<講 座>

計算 水理學：模型의 數値解析(Ⅰ)

李 吉 成*

<기 호>(Notation)

Ω : 空間(space) R^d 에서의 정의역(domain)

$E_0(t)$: 線型 演算子

B_0, B_1 : 線型 有界 有限差分 演算子(linear bounded finite difference operator)

$\|E_0(t)\|$: 선형 연산자 $E_0(t)$의 노름(norm)

A : 演算子

T : 有界 線型 연산자(bounded linear operator)

T' : T의 擴張(Extention)

$Q(k)$: 유계 연산자

ε, δ : 임의의 양수

$\mathscr{D}(A)$: 眞의 解(genuine solution)가 존재하는 初期値의 집합

R^d : 函數 空間(function space)

B : Banach 空間

$\|u\| \equiv \sqrt{\int_0^a |u|^2 dx}$: L^2 공간에서 정의된 노름.

$B_p^{(0)}$, $B_p^{(1)}$: $p \times p$ 의 매트릭스 ; Δx 와 Δt 의 함수

1절. 序 論

(Classification of Partial Differential Equations)

前 號에서는 水工 模型을 유도하여, 그것이 미분 방정식의 형태로 구성됨을 볼 수 있었다. 이번 호에서는 그 식들을 풀기 위한 기초 작업으로서 數値解析 理論과 적용 예들을 서술하겠다. 내용은 주로 포물형(parabolic)과 쌍곡형(hyperbolic) 편미분 식에 대한 것인데 이는 구성된 모형이 주로 그러한 부류에 속하기 때문이다. 본론에 앞서 위와 같이 편미분 식을 분류하는 방법을 기술할 필요가 있는데 이는 편미분 식의 부류에 따라 해를 구하는 방법이 서로 다르기 때문이다.

(1) Quasi-Linear 1계 연립 편미분 방정식

$$\begin{cases} a_1u_x+b_1u_t+c_1h_x+d_1h_t=f_1 & \cdots\cdots(1\text{-}1a) \\ a_2u_x+b_2u_t+c_2h_x+d_2h_t=f_2 & \cdots\cdots(1\text{-}1b) \end{cases}$$

기하학적으로는, $u(x,t)$나 $h(x,t)$의 특수해가 xtu 또는 xth 공간에서 적분 평면(integral surface)이 된다. 다음으로 적분 평면 내의 u_0, h_0에서 s 방향으로의 방향 도함수(directional derivative)를 생각하자. 그러면 ds 방향으로의 변화 du와 dh는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{cases} du=u_sds=u_xdx+u_tdt & \cdots\cdots(1\text{-}2a) \\ dh=h_sds=h_xdx+h_tdt & \cdots\cdots(1\text{-}2b) \end{cases}$$

위의 네 개의 식은 연립 방정식을 이루어 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dh \end{bmatrix} \cdots\cdots(1\text{-}3)$$

만일 (1-3)식에서 행렬의 行列式(determinant)이 0이 되면 u_x, u_t 등등의 편미분 값이 여러개 존재하게 되며, 이는 후술하는 특성방향에 따라 불연속(discontinuity)이 전달된다는 점을 시사하고 있다. 行列式을 0으로 놓으면 특성방향(characteristic direction) dt/dx에 대한 2차식을 얻게 된다 :

$$(a_1c_2-a_2c_1)(dt/dx)^2-(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)dt/dx+b_1d_2-b_2d_1=0$$

그리고 이 식의 판별식을 D라고 할 때 $D>0$, $D=0$, $D<0$에 따라 위의 연립 편미분식은 각기 쌍곡형

* 서울 大學校 土木工學科 助敎授(工博)

(hyperbolic), 포물형(parabolic), 타원형(elliptic)으로 분류된다.

(2) Quasi-Linear 2계 편미분 방정식과 Method of Characteristics

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=f \quad \cdots\cdots (1\text{-}4)$$

만일 편도함수 u_{xx}, $u_{xy}(=u_{yx})$ 그리고 u_{yy}가 존재한다면 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\begin{cases} d(u_x)=u_{xx}dx+u_{xy}dy \\ d(u_y)=u_{yx}dx+u_{yy}dy \end{cases}$$

벡타 형태로 위의 식들을 고치면

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f \\ d(u_x) \\ d(u_y) \end{bmatrix}$$

로 표시된다. u_{xx} 등등의 편도함수가 "유일"하게 존재하는 경우는 매트릭스의 행렬식이 0이 되지 않을 때이다. 즉,

$$a(dy)^2-b(dy)(dx)+c(dx)^2=0$$

혹은

$$(dy/dx)=1/(2a)\{b\pm\sqrt{b^2-4ac}\}\equiv\alpha,\beta\cdots(1\text{-}5a,b)$$

이때 b^2-4ac의 부호에 따라 (1-4)를 분류하게 되며, 양이면 쌍곡형, 0이면 포물형, 음이면 타원형으로 구분된다. 쌍곡형의 경우 α,β로 정의되는 특성 방향 dy/dx가 존재하게 되는데 이러한 방향에 따라서 해가 존재하려면 다음의 행렬식도 역시 0이 되어야 한다.

$$ad(u_x)dy-fdxdy+cdxd(u_y)=0$$

$dy=\alpha dx$, $dy=\beta dx$로부터 다시 변형하면

$$\begin{cases} a\alpha d(u_x)+cd(u_y)-fdy=0: \alpha\text{를 따라} \cdots(1\text{-}6a) \\ \alpha\beta d(u_x)+cd(u_y)-fdy=0: \beta\text{를 따라} \cdots(1\text{-}6b) \end{cases}$$

여기서 특성 방정식(characteristic equations)들을 연립하여 풀기 위해서는 상미분 방정식의 수치해석 방법이 쓰여진다. 또한 u를 결정하기 위하여

$du=(u_x)dx+(u_y)dy$ 식이 사용된다. ……(1-7)

이제 (1-5a)에서 (1-7)까지 5개의 비선형 식으로 부터 미지수 x, y, u_x, u_y, u를 구할 수 있다.

(3) 편미분 방정식의 경계 조건

그러면 특성 방향의 존재 여부에 따라 세 가지로 분류된, 편미분 방정식의 해를 구하는데 필요한 경계 조건들을 생각해 보자.

① 타원형

이 형태는 특성 방향을 가지고 있지 않다. 이에 적합한 조건은 구하고자 하는 해의 영역 전체를 둘러싼 하나의 경계 조건이다. 만일 이 조건이 함수값을 지정한 것이면 Dirichlet 문제라고 부르며 경계에 직각인 도함수가 주어지면 Neumann 문제 그리고 양자의 결합이면 mixed 문제라고 이야기 된다.

② 포물형

특성 방향을 나타내는 특성 방정식은 중근을 갖게 되고, 열려져 있는 경계(open boundary)를 따라서 하나의 경계 조건이 주어지면 된다.

③ 쌍곡형

이는 두개의 특성방향(characteristic direction)을 가지고 있으며 종속 변수의 해는 열려진 경계와 특성선(characteristic lines)들로 둘러싸인 영역 내에서 구해진다. 이때 종속 영역(domain of dependence)과 영향범위(range of influence)의 개념이 모든 쌍곡형 식들에 적용된다. 그리고 경계를 따라 주어져야 할 조건들의 갯수는 경계의 성격에 따라 구분된다. 즉, space-like이면 2개 time-like이면 1개, 특성방향을 따라서는 1개가 주어져야 한다. 만일 특성선에 대하여 불연속이 존재한다면 그 전체 길이에 걸쳐 불연속이 있게 된다.

2절. 有限 差分 理論(Finite Difference Theory)

(1) 適切한 초기치 문제(Properly Posed Initial Value Problems)

① Cauchy 문제(Initial Value Problem)

여기서 論議될 내용은 1계 시간 微分項만을 가진 初期値 문제이다.

$$\begin{cases} \partial u/\partial t=Au, \quad 0\le t\le T \\ u(x,0)=f(x), \quad x\in\Omega \end{cases}$$

이때 Ω는 $x=(x_1,\cdots\cdots,x_d)$를 원으로 하는 空間 R^d 內에서 정의된 정의역이고 u는 미지의 벡타로서 $u(x,t)=(u^1,\cdots\cdots,u^p)$이다. A는 공간 변수 x에 대한 線型의 미분 演算子(operator)로서 시간 변수 t는 포함하고 있지 않다. 또한 경계 조건도 역시 선형이고 均一(homogeneous)하다고 생각하자.

위의 초기치 문제와 함께 기술되는 것은 Banach 공간(space) B이다. 이때 B의 점들은 Ω내에서 정의된 x의 함수로, 고정된 시각(stage) t_0에 대한 $(0\le t_0\le T)$ 윗 미분 방정식의 해(state) $u(x,t_0)$가 B의 한 점이라고 부연할 수 있다. 연산자 A는 B에서 정의역과 치역을 갖는다고 하자. 이제 해 u가 x에 명시적으로 종속(explicit dependence)되어 있다고 생각하지 말고 $u=u(t)$로 나타내진다고 하자. 그러면 초기치 문제를 푼다는 것은 다음을 만족하는 1媒介變數(one parameter)의 점들 $u(t)$를 $(\{u(t); 0\le t\le T\})$ B에서 구하는 것을 의미한다.

$$\begin{cases} du(t)/dt = Au(t), & 0 \le t \le T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

주의할 것은 연산자 A의 정의역을, 선형이고 균일한 경계 조건을 만족하는 점들만으로 제한하고 있다는 점이다.

위의 기술은 1계의 초기치 문제에만 국한되는 것이 아니다. 이는 고차의 초기치 문제를 1계의 초기치 문제의 연립 방정식으로 만들 수 있기 때문이다. 예를 들면

$$\begin{cases} y_{tt} = c^2 y_{xx} \ (c > 0) ; & -\infty < x < \infty, \ t \ge 0 \\ y(x,0) = f(x), & y_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

위의 2계 편미분 식은 그 해로

$$y(x,t) = 1/2[f(x+ct) + f(x-ct)] + 1/2c\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$$

를 가진다. 이에 $y_t = w$, $cy_x = v$ 라는 변수를 도입하면

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_x$$

로 표시되고 다시 $u = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$로 표시하면 $u_t = Au$로 나타내진다. 여기서 A는 미분 연산자로서 $\begin{pmatrix} 0 & c\partial/\partial x \\ c\partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}$이고 초기치는 $u(x,0) = \begin{pmatrix} g(x) \\ cf'(x) \end{pmatrix}$이다.

② 眞의 解(Genuine Solution)

초기치 문제의 眞의 解란 모든 $t(0 \le t \le T)$에 대하여 아래의 식을 만족하는 일 매개변수의 해집합$\{u(t) ; 0 \le t \le T\} \subset \mathscr{D}(A)$이다 :

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| \to 0, \quad \Delta t \to 0$$

$\mathscr{D}$를 어떠한 $u(0) = u_0$에 대하여 眞의 解 $u(t)$가 존재하는 모든 u_0(B의 원소)의 집합이라고 하자. 이제 각각의 고정된 $t(0 \le t \le T)$에 대하여 "眞의 解 연산자" $E_0(t)$를 정의하자 :

$$u(t) = E_0(t)u_0$$

이때 $E_0(t)$는 선형 연산자로 정의구역 $\mathscr{D}(E_0(t)) = \mathscr{D}$를 가진다. 예를 들면 미분 방정식

$$\begin{cases} u_t = au_x, & -\infty < x < \infty, \ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

의 해는 $u(x,t) = f(x+at)$이다. 그러므로 $u(x,t) = E_0(t)f(x) = f(x+at)$로 나타내진다.

③ 適切性(Properly Posedness)

다음 조건 (a), (b)을 만족하는 초기치 문제는 공간 B에서 "適切"(properly posed)하다고 이야기 된다 (Hadamard).

(a) $\mathscr{D} = \mathscr{D}(E_0(t))$가 B에서 稠密(dense)하다.

(b) $E_0(t)$인 연산자들이 一樣으로 有界이다(uniformly bounded). 즉 $0 \le t \le T$인 모든 t에 대하여 $\|E_0(t)\| \le K$인 상수 K가 존재한다.

조건 (a)가 의미하는 바는 B의 원소인 어떤 초기치 u_0에 대하여 眞의 解가 존재하지 않는다 할지라도, 眞의 解가 존재하는 초기치로써 가능한 한 가깝게 근사할 수 있다는 점이다. 조건 (b)는 眞의 解가 초기치에 따라 "연속적"으로 결정된다는 점을 말하고 있다. 부연하자면 $u(t)$와 $v(t)$가 초기값 u_0, v_0에 해당하는 眞의 解일 때, $\|u(t) - v(t)\| \le K\|u_0 - v_0\|$이므로 초기의 상태가 매우 가까우면 이후의 상태도 또한 매우 가깝다고 할 수 있다. 또한 (b)가 밝히는 바는 $u(t)$가 u_0에 의하여 유일(unique)하게 결정된다는 점이다. 즉 $u_0 = v_0$이면 $u(t) = v(t)$이므로 각각의 초기값 $u_0 (\in \mathscr{D})$에 대하여 眞의 解 $u(t)$는 유일하게 존재한다.

예 i) 열전도(heat conduction) 방정식은 $L^2(-\infty, \infty)$에서 適切하다.

$$\begin{cases} u_t = \sigma u_{xx}, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

이 식의 해는

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\xi-x)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} f(\xi)\,d\xi$$

이고 종속 영역(domain of dependence)은 x축 전체이다.

예 ii) 시간에 대하여 반대 방향(reverse)으로의 열전도식은 well posed되어있지 않다. 이는 해가 유일하게 존재하지 않기 때문이다.

예 iii) Laplace 초기치 문제는 適切하지 못하다(ill-posed)

$$\begin{cases} u_{tt} = -u_{xx}, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < t < \infty \end{cases}$$

이는 경계 조건이 모든 방향으로 필요하기 때문이다.

④ 擴張(Extention)정리

有界 선형 연산자 T의 정의역이 B에서 稠密한 때 유일한 擴張 T'을 갖는다. 이때 $\mathscr{D}(T') = B$이고 $\|T'\| = \|T\|$이다. (증명생략)

⑤ 一般解(Generalized Solution)

$E_0(t)$는 선형 연산자로서 B에서 稠密(dense)한 정의역 $\mathscr{D} = \mathscr{D}(E_0(t))$를 가지고 또한 適切한 초기치 문제에 대하여 上界(upper bound) K를 갖는다. 그렇다면 擴張정리에 의하여 $E_0(t)$는 "一般解(generalized solution)연산자"라고 불리우는 선형 연산자 $E(t)$를 유일하게 갖는다. 이 연산자의 정의역은 B전체이며 $E_0(t)$와 똑같은 上界 K를 갖는다. 식 $u(t) = E(t)u_0$는 임의의 B의 원소 u_0에 대하여 一般解를 나타내는 것으로 생

각할 수 있다. 물론 u_0가 $\mathscr{D}(E_0(t))$의 원소라면 $E(t)$에 의하여 결정된 $u(t)$는 u_0에 상응하는 眞의 解이다.

유의할 사항은 x에 대한 有界 정의역(bounded domain)에서 정의된 초기치 문제가 B에서 適切할 때, 경계 조건도 적당하여야 한다. 이는 경계 조건이 A와 $E_0(t)$의 정의역에 영향을 미치기 때문이다. 예로서 열전도 방정식을 $a \leq x \leq b$에서 생각하자.

$$\begin{cases} u_t = \sigma u_{xx}, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & a \leq x \leq b \end{cases}$$

만일 다음과 같이 경계 조건이 너무 많다면 :

$$\begin{cases} u(a, t) = u(b, t) = 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \end{cases}$$

$f(x) \equiv 0$인 경우는 제외하고는 眞의 解가 존재하지 않는다. 그래서 $\mathscr{D}(E_0(t))$는 B에서 稠密하지 않으므로 위의 문제는 適切하지 못하게 된다. 반면에 경계 조건을 적게 갖고 있다면(예를 들어 아무것도 없는 경우) 眞의 解가 유일하지 못하여 다시 문제는 適切치 못하게 된다. 주의할 사항은 開 경계(open boun*dary*)를 따라서는 하나의 조건이 주어져야 한다는 것이다.

⑥ 不安定性(Instability)

두 개의 층으로 흐르는 비점성 비압축성 유체들의 밀도가 각각 R_1, R_2로 均一(uniform)하다고 생각하자. R_1은 U_1의 等速 수평 속도를 가지고 등속 수평 속도 U_2인 밀도 R_2의 유체 위를 흐른다고 하자. (이러한 상황의 결과는 바람에 의한 水面波(water waves)의 형성과 관련되어 있다.) 이때 무거운 유체가 가벼운 유체 위에 있다면 항상 불안정성이 존재하며 이를 "Taylor 불안정성"이라고 한다. 그리고 $R_1 = R_2$이어도 불안정이 존재하며 이는 Kelvin-Helmholtz Instability라고 한다. 만일 $R_1 < R_2$라면 상당히 작은 波長의 불안정성이 있게 된다. 여기에 표면장력 효과가 포함된다면, 수면파가 형성되기 위하여 10miles/hr. 이상의 風速이 필요하게 되는데 이는 관측치보다는 훨씬 큰 값이다.

비압축성 유체의 경우 Taylor나 Helmholtz의 불안정성을 선형화시킨 문제는 "適切"하지 못하다. 압축성이 고려된다면 보다 適切해질 것으로 보이고 점성, 표면장력, 열 전도 등등이 포함된다면 확실히 적절해질 것이다. 수치적인 계산에서는 초기의 변동(disturbances)이 작은 경우라도 불안정성을 고려하지 않을 수 없게 되는데, 이는 유한 차분 과정에서 계산 격자망의 간격에 해당하는 변동을 유발하게 되기 때문이다. 그래서 Taylor 혹은 Helmholtz 불 안정성의 발생이 예측될 만큼 그 解에 대하여 충분한 지식이 있다면, 수치계산을 시행하기 전에 충분한 크기의 표면장력을 첨가하여 격자에 필적하는 모든 크기의 변동들을 안정시키도록 모형을 수정할 수 있다.

(2) 유한 차분 근사(Finite Difference Approximation)

① 선형 차분식(Linear Difference Equations)

p-벡타 $u = u(x, t)$에 대한 초기치 문제를 空間 B에서 생각하자.

$$\begin{cases} \partial u/\partial t = Au, \quad 0 \leq t \leq T & \cdots\cdots\cdots (2\text{-}1) \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega \subset R^d \end{cases}$$

바라는 목표는 식(2-1)을 유한 차분 해법(finite difference scheme)으로 근사하는 것이다. 그래서 격자망의 크기로 $\Delta x(\Delta x_1, \cdots\cdots, \Delta x_d) > 0$와 $\Delta t > 0$를 택하고 격자를 구성한다 : $\{(j\Delta x,\ n\Delta t)\ ;\ j\Delta x \in \Omega,\ 0 \leq n\Delta t \leq T\}$ 여기서 $j = (j_1, j_2, \cdots\cdots, j_d)$는 d의 차원을 갖는다. 그리고 p-벡타의 "격자함수" $v_j{}^n = v(j\Delta x,\ n\Delta t)$를 생각하자 이제 식 (2-1)은 유한 차분해법에 의하여 다음과 같은 형태로 근사된다 :

$$\sum_{\beta \in N_1} B_\beta{}^{(1)} v_{j+\beta}^{n+1} = \sum_{\beta \in N_0} B_\beta{}^{(0)} v^n{}_{j+\beta} \cdots\cdots\cdots (2\text{-}2)$$

초기 조건 : $v_j{}^0 = f(j\Delta x)$

이때 $B_\beta{}^{(1)}$과 $B_\beta{}^{(0)}$는 次數가 $(p \times p)$인 매트릭스로서 Δx와 Δt의 함수이며, x에 종속될 수는 있으나 t에는 관계되지 않는다. 또한 N_1과 N_0는 d의 지표(index)를 가진 고정된 집합으로 $\beta = 0$의 近傍(neighborhood) 內에서 정의된다. 이러한 유한 차분 해법은 2準位(two level) 혹은 1단계(one-step) 유한 차분 해법이라고 불리운다. 이는 식 (2-2)가 두 개의 시간 準位 $n\Delta t$와 $(n+1)\Delta t$만을 포함하기 때문이다. 원론적으로는 多準位(multi level) 유한 차분 해법을 생각할 수 있다.

주어진 값 $v^n \equiv \{v_j{}^n$: 모든 $j\}$으로써 $v^{n+1} = \{v_j{}^{n+1}$: 모든 $j\}$를 유일하게 결정하기 위하여 식 (2-2)를 사용할 수 있다. 이는 $N_1 = \{0\}$, $B_0{}^{(1)} = I$일 때 자동적으로 陽(explicit) 해법이 된다. 즉 유한 차분식의 형태는 다음과 같다 :

$$v_j{}^{n+1} = \sum_{\beta \in N_0} B_\beta{}^{(0)} v_{j+\beta}{}^n$$

수치해 v^n은 $t = n\Delta t$에서 $u(n\Delta t)$를 근사하는 것으로 기대된다. 그러나 v^n은 離散된 x값 $j\Delta x$에서만 정의되어 있는 반면, u^n은 Ω내의 모든 x값에 대하여 정의되어 있다. 그러므로 비교를 위해서는 v^n의 정의를 Ω내의 모든 x에로 확대시킬 필요가 있다. 이를 위한 한가지 방법은 "roofing"으로서 v^n은 Ω의 모든 x에 대하여 정의된다.

수치해 $v^n(x)$만이 B에서 생각된다면 수치해석 과정은 B에 "embeded"가 된다. 그러면 일 매개변수의 族

(famliy) $\{u(t): 0 \leq t \leq T\}$ 대신에 點列(sequence of points) $v^0, \cdots\cdots, v^n$을 B에서 얻게된다. 이에 연관지어 embeded된 수치 앨거리듬(algorithm)을 나타내면,

$$B_1 v^{n+1} = B_0 v^n, \quad n = 0, 1, \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}3)$$

여기서 B_0와 B_1은 선형 유계 유한 차분 연산자이고 각기 정의역 B를 갖는다. 그리고 어떤 v^n에 대해서도 유한 차분 연산자를 통하여 유일한 해 v^{n+1}이 존재한다는 것은, B_1^{-1}가 존재하고 $(B_1^{-1}B_0)$는 B에서 線型 有界 연산자임을 의미한다. 그래서 식 (2-3)은 다음과 같은 형태를 갖는다:

$$v^{n+1} = B_1^{-1} B_0 v^n, \; n = 0, 1, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}4)$$

여기서 Δx와 Δt가 0에 수렴할 때, Δx와 Δt를 독립적으로 0에 수렴시키지 않고 일정한 관계를 가지도록 한다:

$$\Delta x_j = g_k(\Delta t), \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, d$$

그리하여 $\Delta t \to 0$일 때, $g_j(\Delta t) \to 0$이도록 한다. 따라서

$$B_1^{-1} B_0 = B_1^{-1}(\Delta t, g_1(\Delta t), \cdots\cdots, g_d(\Delta t))$$

$$B_0(\Delta t, g_1(\Delta t), \cdots\cdots, g_d(\Delta t)) \equiv C(\Delta t)$$

가 되고 식 (2-4)는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$v^{n+1} = C(\Delta t) v^n \;;\; n = 0, 1, \cdots\cdots$$

② 適合性(Consistency)

적합성의 개념에 접근하기 위하여 $u(t)$를 초기치 문제의 眞의 解라고 놓자. $C(\Delta t)u(t)$는 $u(t+\Delta t)$를 근사하는 것으로 생각되고 있으므로

$$\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} u(t) = \frac{C(\Delta t)u(t) - u(t)}{\Delta t} \text{는}$$

$du(t)/dt$ 즉 $Au(t)$를 근사하는 셈이 된다. 그래서(B의 모든 원 u는 아닐지라도) 眞의 解에 대해서는 $\Delta t \to 0$일 때

$$\left\| \left\{ \frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A \right\} u(t) \right\| \to 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T \qquad (2\text{-}5)$$

를 기대할 수 있다.

B에서 稠密한 $u(0)$를 초기치로 하는 眞의 解 u에 대하여 유한 차분 연산자族이 식 (2-5)를 만족한다면, 이 연산자族이 초기치 문제에 適合한 근사를 수행한다고 말한다. 이때 식 (2-5)는 適合조건이 된다. 또한 적합조건식(2-5)는 다음과 같은 실용적인 형태와 동등하다. (증명 생략)

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - C(\Delta t)u(t)}{\Delta t} \right\| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T \cdots\cdots \quad (2\text{-}6)$$

식(2-6)의 노름(norm)내에 있는 부분은 유한 차분 연산자의 "中斷오차"(truncation error)라고 하며 이는 眞의 解가 어느 정도까지 유한 차분 식을 만족하고 있는가를 나타낸다.

앞으로는 유한 차분 연산자가 適合하다고 가정하자. 또한 식(2-5)와 (2-6)의 극한이 $0 \leq t \leq T$인 t에 대하여 一様으로 만족된다고 생각한다. 즉 임의의 $\varepsilon > 0$을 선택하였을 때 모든 $0 < \Delta t < \delta$에 대하여 다음을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다:

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - C(\Delta t)u(t)}{\Delta t} \right\| < \varepsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

즉 $\|u(t+\Delta t) - C(\Delta t)u(t)\| < \varepsilon \Delta t, \quad \forall 0 \leq t \leq T$

다른 표현을 빌면 $u(t+\Delta t) = E(\Delta t)u(t)$이므로

$$\|(E(\Delta t) - C(\Delta t)u(t)\| < \varepsilon \Delta t,$$

$$\forall 0 \leq t \leq T, \quad 0 < \Delta t < \delta \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}6)'$$

여기서 $P > 0$이고 $\Delta t \to 0$에 따라서

$$\|E(\Delta t) - C(\Delta t))u(t)\| = O(\Delta t^{\rho+1})$$

이면 유한 차분 연산자는 ρ次의 精度(accuracy)를 갖는다고 말한다. 만일 연산자가 適合하다면 분명히 陽(positive) 精度를 가지게 된다. 보통 ρ는 양의 정수로서 1과 4사이의 값을 갖는다.

③ 收斂性(Convergence)

수렴성을 정의하기 위하여 아래의 설명을 먼저 기술한다. $u^n = E(n\Delta t)u_0$를 근사하기 위하여 초기치인 v_0 $(\in B)$에 유한 차분 연산자를 적용하여 $v^n = C(\Delta t)^n v_0$를 계산한다. 이때 $j \to \infty$에 따라 $\Delta t_j \to 0$인 列(sequence)을 선택하고 $0 \leq t \leq T$에서 어떤 t를 고정시킨다. 또한 n_j는 $t/\Delta t_t$에 가장 근접한 정수이고 $j \to \infty$에 따라 $n_j \Delta t_j \to t$이다. 이때 모든 列 $\{\Delta t_j\}$, 임의의 시각 $t(0 \leq t \leq T)$, 임의의 초기치 $u_0(\in B)$에 대하여

$$\|\{C(\Delta t_j)^{n_j} - E(t)\} u_0\| \to 0, \quad j \to \infty$$

이면 유한 차분 연산자 族 $\{C(\Delta t), \Delta t > 0\}$은 초기치 문제를 수렴 근사한다고 한다.

④ 安定性(stability)

유한 차분 연산자를 사용하는 계산의 형태는 다음의 형태를 갖는다.

$$v^n = C(\Delta t)^n v_0, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2\text{-}7)$$

그리고 안정성의 개념은 그 해가 한계없이 커져서는 안된다는 것이다. 따라서 연산자 즉 $C(\Delta t)^n$이 모든 $n\Delta t(0 \leq n\Delta t \leq T)$에 대하여 一様 有界가 되는 $\tau(0 < \Delta t < \tau)$가 존재하면 그 유한 차분 근사가 안정하다고 한다. 만일 차분 연산자가 안정하다면 식(2-7)을 만족하는 어떤 형태의 解도 다음을 만족해야 한다.

$$\|v^n\| = \|C(\Delta t)^n v_0\| \leq \|C(\Delta t)^n\| \|v_0\| \leq K \|v_0\|$$

(3) 기초적인 정리(Elementary Theorems)

① Lax의 Equivalence 정리(1956년)

주어진 선형의 초기치 문제가 適切하고 이에 대한 근사가 適合하다면, 유한 차분 근사가 수렴하기 위한

필요 충분 조건은 안정성이다. (증명 생략)

예로서 분산 (diffusion)식을 생각하자.

$$\begin{cases} u_t=\sigma u_{xx} \\ u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}8) \\ u(0,t)=u(a,t)=0,\ 0\le t\le T \end{cases}$$

이 문제는 Hilbert 空間에서 適切하다. 이때의 Hilbert 空間은 :

$$L^2(0,a)=\{u(x),\ \text{정의역 } [0,a],$$

$$\text{노름 } \|u\|\equiv\sqrt{\int_0^a|u|^2dx}<\infty\}$$

이다. 유한 차분 근사식을 구성하기 위하여 J를 양의 정수라고 하고 $h\equiv\Delta x=a/h>0$로 놓자. 또한 $k\equiv\Delta t>0$를 택하자. 이로써 격자 $(x_j,t_n)=(jh,nk)$가 형성되고 이 격자 위에서 유한 차분 陽해법을 생각할 수 있다.

$$\begin{cases} v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n), \\ \qquad \lambda=\sigma k/h^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}9) \\ v_j^0=f_j=f(jh),\ \ v_0^n=v_J^n=0 \end{cases}$$

適合性을 살펴보기 위해서는 임의의 격자함수 $v(x)\in L^2(0,a)$를 모든 $x\in[0,a]$에 대하여 확장할 필요가 있다. 그래서 유한 차분 해법에 따라서 $w(x)$를 다음과 같이 정의한다 :

$$w(x)=v(x)+\lambda[v(x+h)-2v(x)+v(x-h)],$$
$$x\in[0,a]=C(k)v(x)$$

이제 "적합성"을 만족시키기 위하여 다음을 보여야 한다.

$$\|u(t+k)-C(k)u(t)\|\xrightarrow[k\to0]{}0,\quad 0\le t\le T$$

여기서 $u(x,t)$는 공간에 대해서는 4계, 시간에 대해서는 2계의 연속인 도함수를 가졌다고 생각한다. 그러면,

$$\begin{aligned} &u(x,t+k)-C(k)u(x,t) \\ &=u(x,t+k)-u(x,t)-\lambda[u(x+h,t) \\ &\quad -2u(x,t)+u(x-h,t)] \\ &=u+ku_t+O(k^2)-u \\ &\quad -\lambda\Big[u+hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+\frac{h^3}{6}u_{xx}+O(h^4)-2u \\ &\quad +u-hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}-\frac{h^3}{6}u_{xx}+O(h^4)\Big] \\ &=ku_t-\lambda h^2u_{xx}+O(k^2)+O(h^4) \\ &=k(u_t-\sigma u_{xx})+O(k^2)+O(h^4) \\ &=O(k^2)\xrightarrow[k\to0]{}0 \end{aligned}$$

이로써 適合性은 증명되었으므로 Lax의 Equivalence 정리를 논의하자. 우선 $\lambda\le1/2$인 경우에 $\|w(x)\|\le\|v(x)\|$임을 보여서 안정함을 증명한다. 즉 $w(x)=C(k)v(x)$이므로 위의 부등식은 $\|C(k)\|\le1$을 의미하고 그로부터 $\|C(k)^n\|\le1^n$이 되어 안정의 정의를 만족시키게 된다.

$$\begin{aligned} \|w(x)\|&=\|v(x)+\lambda[v(x-h)-2v(x)+v(x+h)]\| \\ &=\|\lambda v(x-h)+(1-2\lambda)v(x)+v(x+h)\| \\ &\le\lambda\|v(x-h)\|+(1-2\lambda)\|v(x)\|+\lambda\|v(x+h)\| \\ &\le\|v(x)\| \end{aligned}$$

그러므로 $\lambda\le1/2$인 경우 안정하고 또한 수렴하게 된다. 또한 역도 역시 성립하여 양자는 필요 충분 조건이다.

② Kreiss의 攝動(Perturbation)정리(1962년)

$Q(k)$를 B로의 有界 演算子라고 하고 유한 차분 연산자 $C'(k)=C(k)+k\cdot Q(k)$를 생각하자. $C'(k)$는 $C(k)$의 작은 섭동인데, $C(k)$가 適合하면 $C'(k)$도 역시 適合하다. 이때 유한 차분 해법 $v^{n+1}=C(k)v^n$이 안정하고 $Q(k)$가 $(0<k<\tau)$ 一樣 有界이면 $v^{n+1}=[C(k)+kQ(k)]v^n$도 역시 안정하다. 즉, $\|C'(k)^n\|\le K'$인 상수 K'이 존재한다(증명 생략). 예를 들면

$$\begin{cases} u_t=1/2u_{xx}+u \\ u(x,0)=\sin x,\ \ 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ 0\le t\le1 \end{cases}$$

이에 대한 유한 차분 陽해법은

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)+kv_j^n,$$
$$\lambda=k/(2h^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}10)$$

식(2-10)은 차분식(2-9)에 섭동항 kv_j^n을 첨가한 꼴로 생각할 수 있다. 섭동은 $kQv^n=kv^n$으로서 $\|Q\|=1$이 되고 결국 Q는 有界이다. 상기 섭동정리로부터 이 새로운 해법은 有界이다. 그리고 Lax의 정리로부터, $\lambda\le1/2$인 경우에 수렴성을 갖는다.

그러나 $\lambda>1/2$인 경우에 해가 반드시 커진다고(blow up) 예측할 수 있을 것인가? 이러한 안정성 문제는 섭동항 kv_j^n을 빼고서 조사하여도 충분하다.

$$\begin{cases} v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n),\ \ 1\le j\le J-1 \\ v_j^0=\sin jh,\ \ 0\le j\le J \\ v_0^n=v_J^n=0,\ \ n=0,1,2\cdots\cdots \end{cases}$$

해의 형태를 $v_j^n=A^n\sin jh$, $0\le j\le J$로 놓고서 생각하여 보자(Fourier stability analysis)

$$\begin{aligned} A^{n+1}\sin jh&=A^n\{\sin jh+\lambda[\sin(j+1)h-2\sin jh \\ &\quad +\sin(j-1)h]\} \\ &=A^n\sin jh\{1+2\lambda(\cos h-1)\} \end{aligned}$$

이때 $A=1+2\lambda(\cos h-1)$은 "growth or decay 계수"라고 하며 $v_j^n=[1+2\lambda(\cos h-1)]^n\sin jh$, $v_j^{n+1}=A\cdot v_j^n$이 된다. 그리고 이 해는 초기 조건과 경계 조건을 만족시키는 해이다. h가 그리 크지 않은 경우 $0\leqslant\cos h<1$이므로 $0<A<1$가 되고 이에 따라 해 $v_j^n=A^n\sin h$는 여전히 有界이다. 사실상 $\|v_j^n\|=|A|^n|\sin h|\le|\sin h|=\|v_j^0\|$이므로 $\lambda>1/2$인 경우에도 확실한 안정성을 갖는

다. 그러나 이는 모순이 아니다. 실제로 안정 조건은 $\lambda \leq 1/2$ 이고 해법이 불안정하다면 $\|C(k)^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ 이다. 그렇지만 위의 말이 $\|v^n\| = \|C(k)^n v^0\|$ 이 有界인, 특별한 초기값 v^0 를 찾을수 없다는 것은 아니다. 위의 예가 바로 그러한 경우이며 $v^0=0$ 인 경우에도 같은 결과가 발생한다.

③ Strang 의 不適切한 초기치 문제 (Ill-Posed Initial Value Problem)에 관한 정리 (1963 년)

$\mathscr{D}(E_0(t))$ 는 B 에서 稠密하지만 $\{E_0(t)\ ;\ 0 \leq t \leq T\}$ 가 一様 有界를 만족시키지 않는 不適切한 초기치 문제를 생각하자. 이는 초기치 문제의 眞의 解가 上下限없이 커질 수 있다는 것이다. 따라서 不適切한 초기치 문제에 適合한 유한 차분 근사를 수행할 경우 그 해는 不安定하다(증명 생략). 예로서 Laplace 연산자를 가진 초기치 문제를 생각하자.

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a \\ u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}11)$$

이 문제의 함수 究間은 $L^2(0, a)$ 이다. 이미 알고 있는 사실은 roof : $\{0 \leq x \leq a,\ t = T\}$ 에서의 u 값을 안다면 위의 문제가 유일해를 갖는다는 것이다. 그렇지만 주어진 roof 값이 임의의 큰 수 일 수 있다. 즉 眞의 解演算子 $\{E_0(t) : 0 \leq t \leq T\}$ 가 一様 有界가 아닐 수 있다는 것이다. 상기 정리에 의하여 안정한 유한 차분 근사방법을 찾는 것이 소용없는 일이 된다. 이는 $t<0$ 인 경우의 열 전도 방정식의 경우에도 마찬가지이다. 여기서 유의할 점은 상미분 방정식이나 타원형 편미분 방정식의 경우에는 適切性이 중요한 요소가 아니라는 것이다. 그리고 보통 中斷오차는 누적된 끝수처리오차 (round-off error) 보다 크므로 global 중단오차는 local 중단오차와 같은 order 를 가진다.

참 고 문 헌

1. Abbott, M.B., "*Computational Hydraulics*", Pitman, 1979.
2. Ames, W.F., "*Numerical Methods for Partial Differential Equations*", Academic Press, 1977.
3. Isaacson, E. and H.B. Keller, "*Analysis of Numerical Methods*", John Wiley & Sons, 1966.
4. Li, W.H., "*Differential Equations of Hydraulic Transients, Dispersion and Groundwater Flow*", Prentice-Hall, 1972.
5. Richtmyer, R.D. and K.W. Morton, "*Difference Methods for Initial-Value Problems*", John Wiley & Sons, 1957.

내용 중 용어의 번역은 다음 두 책을 참고하였다.

1. 박 을용, 김 치영, 김 한식, "數學 大辭典", 홍문 도서, 1982.
2. 이 중, "理工 英韓 大辭典", 창원사, 1977.