상의) 전달 과정이 동시에 계산되어져야 한다는 점이다.

② MAC (marker and cell) 방법

MAC 방법에서는 Navier-Stokes 식과 연속 방정식에 본래의 변수(u, v, p ; 2 차원에서)가 사용된다. 무차원 운동량 방정식에 대한 보존 법칙의 형태는

$$u_t+(u^2)_x+(uv)_y=-p_x+(u_{xx}+u_{yy})/Re$$

$$u_t+(uv)_x+(v^2)_y=-p_y+(v_{xx}+v_{yy})/Re.$$

위의 식을 미분하여 더하면 압력에 대한 Poisson 식이 얻어진다 :

$$\nabla^2 p=-[(u^2)_{xx}+2(uv)_{xy}+(v^2)_{yy}]-D_t+(D_{xx}+D_{yy})/Re$$

여기서 팽창(dilation) 항 $D\equiv u_x+u_y$ 는 連續體의 경우에 0 이다.

MAC 방법에서는 staggered net 구조가 쓰인다. "cell" 의 중심에서는 압력이 정의되고 "cell 의 경계를 따라서는 유속이 정의된다. 차분식은 다음과 같다.

$$(u^{n+1}_{i+1/2,j}-u^n_{i+1/2,j})/\Delta t+[(u^n_{i+1,j})^2-(u^n_{i,j})^2]/\Delta x$$
$$+[(uv)^n_{i+1/2,j+1/2}-(uv)^n_{i+1/2,j-1/2}]/\Delta y$$
$$=-(p^n_{i+1,j}-p^n_{i,j})/\Delta x+1/Re[(u^n_{i+3/2,j}-2u^n_{i+1/2,j}$$
$$+u^n_{i-1/2,j})/\Delta x^2+(u^n_{i+1/2,j+1}-2u^n_{i+1/2,j}$$
$$+u^n_{i+1/2,j-1})/\Delta y^2]$$

여기서

$$u^n_{i+1,j}=(u^n_{i+1/2,j}+u^n_{i+3/2,j})/2$$

그리고

$$(uv)^n_{i+1/2,j+1/2}=(u^n_{i+1/2,j}+u^n_{i+1/2,j+1})(v^n_{i+1,j+1/2}+v^n_{i,j+1/2})/4$$

이다. $v^{n+1}_{i,j+1/2}$ 에 대해서도 똑같은 형태의 식을 쓸 수 있다. 그리고 Poisson 식은 같은 형태의 차분 방법을 사용하되 $D^{n+1}_{i,j}=0$ 이다.

작은 표시(marker) 입자들의 위치를 따라서 그림으로써 "streak line" 의 양상을 알 수 있다. 즉 같은 곳에서 동일한 시간 간격으로 주입된 밝고 작은 입자들의 부유 상태를 순간적으로 사진 찍어 낼 수 있다. 각 입자들의 위치는 다음을 수치 적분하여 얻을 수 있다.

$$dr/dt=V(r,t),\ \ r(t_0)=r_0$$ ……입자 경로식

그러므로 $(x^{n+1}_p-x^n_p)/\Delta t=u_p$, $(y^{n+1}_p-y^n_p)/\Delta t=v_p$ 이때 속도를 계산하기 위하여 여러가지 보간법이 사용된다.